BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE SAMUEL

Sur les anneaux factoriels

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 155-173
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__155_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 155 à 173.

SUR LES ANNEAUX FACTORIELS

PAR

PIERRE SAMUEL.

(Clermont-Ferrand).

Dans cet article, nous nous proposons d'apporter quelques compléments à un article récemment publié par l'auteur ([15]) [1]. On y verra d'abord comment l'étude des groupes de classes de diviseurs des anneaux de Krull systématise un certain nombre de résultats classiques. Nous donnons ensuite un exemple de module projectif non libre sur un anneau factoriel. L'utilisation des dérivations nous permet de donner, en toutes caractéristiques $p \neq 0$, des exemples d'anneaux factoriels A tels que $A[[X]]$ ne soit pas factoriel ([15] ne donnait que des exemples de caractéristique 2). Enfin quelques conjectures algébriques, généralisant des théorèmes géométriques de SEVERI, LEFSCHETZ et ANDREOTTI, sont discutées. Je remercie mon ami J.-P. SERRE de m'avoir communiqué plusieurs intéressantes remarques.

1. Classes de diviseurs d'un anneau de Krull. — Rappelons ([22], chap. VI, § 13; ou [5]) qu'on appelle anneau de Krull un anneau intègre A tel qu'il existe une famille (v_i) de valuations discrètes du corps des fractions K de A possédant les propriétés suivantes :

a. A est l'intersection des anneaux des v_i;

b. pour tout élément $x \neq 0$ de K, on a $v_i(x) = 0$ pour presque tout i.

Parmi les valuations v_i figurent celles dont l'anneau est de la forme $A_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 de A; ces valuations sont dites *essentielles;* d'ailleurs, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A, $A_\mathfrak{p}$ est l'anneau d'une des v_i. Un idéal fractionnaire de A est dit *divisoriel* s'il est défini par un nombre fini de conditions valuatives $v_i(x) \geq n(i)$, où les v_i sont essentielles.

[1] During the greatest part of the period of préparation of this paper, the author was supported by the National Science Foundation (Grant G 12 982, University of California, Berkeley).

Les idéaux divisoriels de A sont en correspondance biunivoque canonique avec les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, des valuations essentielles de A; ces combinaisons, appelées *diviseurs* de A, forment un groupe additif $D(A)$; la somme des diviseurs correspondant aux idéaux divisoriels $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ correspond au plus petit idéal divisoriel contenant $\mathfrak{ab}$, c'est-à-dire à l'idéal $A:(A:\mathfrak{ab})$. Les idéaux fractionnaires principaux de A sont divisoriels; les diviseurs correspondants, dits *principaux*, forment un sous-groupe, noté $P(A)$, de $D(A)$. Le groupe quotient $D(A)/P(A)$ est appelé le *groupe des classes de diviseurs de* A; nous le noterons $C(A)$. Ces groupes seront notés additivement. Pour que A soit factoriel, il faut et il suffit que ce soit un anneau de Krull et que $C(A) = 0$.

Soient maintenant A un anneau de Krull, et A' un anneau de Krull contenant A, tel que A' soit un A-module *plat* ([6] ou [17], Annexe). Si $\mathfrak{b}$ est un idéal divisoriel de A, on sait que c'est l'intersection de deux idéaux principaux fractionnaires ([5]), soit $\mathfrak{b} = d^{-1}(Aa \cap Ab)$ avec a, b, $d \in A$; d'où par platitude, $A'\mathfrak{b} = d^{-1}(A'a \cap A'b)$, ce qui montre que $A'\mathfrak{b}$ est divisoriel. Ainsi $\mathfrak{b} \to A'\mathfrak{b}$ définit une application j de $D(A)$ dans $D(A')$, qui applique évidemment $P(A)$ dans $P(A')$. De plus, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux divisoriels de A, la platitude montre qu'on a $A'(A:(A:\mathfrak{ab})) = A':(A':A'\mathfrak{ab})$; donc j est un homomorphisme de $D(A)$ dans $D(A')$. Par passage aux quotients, j définit un *homomorphisme* $\bar{j}$, dit *canonique*, de $C(A)$ dans $C(A')$. Nous allons l'étudier dans plusieurs cas particuliers.

Proposition 1. — *Soit A un anneau de Zariski tel que son complété $\hat{A}$ soit un anneau de Krull. Alors A est un anneau de Krull, et $C(A) \to C(\hat{A})$ est injectif.*

Identifions le corps des fractions K de A à un sous-corps de celui de $\hat{A}$. La formule $\hat{A}a \cap A = Aa$ (pour $a \in A$) montre aisément qu'on a $A = \hat{A} \cap K$, ce qui prouve que A est un anneau de Krull. On sait que $\tilde{A}$ est A plat. Enfin si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $\hat{A}\,\mathfrak{a}$ soit principal, la démonstration du lemme 1.2 de [15] montre que $\mathfrak{a}$ est lui-même principal; ceci prouve l'injectivité annoncée.

Corollaire (Mori). — *Si A est un anneau de Zariski dont le complété est factoriel, A est factoriel.*

Considérons maintenant un anneau de Krull A, et une partie *multiplicative* S de A ne contenant pas 0. On sait ([5]) que l'anneau de fractions $S^{-1}A$ est un anneau de Krull, dont les idéaux premiers divisoriels (c'est-à-dire de hauteur 1) sont les $S^{-1}\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers divisoriel de A tels que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Ainsi $D(S^{-1}A)$ s'identifie au facteur direct de $D(A)$ engendré par les valuations essentielles correspondant aux $\mathfrak{p}$ tels que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$; nous noterons G le sous-groupe supplémentaire, engendré par les valuations correspondant aux $\mathfrak{p}$ tels que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. Comme $j : D(A) \to D(S^{-1}A)$ est surjectif, il en est de même de

$$\bar{j} : C(A) \to C(S^{-1}A);$$

le *noyau* de $\bar{j}$ est évidemment égal à

$$(1) \qquad (G + P(A))/P(A) = G/(G \cap P(A)).$$

Nous dirons qu'un élément p d'un anneau A est *premier* si l'idéal Ap est premier. Ceci implique, si A est intègre, que p est extrémal, mais la réciproque est fausse dans un anneau non factoriel. Appliquons (1) au cas où S est engendrée par une famille (p_i) d'éléments premiers non nuls. Alors, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier divisoriel tel que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, il contient un produit de puissances des p_i, donc l'un des p_i, soit p_j; comme $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1, on a $\mathfrak{p} = Ap_j$. Ainsi on a $G \subset P(A)$, et (1) montre que le noyau de $\bar{j}$ est nul. D'où :

Proposition 2. — *Soient A un anneau de Krull, et S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0. Alors l'homomorphisme canonique $\bar{j} : C(A) \to C(S^{-1}A)$ est surjectif. Si, de plus, S est engendrée par une famille d'éléments premiers, $\bar{j}$ est bijectif.*

Corollaire. — *Soient A un anneau de Krull, et S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0. Si A est factoriel, $S^{-1}A$ est factoriel. Si S est engendrée par une famille d'éléments premiers et si $S^{-1}A$ est factoriel, alors A est factoriel.*

Remarques :

1. La première assertion du corollaire est classique. La seconde est due à Nagata ([12]).

2. Soient A un anneau intègre dont les idéaux principaux vérifient la condition maximale, (p_i) unc famille d'éléments premiers non nuls de A, et S la partie multiplicative qu'ils engendrent. Chaque A_{Ap_i} est l'anneau d'une valuation discrète v_i. On a $A = S^{-1}A \cap \left(\bigcap_i A_{Ap_i}\right)$, car, si a/s $(a \in A, s \in S)$ est un élément du second membre, et si p_i divise s, on a $v_i(a) \geq v_i(s) > 0$, et p_i divise a; simplifiant par p_i, on voit, par applications successives, qu'on peut supposer $s = 1$. Il en résulte que, si $S^{-1}A$ est intégralement clos (resp. complètement intégralement clos), il est de même de A. Si $S^{-1}A$ est un anneau de Krull, et si, ou bien la famille (p_i) est finie, ou bien si les idéaux principaux de A vérifient la condition maximale, alors A est un anneau de Krull : en effet, pour tout élément $a \neq 0$ de A, on a $v_i(a) = 0$ pour presque tout i; c'est évident dans le premier cas; dans le second, seul un nombre fini de p_i peut diviser a d'après la condition maximale.

3. Soient A un anneau de Krull, et S une partie multiplicative de A ne contenant pas o et telle que $\bar{j}$ soit bijectif. Avec les notations de (1), on a alors $G \subset P(A)$, ce qui montre que tout idéal premier divisoriel $\mathfrak{p}$ qui rencontre S est principal. Supposons S « saturée » (c'est-à-dire que tout diviseur de tout élément S soit dans S; le remplacement de S par sa saturée ne modifie pas $S^{-1}A$); alors S contient les générateurs p_i des idéaux premiers divisoriels $\mathfrak{p}$ rencontrant S. D'autre part, pour tout $s \in S$, les idéaux premiers divisoriels contenant S soit parmi les Ap_i, ce qui montre que s est un produit des p_i. Donc S est engendrée par une famille d'éléments premiers. Ceci constitue une réciproque de la seconde assertion de la proposition.

Comme seconde application de la formule (1), considérons un anneau de Krull A, l'anneau $R = A[X]$ des polynomes sur A, et l'ensemble S des polynomes constants non nuls de R. On a $S^{-1}R = K[X]$, où K est le corps des fractions de A, et donc $C(S^{-1}R) = 0$ (car $S^{-1}R$ est principal). D'autre part, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier divisoriel de R tel que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap A$ est un idéal premier non nul de A; comme $\mathfrak{p}_0 R$ est premier, et que $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1, on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 R$, et $\mathfrak{p}_0$ est divisoriel; inversement, si $\mathfrak{p}_0$ est un idéal premier divisoriel de A, $\mathfrak{p}_0 R$ est un idéal premier divisoriel de R (car R est A-plat; *cf.* ci-dessus). Donc, avec les notations de (1), G s'identifie à $D(A)$. Enfin $G \cap P(R)$ s'identifie à $P(A)$, car, si un idéal $\mathfrak{a}_0$ de A engendre un idéal principal dans R, $\mathfrak{a}_0$ est lui-même principal (considérer le terme constant d'un générateur de $\mathfrak{a}_0 R$). On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit A un anneau de Krull. L'homomorphisme canonique de $C(A)$ dans $C(A[X])$ est bijectif*

COROLLAIRE. — *Soit A un anneau de Krull. Pour que $A[X]$ soit factoriel, il faut et il suffit que A soit factoriel.*

REMARQUE. — Par récurrence sur n, la proposition 3 et son corollaire se généralisent aussitôt aux anneaux de polynomes à n variables.

2. Application aux anneaux gradués. — Nous ne considérerons que des anneaux gradués dont le groupe des degrés est $\mathbf{Z}$. Pour un tel anneau gradué R, nous noterons R_n ($n \in \mathbf{Z}$) l'ensemble de ses éléments homogènes de degré n, de sorte que R est la somme directe des R_n.

PROPOSITION 4. — *Soit R un anneau de Krull gradué. Notons $DH(R)$ [resp. $PH(R)$] le groupe des diviseurs (resp. diviseurs principaux) de R correspondant à des idéaux divisoriels homogènes (resp. engendrés par un élément homogène), et posons $CH(R) = DH(R)/PH(R)$. Alors l'homomorphisme canonique de $CH(R)$ dans $C(R)$ est bijectif.*

Il n'y a rien à démontrer si R se réduit à R_0. Supposons donc $R \neq R_0$. Prenons pour S l'ensemble des éléments homogènes non nuls de R. Alors $S^{-1}R$ est un anneau gradué ([5]), $(S^{-1}R)_0$ est un corps (composé des quotients a/b, où a et b sont des éléments homogènes de même degré de R), et en notant t un élément homogène non nul de $S^{-1}R$ ayant le plus petit degré $>$ o possible, on a $S^{-1}R=(S^{-1}R)_0[t, t^{-1}]$. On voit aussitôt que t est transcendant sur $(S^{-1}R)_0$, ce qui montre que $S^{-1}R$ est un anneau principal. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R, on sait ([22], chap. VI, § 2, lemma 3) que l'idéal engendré par les éléments homogènes de $\mathfrak{p}$ est premier; donc, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier divisoriel de R qui rencontre S, il est homogène puisqu'il est de hauteur 1; ainsi le groupe G de la formule (1) s'identifie à $DH(R)$. D'autre part, on a $G\cap P(R)=PH(R)$, car, si un idéal homogène de R est principal, il admet un générateur homogène (considérer la composante homogène de plus bas degré d'un générateur quelconque de cet idéal). Notre assertion résulte alors de la formule (1).

Remarque. — Supposons que R soit l'anneau de coordonnées homogènes d'une variété algébrique projective, projectivement normale V. La proposition 4 montre que le groupe $C(R)$ a la signification géométrique suivante : il s'identifie au quotient du groupe des diviseurs sur V (= cycles de codimension 1) par le sous-groupe des intersections complètes, c'est-à-dire au groupe d'holotomie global de V ([13]). La proposition suivante est la généralisation algébrique du fait suivant : si l'on fait choix d'un hyperplan H à l'infini tel que $V.H$ soit irréductible, les groupes d'holotomie de V et de la variété affine $V - V.H$ sont canoniquement isomorphes. Comme les autres résultats du présent paragraphe, cette proposition est « bien connue » (*voir* par exemple, [1], pour un énoncé dans le cas géométrique).

Proposition 5. — *Soient R un anneau de Krull gradué, p un élément premier non nul de R_1, et A le sous-anneau du corps des fractions de R engendré sur R_0 par les éléments $p^{-d(a)}a$, où a parcourt l'ensemble des éléments homogènes non nuls de R. Alors les groupes $C(R)$ et $C(A)$ sont canoniquement isomorphes.*

Comme p est transcendant sur A (noter que les éléments de A sont de degré o dans $S^{-1}R$, où S l'ensemble des éléments homogènes de A), $C(A)$ est isomorphe à $C(A[p])$ (prop. 3), et donc à $C(A[p, p^{-1}])$ (prop. 2). On voit aisément qu'on a $R[p^{-1}]=A[p,p^{-1}]$. Comme $C(R[p^{-1}])$ est isomorphe à $C(R)$ (prop. 2), notre assertion est démontrée.

Montrons enfin que le groupe d'holotomie global d'une variété projective projectivement normale V est isomorphe au groupe d'holotomie local du sommet de son cône projetant. Plus généralement :

Proposition 6. — *Soit $R=R_0+R_1+\ldots+R_n+\ldots$ un anneau de Krull gradué à degrés positifs tel que R_0 soit un corps; notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal $R_1+\ldots+R_n+\ldots$. Alors l'homomorphisme de $C(R)$ sur $C(R_{\mathfrak{m}})$ est bijectif.*

Il suffit de montrer que les éléments de R-$\mathfrak{m}$ sont des produits d'éléments premiers (prop. 2). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier divisoriel de R; notons S l'ensemble des éléments homogènes non nuls de R; on a vu, dans la démonstration de la proposition 4, que les assertions « $\mathfrak{p}$ est homogène » et « $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ » sont équivalentes. Si $\mathfrak{p} \cap (R\text{-}\mathfrak{m}) \neq \emptyset$, $\mathfrak{p}$ ne peut être homogène (sinon un de ses générateurs homogènes devrait être de degré 0, donc inversible), donc $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, et $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal premier (nécessairement principal) de l'anneau principal $S^{-1}R$. Soit x un générateur de $S^{-1}\mathfrak{p}$, qu'on peut supposer de la forme $x = 1 + x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_j \in (S^{-1}R)_j$. Or $\mathfrak{p}$ contient un élément a de la forme $1 + a_1 + \ldots + a_q (a_j \in R_j)$. Exprimant que a est un multiple de x dans $S^{-1}R$, on obtient une relation de la forme

$$1 + a_1 + \ldots + a_q = (1 + x_1 + \ldots + x_n)(1 + y_1 + \ldots + y_{n-q}).$$

Adjoignant une indéterminée T, il vient

$$\begin{aligned} &T^q + a_1 T^{q-1} + \ldots + a_q \\ &\quad = (T^n + x_1 T^{n-1} + \ldots + x_n)(T^{n-q} + y_1 T^{n-q-1} + \ldots + y_{n-q}), \end{aligned}$$

Or un résultat de KRONECKER (*cf.* [19], n° 45, p. 125) montre que, si le produit de deux polynomes unitaires sur le corps des fractions d'un anneau intégralement clos R a ses coefficients dans R, il en est de même des facteurs. On a donc $x \in R$, $x_j \in R_j$ et $x \in \mathfrak{p}$. Tout élément $b = b_r + b_{r+1} + \ldots b_{r'}$ $(b_j \in R_j)$ de $\mathfrak{p}$ étant dans $S^{-1}Rx$, on a

$$b_r + b_{r+1} + \ldots + b_{r'} = (1 + x_1 + \ldots + x_n)(z_r + z_{r+1} + \ldots + z_{r'-n})$$

avec

$$z_j \in (S^{-1}R)_j.$$

Comparant les composantes homogènes, on obtient

$$z_r = b_r,\ z_{r+1} = b_{r+1} - z_r x_1,\ \ldots,$$

d'où $z_j \in R$ pour tout j *par récurrence sur* j. On a ainsi montré que $\mathfrak{p}$ est l'idéal principal Rx. Par conséquent, étant donné un élément c de $R - \mathfrak{m}$, les idéaux premiers divisoriels contenant c sont principaux, ce qui montre aussitôt que c est un produit d'éléments premiers. Ceci achève la démonstration.

On peut aussi utiliser la proposition 4 et montrer que si $\mathfrak{a}$ est un idéal divisoriel *homogène* tel que $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{m}}$ soit principal, alors $\mathfrak{a}$ est principal.

3. Adjonction d'indéterminées, et sections hyperplanes génériques. —
Les résultats du présent paragraphe sont inspirés par des lemmes qu'on trouve chez ANDREOTTI ([1]). Étant donné un anneau *local* A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et des indéterminées $X_1, \ldots, X_n$, nous noterons $A(X_1, \ldots, X_n)_{\text{loc}}$ l'anneau local $(A[X_1, \ldots, X_n])_{\mathfrak{m}A[X_1, \ldots X_n]}$. Cette adjonction d'indéterminées à un anneau local est commutative et associative; elle permute au passage aux quotients; elle conserve dimensions et multiplicités; pour que A soit régulier (resp. intégralement clos, intègre), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $A(X_1, \ldots, X_n)_{\text{loc}}$. La vérification de ces assertions ne présente pas de

difficultés, et est laissée au lecteur. Notons que, par transitivité de la platitude, $B = A(X_1, \ldots, X_n)_{loc}$ est plat sur A (²).

Proposition 7. — *Soit A un anneau de Krull local. L'homomorphisme canonique de $C(A)$* dans $C(A(X_1, \ldots, X_n)_{loc})$ *est bijectif.*

On se ramène aussitôt au cas $n = 1$. D'après la proposition 2, il s'agit de montrer que tout élément de $S = A[X] - \mathfrak{m}A[X]$ est produit d'éléments premiers. Soient K le corps des fractions de A, $a(X)$ un élément de S, $b(X)$ et $c(X)$ deux polynomes sur K tels que $a(X) = b(X)\,c(X)$. Notant $I(a)$, $I(b)$, $I(c)$ les idéaux fractionnaires de A engendrés par les coefficients de a, b, c, le résultat de Kronecker cité dans la démonstration de la proposition 6 montre, puisque $I(a) = A$, qu'on a $I(a) = I(b)\,I(c)$. Les idéaux $I(b)$, $I(c)$ sont ainsi inversibles, donc principaux puisqu'un module projectif sur un anneau local est libre. Mettant en facteur dans $b(X)$ [resp. $c(X)$] un générateur de $I(b)$ [resp. $I(c)$], on voit qu'on peut supposer que $b(X)$ et $c(X)$ appartiennent à S. Ainsi $a(X)$ est un produit d'éléments $p_i(X)$ *de S* qui sont des polynomes irréductibles sur K. D'après la structure des valuations essentielles de $A[X]$ ([22], chap. VI, § 13, th. 29), chaque $p_i(X)$ est d'ordre o pour toutes ces valuations essentielles sauf une, pour laquelle il est d'ordre 1 ; donc $p_i(X)$ engendre l'idéal premier divisoriel correspondant à cette dernière valuation, et est par suite un élément premier de $A[X]$.

C. Q. F. D.

Généralisant la terminologie usuelle, nous dirons que deux éléments non nuls a, b d'un anneau intègre A sont *étrangers* si $Aa \cap Ab = Aab$. Si a et b sont étrangers, il en est de même de a^n et b^q pour tous n, $q \in N$ (récurrence facile sur n et q). Un élément premier p est étranger à tout élément $a \notin Ap$.

Proposition 8. — *Soient A un anneau intègre, a et b des éléments étrangers de A. Alors $aX + b$ est un élément premier de l'anneau de polynomes $A[X]$. Si, de plus, A est un anneau de Krull, et si les idéaux Aa et $Aa + Ab$ sont premiers, l'anneau $A' = A[X]/(aX + b)$ est un anneau de Krull, et les groupes $C(A)$ et $C(A')$ sont canoniquement isomorphes.*

Soient K le corps des fractions de A, et h le A-homomorphisme de $A[X]$ dans K tel que $h(X) = -b/a$. Il est clair que tout multiple de $aX + b$ appartient à $\mathrm{Ker}(h)$. Inversement, montrons par récurrence sur le degré que, si un polynome $P(X)$ vérifie $h(P) = P(-b/a) = 0$, c'est un multiple de $aX + b$. C'est évident, si $d^0(P) = 0$. Si $P(X) = cX^n + \ldots$ $(n > 0)$, la relation $P(-b/a) = 0$ montre que a divise $b^n c$ dans A ; on a donc $c = da$ avec $d \in A$ puisque a est étranger à bn. Alors le polynome

$$P'(X) = P(X) - dX^{n-1}(aX + b)$$

(²) Il est même fidèlement plat sur A, ce qui démontre aisément l'injectivit de $C(A) \to C(B)$.

appartient au noyau de h et est de degré $\leqq n-1$. Par récurrence on a $P'(X) \in (aX+b)$, et donc $P(X) \in (aX+b)$. Ainsi $(aX+b) = \mathrm{Ker}(h)$, ce qui montre bien que $aX+b$ est premier.

Il résulte de ceci que A' est isomorphe à $R = A[b/a]$. Ainsi R/Ra s'identifie à $A[X]/(aX+b, a) = A[X]/(a, b) = (A/(Aa+Ab))[X]$, et est donc intègre sous les hypothèses de la seconde assertion; donc a est premier dans R; il est aussi premier dans A par hypothèse. Posons

$$R' = A[a^{-1}] = R[a^{-1}].$$

C'est un anneau de Krull et $C(R')$ est isomorphe à $C(A)$ (prop. 2). D'après la remarque 2 suivant la proposition 2, R est un anneau de Krull. La proposition 2 montre alors que $C(R)$ est isomorphe à $C(R')$. C. Q. F. D.

Remarques :

1. Supposons que l'anneau de Krull A soit nœthérien, et que a et b soient des éléments non nuls du radical $\mathfrak{r}$ de A. L'hypothèse que $Aa+Ab$ est un idéal premier de hauteur $\neq 1$ (et donc nécessairement égale à 2) *implique* que a et b sont des éléments premiers (nécessairement non associés, et donc étrangers). En effet notons d'abord que a et b sont étrangers, puisque aucun idéal premier associé de Aa (qui est de hauteur 1) ne peut contenir b. Posons $\mathfrak{p} = Aa + Ab$, et montrons que $xy \in Ab$ et $y \notin \mathfrak{p}$ impliquent $x \in Ab$; d'après le lemme de Nakayama, il suffit de prouver que $x \in Ab + Aa^j$ pour tout j; on procède par récurrence sur j, le cas $j=1$ résultant de ce que $\mathfrak{p}$ est premier; en général, on a $x \in \mathfrak{p}$, soit $x = x'a + x''b$; la relation $xy \in Ab$ implique alors $x'ya \in Ab$, d'où $x'y \in Ab$ (car a et b sont étrangers), et $x' \in Ab + Aa^{j-1}$ par l'hypothèse de récurrence; on a donc bien $x \in Ab + Aa^j$. Montrons enfin que $xy \in Ab$ implique que x ou y est dans Ab; d'après ce qui vient d'être vu, on peut se borner au cas où $x, y \in \mathfrak{p}$, soit $x = x'a + x''b$ et $y = y'a + y''b$; comme a^2 est premier à b, on a alors $x'y' \in Ab$; si x' ou y' est en dehors de $\mathfrak{p}$, par exemple y', on a $x' \in Ab$ et $x \in Ab$; on peut donc supposer que x' et y' sont dans $\mathfrak{p} = Aa + Ab$, et x, y sont alors dans $Ab + Aa^2$; par applications répétées on voit que, soit x ou y est dans Ab, soit qu'on a $x, y \in Ab + Aa^j$ pour tout j; dans ce dernier cas on a $x, y \in Ab$ par le lemme de Nakayama.

2. Soient X, Y deux indéterminées; si a et b sont des éléments étrangers de l'anneau A, on voit, comme dans la proposition 8, que $aX + bY$ est un élément premier de $A[X, Y]$. De plus, si Aa et $Aa+Ab$ sont premiers, les groupes de classes $C(A)$ et $C(A[X, Y]/(aX+bY))$ sont *isomorphes*; ceci résulte de la proposition 8 et de la proposition 5 sur « le passage de l'affine au projectif ». Notons que l'anneau $A' = A[X, Y]/(aX+bY)$ est gradué; lorsque a et b sont étrangers, $(aX+bY)$ est le noyau de l'homomorphisme $P(X, Y) \rightarrow P(bT, -aT)$; le A-module A'_n des éléments homogènes de degré n de A' est donc alors isomorphe à l'idéal $(Aa+Ab)^n$

(A' étant alors isomorphe au sous-anneau $\sum_{n=0}^{\infty}(Aa+Ab)^n T^n$ de $A[T]$, utilisé dans la démonstration du lemme d'Artin-Rees). Supposons maintenant, comme dans la proposition 8, que l'idéal $\mathfrak{g}=Aa+Ab$ soit *premier*, et identifions A' à $\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{g}^n T^n$; comme (a, b) est une A-suite, on voit aisément que la fonction d'ordre v associée à la filtration $(\mathfrak{g}^n)$ de A est une valuation de A; la fonction v' sur $A[T]$ définie par $v'\left(\sum_j x_j T^j\right)=\min_j(v(x_j)-j)\,(x_j\in A)$ est, classiquement, une valuation de $A[T]$; si $R_{v'}$ désigne son anneau, on a, par définition de v', $A'=R_{v'}\cap A[T]$ (ce qui redémontre d'ailleurs que A' est un anneau de Krull); enfin le centre de v' sur A' est le noyau de l'homomorphisme canonique de A' sur l'anneau gradué $\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{g}^n/\mathfrak{g}^{n+1}$.

Une conjecture. — Soient A un anneau nœthérien local intégralement clos, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, et $\mathfrak{g}=Aa+Ab$ un idéal premier de hauteur 2 de A; posons $A'=A[X]/(aX+b)$ [resp. $A'=A[X, Y]/(aX+bY)$]. Les propositions 7 et 8 laissent à penser que les groupes de classes $C(A)$ et $C(A'_{\mathfrak{m}_{A'}})$ des anneaux *locaux* A et $A'_{\mathfrak{m}_{A'}}$ sont canoniquement isomorphes. La proposition 8 (resp. la remarque 2) montrent en tous cas qu'on a un épimorphisme du premier sur le second; d'après la proposition 2 (§ 1) et la remarque 3 la suivant, cette conjecture revient à dire que les éléments de $A'-\mathfrak{m}A'$ sont produits d'éléments premiers. On voit aisément que ceci équivaut à : soit $F(X, Y)$ un polynome homogène sur A dont les coefficients ne sont pas tous dans $\mathfrak{m}$; montrer que $F(b, -a)$ est un produit d'éléments premiers dans A.

On peut montrer qu'un tel élément $F(b, -a)$ est étranger à tout élément de $A-\mathfrak{g}$; ses idéaux premiers associés sont donc tous contenus dans $\mathfrak{g}$. On pourrait songer à utiliser ici le fait que $A_{\mathfrak{g}}$ est un anneau local régulier de dimension 2, donc un anneau factoriel, mais ça ne paraît pas suffisant.

Si notre conjecture était vraie, on aurait puisque $\dim(A'_{\mathfrak{m}_{A'}})=\dim(A)-1$, un moyen de déterminer (au moins dans certains cas) le groupe des classes d'un anneau local nœthérien intégralement clos *par récurrence sur la dimension*. Par exemple, on pourrait montrer sans homologie que tout anneau local régulier est factoriel (*voir* [2] pour une démonstration homologique) :

Démonstration conditionnelle de la factorialité des anneaux locaux réguliers. — Soient A un anneau local régulier, et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal Rappelons ([22], chap. VIII, § 11) que, pour tout élément x de $\mathfrak{m}-\mathfrak{m}^2$, A/Ax est un anneau local régulier de dimension $\dim(A)-1$, et que des éléments de $\mathfrak{m}$ linéairement indépendants mod $\mathfrak{m}^2$ engendrent un idéal premier.

Procédant par récurrence sur $\dim(A)$, on peut supposer $\dim(A) \geqq 2$ Prenons a, $b \in \mathfrak{m}$ linéairement indépendants mod $\mathfrak{m}^2$, et formons

$$A_1 = A(X)_{\text{loc}}/(aX + b).$$

Comme $A(X)_{\text{loc}}$ est régulier, et que $aX + b$ n'est pas dans le carré de son idéal maximal, A_1 est régulier, donc factoriel d'après l'hypothèse de récurrence. Notre conjecture montre que $C(A)$ et $C(A_1)$ sont isomorphes, donc que $C(A) = 0$, et A est factoriel.

Remarque. — On sait qu'un anneau local régulier A est un anneau de Macaulay ([22], App. 6), *Si* l'on montrait que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A est parfait (ceci veut dire que $A/\mathfrak{p}$ est un anneau de Macaulay), on en déduirait une autre démonstration [par récurrence sur $\dim(A)$] de la factorialité de A (3). On a en effet le lemme suivant :

Lemme. — *Soient A un anneau local intègre et nœthérien, $\mathfrak{p}$ un idéal premier parfait de hauteur 1 de A, et c un élément de A tel que A/Ac soit factoriel. Alors $\mathfrak{p}$ est principal.*

Aucune difficulté si $c \in \mathfrak{p}$: si $c = 0$, A est factoriel; si $c \neq 0$, $\mathfrak{p} = Ac$. Si $c \notin \mathfrak{p}$, $(\mathfrak{p} + Ac)/\mathfrak{p}$ est équidimensionnel de hauteur 1, donc $\mathfrak{p} + Ac$ est équidimensionnel de hauteur 2, et $(\mathfrak{p} + Ac)/Ac$ est équidimensionnel de hauteur 1. Comme A/Ac est factoriel, ce dernier idéal est principal; on peut donc écrire $\mathfrak{p} + Ac = Ad + Ac$ avec $d \in A$, et même supposer qu'on a $d \in \mathfrak{p}$. Tout élément x de $\mathfrak{p}$ s'écrit alors $x = uc + vd (u, v \in A)$; on a $uc \in \mathfrak{p}$, d'où $u \in \mathfrak{p}$, $x \in Ad + \mathfrak{p}c$ et $\mathfrak{p} = Ad + \mathfrak{p}c$. Comme c est contenu dans le radical de A, on en déduit $\mathfrak{p} = Ad$ en vertu du lemme de Nakayama.

C. Q. F. D.

On notera qu'on a seulement utilisé le fait que tout idéal principal de $A/\mathfrak{p}$ est équidimensionnel. Le lemme montre, sans plus, que tout anneau local régulier *de dimension* 2 est factoriel (prendre $c \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, $c \notin \mathfrak{p}$).

4. Modules projectifs sur certains anneaux factoriels. — Il est classique que, sur un anneau factoriel A, un module projectif de rang 1 (c'est-à-dire un idéal inversible) est libre (c'est-à-dire principal). On peut se demander si ce résultat se généralise aux modules projectifs de rang fini quelconque. La réponse est affirmative si A est principal ou est un anneau de polynomes à une variable sur un anneau principal ([19]), en particulier si A est un anneau de polynomes à deux variables sur un corps; par contre le problème reste ouvert pour les anneaux de polynomes à $n \geqq 3$ variables. Voir [18] pour l'interprétation en termes de fibrés à fibre vectorielle. Nous allons donner ici un exemple d'anneau factoriel A qui admet un module projectif de rang 2 et non libre.

(3) Ceci résulterait aussi des relations entre dimension homologique et codimension; mais le lemme en dit un peu plus.

Dans ce qui suit, k désigne un corps de caractéristique $\neq 2$ A l'anneau $k[X, Y, Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$, x, y, z les images de X, Y, Z dans A, et M le module engendré par trois générateurs dx, dy, dz liés par la relation $xdy+ydy+zdz=0$.

Proposition 9. — *Pour que A soit factoriel, il faut et il suffit que -1 ne soit pas un carré dans k.*

Si $-1=i^2$ avec $i\in k$, on a $(x+iy)(x-iy)=(1+z)(1-z)$, d'où l'on déduit sans peine que A n'est pas factoriel. Si -1 n'est pas un carré, $A/(z-1)$, qui est isomorphe à $k[X, Y]/(X^2+Y^2)$, est intègre, de sorte que $z-1$ est un élément premier de A. Posant $t=(z-1)^{-1}$, on a $z+1=-t(x^2+y^2)$, d'où $A[t]=k[x, y, t]$; comme $z=1+t^{-1}$, la relation $x^2+y^2+z^2=1$ donne $2t+1=-t^2(x^2+y^2)$, d'où $k[x,y,t]=k[xt,yt][t^{-1}]$; ainsi $k[x,y,t]$ est un anneau de fractions de $k[xt, yt]$, qui est un anneau de polynomes à deux variables; donc $k[x, y, t]$, est factoriel. Le corollaire à la proposition 2 montre alors que A lui-même est factoriel.

Proposition 10. — *Le A-module M est projectif. De plus :*

a. Si k est ordonnable, M n'est pas libre;

b. Si -1 est un carré dans k, M est libre.

Comme les éléments $(0, z, -y)$, $(-z, 0, x)$ et $(y, -x, 0)$ de A^3 vérifient $x(0, z, -y)+y(-z, 0, x)+z(y, -x, 0)=0$, on a un homomorphisme u de M dans A^3 tel que $u(dx)=(0, z, -y)$, $u(dy)=(-z, 0, x)$ et $u(dz)=(y, -x, 0)$. Soit v l'homomorphisme de A^3 dans M défini par $v(a, b, c)=a(ydz-zdy)+b(zdx-xdz)+c(xdy-ydx)$. On vérifie aussitôt que $v\circ u$ est l'identité sur M. Donc M s'identifie à un facteur direct de A^3, et est projectif. Son rang est évidemment 2. Il s'identifie à $A(0, z, -y)+A(-z, 0, x)+A(y, -x, 0)$. Comme la forme linéaire f sur A^3 définie par $f(a, b, c)=ax+by+cz$ est nulle sur M, et que A^3/M est un module sans torsion de rang 1, M est exactement le noyau de f; d'autre part, puisque $x^2+y^2+z^2=1$, on a $f(A^3)=A$. Ceci montre que le module $M\times A$ *est isomorphe à* A^3; autrement dit, M est librement équivalent à un module libre ([14]), ou est de classe nulle ([18]).

Démontrons maintenant a. Lorsque k est le corps des nombres réels, M est alors le A-module des sections du fibré tangent à la sphère $\mathbf{S}_2$, et ce fibré n'est pas trivial (sinon il existerait des champs de vecteurs continus et nulle part nuls sur $\mathbf{S}_2$); donc M n'est pas libre. Ce résultat s'étend à un corps ordonné maximal quelconque k, soit en utilisant un résultat de Logique dû à Tarski ([21]), soit en appliquant les résultats de Habicht ([8], Satz 12). Comme tout corps ordonnable peut être plongé dans un corps ordonné maximal ([4], chap. VI, § 2, th. 2), le cas général s'ensuit.

Pour démontrer b, nous montrerons plus généralement que, comme me l'a fait remarquer J. P. Serre, si $A=k[X, Y, Z]/(Q(X, Y, Z)-1)$ où Q

est une forme quadratique non dégénérée qui représente o, le sous A-module M formé par des éléments (a, b, c) de A^3 qui vérifient $aQ'_x + bQ'_y + cQ'_z = 0$ (correspondant au fibré tangent) est libre. En effet, par changement de variables, on peut supposer que $Q = XY + rZ^2 (r \in k)$; l'équation de M dans A^3 est alors $ya + xb + 2rzc = 0$. Les vecteurs $e' = (-2rz, 0, y)$ et $e'' = \left(-x^2, 1, \frac{1}{2} xz\right)$ appartiennent à M, et les composantes $(-y, -x, -2rz)$ de leur produit extérieur engendrent l'idéal unité. Il existe donc $e \in A^3$ tel que $\det(e', e'', e) = 1$, et (e', e'', e) est ainsi une base de A^3. Comme M est de rang 2, il est nécessairement engendré par e' et e''; il est donc libre.

Remarque. — On peut aussi démontrer la proposition 9 en remarquant que la surface algébrique $(x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0)$ est une quadrique, et qu'un diviseur sur celle-ci est une intersection complète si, et seulement si, il a même nombre d'intersection avec les génératrices des deux systèmes. De plus, comme il existe une infinité de couples de génératrices « complexes-conjuguées » sur k appartenant à des systèmes distincts, tout diviseur rationnel sur k est une intersection complète.

5. Séries formelles sur un anneau factoriel. — Pour construire des anneaux A tels que l'anneau de séries formelles $A[T]]$ ne soit pas factoriel, nous utiliserons encore le résultat suivant ([15], th. 4.1) :

Proposition 11. — *Soient A un anneau intègre, x, y, z trois éléments non nuls de A, et i, j, k trois entiers naturels. On suppose que x est premier, que x et y sont étrangers, et qu'on a $z^{i-1} \notin Ax + Ay$, $z^i \in Ax^j + Ay^k$ et $ijk - ij - jk - ki \geq 0$. Alors A [[T]] n'est pas factoriel.*

Dans ce qui suit, nous noterons k un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$, B l'anneau de polynomes $k[x, y]$, et prendrons pour A un anneau de la forme $A = B[z]$ où z vérifie une équation de la forme $z^p = x^i + y^j$. Voyons d'abord à quelle condition A est factoriel (cette condition paraît d'ailleurs bien classique) :

Proposition 12. — *Soient B un anneau factoriel de caractéristique $p \neq 0$, et f un élément extrémal de B. On pose $A = B[z]$ où $z^p = f$ (de sorte que* A *est intègre)* (4). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est factoriel;*

(*b*) *pour tout élément $a = a_0^p + a_1^p f + \ldots + a_{p-1}^p f^{p-1}$ de A^p, tel que les a_i soient des éléments étrangers de B, tout diviseur (dans B) de a est associé à un élément de A^p.*

Soit P un système représentatif d'éléments extrémaux de B, et soit P' l'ensemble des $c \in P$ qui sont associés à des éléments de A^p; on peut supposer $P' \subset A^p$; posons $P'' = P - P'$.

---

(4) Plus précisément, on a $A = B[T]/(T^p - f)$.

Montrons que (b) implique (a). Notons P'_1 l'ensemble des $c^{1/p}$ où $c \in P'$; on a $P'_1 \subset A$; posons $P_1 = P'_1 \cup P''$. Nous allons montrer que tout élément de A s'écrit, d'une façon et d'une seule, sous forme d'un produit d'éléments de P_1 (à une unité près); ceci impliquera que A est factoriel. Pour $x \in A$, écrivons $x^p = d^p\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i^p f^i\right)$ où d, $a_i \in B$, et où les a_i sont étrangers. L'élément $\sum_{i=0}^{p-1} a_i^p f^i$ est produit d'éléments extrémaux de la même forme [par (b)], c'est-à-dire d'éléments de P'; sa racine $p^{\text{ième}}$ est alors produit de éléments correspondants de P'_1; comme d est produit d'éléments de P, c'est aussi un produit d'éléments de P_1; d'où l'existence de la décomposition de x. Pour l'unicité, écrivons $x = (\text{unité}), \prod_{u \in P'_1} u^{n(u)} . \prod_{w \in P''} w^{q(w)}$; élevant à la puissance $p^{\text{ième}}$, on voit que $n(u)$ est l'exposant de $u^p (u^p \in P')$ et $p.q(w)$ celui de w dans la décomposition $x^p (x^p \in B)$; d'où notre conclusion puisque B est factoriel.

Montrons, inversement, que (a) implique (b). A cause de la pure inséparabilité, il y a un seul idéal premier de A au-dessus d'un idéal premier donné $\mathfrak{q}$ de B (formé par les $x \in A$ tels que $x^p \in \mathfrak{q}$); donc, dans A, un élément c de P, ou bien reste extrémal (cas où $c \in P''$), ou bien est puissance $p^{\text{ième}}$ d'un élément extrémal de A (cas où $c \in P'$). Les éléments de $P'_1 \cup P''$ forment donc un système représentatif d'éléments extrémaux de A. Un élément x de A tel que $x^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i^p f^i$, où les a_i sont des éléments étrangers de B, ne peut avoir de facteur extrémal dans P''; il est donc produit d'éléments de P'_1, et x^p est produit d'éléments de P'. Ainsi tout diviseur (dans B) de x^p est associé à un produit d'éléments de P', c'est-à-dire un élément de A^p.

C. Q. F. D.

Remarque. — La proposition 12 s'étend à la situation plus générale suivante : B est un anneau factoriel quelconque contenant les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et l'on a $A = B(z)$ où z^n est un élément extrémal f de B; dans (b) au lieu des éléments de A^p, on considère les *normes* d'éléments de A. La démonstration est basée sur le même principe. Le résultat est bien connu pour $B = \mathbf{Z}$ et $n = 2$.

Ceci étant, prenons $B = k[x, y]$ avec k parfait de caractéristique p. Comme les éléments inversibles de B sont des puissances $p^{\text{ièmes}}$, on peut barrer le « associé à » dans le (b) de la proposition 12. On prendra f de la forme $c^p x + d^p y$, avec c, $d \in B$. Notons D_x et D_y les dérivations partielles dans B; la *dérivation* $D = d^p D_x - c^p D_y$ est nulle en f, donc sur A^p; comme $D^p = 0$, son noyau est un sous-corps L du corps des fractions K de B

tel que $[K:L]=p$, et est donc le corps des fractions de A^p. Comme f est irréductible, c et d sont étrangers dans B, donc, d'après le critère jacobien, la surface $(z^p = c^p x + d^p y)$ n'a que des points singuliers isolés; comme elle est définie par une seule équation, elle est donc normale; autrement dit, l'anneau A est *intégralement clos*. Tout élément b de $L \cap B$ s'écrit $b=(x/y)^p$ avec x, $y \in A$, de sorte que x/y est entier sur A et appartient à A; on a donc $L \cap B = A^p$. Ainsi les éléments de A^p sont *caractérisés comme étant les éléments u de B tels que $D(u)=0$*. D'après la proposition 12, il s'agit de trouver des couples (c, d) tels que, si u est un élément de B vérifiant $D(u)=0$, et si $u=\sum_{i=0}^{p-1} b_i^p f^i$ avec les $b_i \in B$ étrangers, alors tout diviseur extrémal b de u vérifie $D(b)=0$. Si u est une puissance b^j de b, on a $j<p$ (sinon les b_i ne seraient pas étrangers), et la relation $0=D(u)=jb^{j-1}D(b)$ implique $D(b)=0$. Il s'agira donc de voir que, si u [vérifiant $D(u)=0$] est un produit de deux facteurs *étrangers* v, w, on a $D(v)=D(w)=0$. Or on a $0=D(vw)=v\,D(w)+w\,D(v)$, et il existe donc t dans B tel que $D(v)=tv$ et $D(w)=-tw$. Or, d'après Barsotti ([3], p. 59) ou Cartier [7], chap. 2, formule (42′), p. 203), on a

$$D^{p-1}(v^{-1}D(v)) = v^{-1}D^p(v) - (v^{-1}D(v))^p;$$

comme, ici, $D^p=0$, on a

$$D^{p-1}(t)+t^p=0.$$

Il suffira donc de trouver des couples (c, d) tels que la relation

$$D^{p-1}(t)+t^p=0$$

$(t \in B)$ implique $t=0$. Nous allons en donner deux exemples :

Proposition 13. — *Soit k un corps parfait de caractéristique $p \geq 3$. L'anneau $A=k[x, y, z]$ où $z^p = x^{p+1}+y^{2p+1}$ est factoriel, mais l'anneau de séries formelles $A[[T]]$ ne l'est pas.*

La non-factorialité de $A[[T]]$ vient de la proposition 11 (l'inégalité portant sur les exposants est vérifiée pour $p \geq 3$). Il s'agit donc de montrer que $D^{p+1}(t)+t^p=0$ ($t \in k[x, y]$) implique $t=0$. On a ici $D=y^{2p}D_x - x^p D_y$. Tout élément u de $B=k[x, y]$ s'écrit, de façon unique sous la forme $u=\sum_{0 \leq i, j \leq p-1} u_{ij}^p x^i y^j$ ($u_{ij} \in B$). La dérivation D abaisse $i+j$ d'une unité; cette somme va de 0 à $2p-2$. Posant $t=\sum_{i,j} t_{ij}^p x^i y^j$, les seuls termes de t que D^{p-1} transforme en une puissance $p^{\text{ième}}$ sont ceux pour lesquels $i+j \leq p-1$; les termes pour lesquels $i+j \leq p-2$ donnent 0. Un calcul simple montre que $D^{p-1}(x^i y^{p-1-j}) = (-1)^{i+1} x^{p(p-1-i)} y^{2pi}$. Comparant $-t^p$

et la somme des termes de $D^{p-1}(t)$ qui sont des puissances $p^{\text{ièmes}}$, et posant $t_i = t_{i,\,p-1-i}$ ($i = 0, \ldots, p-1$), on obtient

$$(2) \qquad t = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i t_i x^{p-1-i} y^{2i}.$$

Soit q le maximum des degrés totaux des polynomes t_i. Comme aucune simplification ne peut s'opérer entre termes $t_{ij}^p x^i y^j$ distincts, on a $d^0(t) \geqq pq + p - 1$. D'autre part (2) montre que $d^0(t) \leqq q + 2(p-1)$. D'où $pq + p - 1 \leqq q + 2(p-1)$, qui équivaut à $q \leqq 1$. On a donc

$$t_i = a_i + b_i x + c_i y, \qquad \text{avec} \quad a_i,\ b_i,\ c_i \in k.$$

Comparant les termes de degré total $p-1$ et $2p-1$ des deux membres de (2), il vient

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} a_i^p x^i y^{p-1-i} = a_0 x^{p-1},$$

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x + c_i y)^p x^i y^{p-1-i} = (b_{p-1} x + c_{p-1} y) y^{2p-2}.$$

Il résulte de (3) qu'on a $a_i = 0$ pour $i \neq p-1$, et $a_{p-1}^p = a_0 = 0$; les a_i sont donc tous nuls. Comme $2p - 2 > p - 1$, (4) montre que les b_i sont tous nuls; de même les c_i pour lesquels $2p - 1 - i < 2p - 2$, c'est-à-dire $i > 1$; comme $p \geqq 3$, on a ainsi $b_{p-1} = c_{p-1} = 0$; de (4) il reste alors

$$c_0^p y^{2p-1} + c_1^p x y^{2p-2} = 0,$$

qui implique $c_0 = c_1 = 0$. Ainsi les t_i sont tous nuls, et par (2) on en déduit $t = 0$. C. Q. F. D.

PROPOSITION 14. — *Soient k un corps parfait de caractéristique 2, et j un entier non congru à 1 modulo 3. Alors l'anneau $A = k[x, y, z]$, où $z^2 = x^3 + y^{2j+1}$, est factoriel, tandis que, pour $j \geqq 3$, l'anneau de séries formelles $A[[T]]$ ne l'est pas.*

L'hypothèse $j \not\equiv 1 \pmod 3$ équivaut à $2j + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$, rend les exposants étrangers deux à deux, et montre ainsi que x, y, z sont premiers dans A. Pour $j \geqq 3$, l'inégalité de la proposition 11 est vérifiée, et donc $A[[T]]$ n'est pas factoriel. On a ici $c = x$, $d = y^j$, et $D = y^{2j} D_x - x D_y$. Pour t dans $B = k[x, y]$, écrivons $t = t_1^2 + t_2^2 x + t_3^2 y + t_4^2 xy$ avec $t_i \in B$. La relation $D(t) + t^2 = 0$ équivaut alors à $t_4 = 0$ et $t = x t_3 + y^j t_2$. Nous allons montrer que ceci implique $t = 0$.

Écrivons $t_1 = \sum_n a_n x^n$, $t_2 = \sum_n b_n x^n$ et $t_3 = \sum_n a_n x^n$, avec a_n, b_n, $c_n \in k[y]$.

Comparant les termes en x^{2n} et en x^{2n+1} dans $t_1^2 + t_2^2 x + t_3^2 y$ et dans $x t_3 + y^j t_2$, il vient

$$(5) \qquad a_n^2 + y c_n^2 = c_{2n-1} + y^j b_{2n}, \qquad b_n^2 = c_{2n} + y^j b_{2n+1}.$$

Soit d le maximum des degrés de t_1, t_2, t_3 par rapport à x. Si $d < 2d - 1$, on a [par (5)] $a_d^2 + y c_d^2 = b_d^2 = 0$, d'où $a_d = b_d = c_d = 0$, ce qui est absurde. On a donc $d \geqq 2d - 1$, c'est-à-dire $d \leqq 1$, et les relations (5) se réduisent à

$$(6) \quad a_0^2 + y c_0^2 = y^j b_0, \qquad b_0^2 = c_0 + y^j b_1, \qquad a_1^2 + y c_1^2 = c_1, \qquad b_1^2 = 0.$$

Si $c_1 \neq 0$, on a $d^0(a_1^2 + y c_1^2) \geqq 1 + 2d^0(c_1) > d^0(c_1)$, ce qui contredit (6). On a donc $c_1 = 0$, d'où $a_1 = 0$; comme $b_1 = 0$, et que $c_0 = b_0^2$, (6) se réduit à

$$(7) \qquad a_0^2 + y b_0^4 = y^j b_0.$$

Il va nous suffire de montrer que (7) implique $a_0 = b_0 = 0$.

Pour cela nous procéderons par récurrence sur j. La relation (7) implique $y^j \mid a_0^2$ et $y^j \mid y b_0^4$. Soit k la partie entière de $(j-1)/4$. On a alors $y^k \mid b_0$ et $y^{2k} \mid a_0$. Posant $b_0 = y^k b$ et $a_0 = y^{2k} a$ (a, $b \in k[y]$), (7) donne

$$(7') \qquad a^2 + y b^4 = y^{j-3k} b.$$

La relation (7′) a la même forme que (7), l'exposant $j - 3k$ est incongru à 1 modulo 3, et il y a réduction d'exposant pour $j \geqq 5$. On est donc ramené au cas $j \leqq 4$, c'est-à-dire $j = 0$, 2 ou 3.

Si $j = 0$, et si $b_0 \neq 0$, (7) donne $1 + 4d^0(b_0) \leqq d^0(b_0)$, ce qui est absurde; on a alors $b_0 = 0$, d'où $a_0 = 0$.

Si $j = 2$ ou 3, y divise a_0, d'où $a_0 = ya$, $ya^2 + b_0^4 = y^{j-1} b_0$, et y divise b_0. D'autre part on a $1 + 4d^0(b_0) \leqq j + d^0(b_0) \leqq 3 + d^0(b_0)$; d'où $3d^0(b_0) \leqq 2$, et donc $d^0(b_0) = 0$. Comme y divise b_0, ceci implique $b_0 = 0$. D'où, par (7), $a_0 = 0$. C. Q. F. D.

Une méthode analogue à celle de la proposition 14 permet de montrer que, si k est un corps parfait de caractéristique 2, l'anneau

$$A = k[x, y, z]/(z^2 - x^5 - y^j)$$

est factoriel pour $j = 7$, 9, 11. La proposition 11 montre encore que $A[[T]]$ n'est pas factoriel.

Remarque sur les complétés. — Les propositions 13 et 14 donnent des exemples d'anneaux factoriels $A = k[x, y, z]$ tels que $A[[T]]$ ne soit pas factoriel. Dans ces exemples, on peut remplacer l'anneau affine A par l'anneau local $A_{(x,y,z)}$ de l'origine. On peut se demander si le *complété* de cet anneau local (qui intègre et intégralement clos, car l'origine est point singulier isolé sur la surface analytique $z^p = x^i + y^j$ lorsque celle-ci est irréductible et que i et j sont étrangers à p est factoriel). Nous allons voir que, dans plusieurs de ces exemples, la réponse est négative. Nous obtenons ainsi de nouveaux exemples d'anneaux locaux factoriels R tels que $\hat{R}$ (bien qu'intégralement clos) ne soit pas factoriel; d'autres tels exemples avaient été trouvés précédemment par Mori ([11]) et par l'auteur ([15]). D'autre part la non-factorialité de ces complétés laisse subsister la conjecture suivante : « si A est un anneau local *complet* factoriel, alors $A[[T]]$ est factoriel ».

Modifiant un peu les notations, les complétés à étudier sont de la forme $A=B[z]$, où $B=k[[x, y]]$ et où z vérifie $z^p=f\in B$. Pour voir que A n'est pas factoriel, nous utiliserons la proposition 12 et montrerons qu'il existe un élément de A^p à coefficients étrangers qui admet un diviseur qui n'est *associé* à aucun élément de A^p.

Prenons k parfait de caractéristique 2, et $z^2=x^3+y^7$ (*cf.* prop. 14). La méthode d'itération montre que, dans $k[[y]]$, il existe une série b, et une seule, telle que $b=1+yb^4$ (l'unicité, d'ailleurs inutile pour notre but, se démontre aussitôt par différence). Considérons la série $w=bx+y^2$. Le produit $b(x^3+b^2y^3x^2+by^5x+y^7)w$ est égal à $(b^2y^5+bx^2)^2+y^2(x^3+y^7)$, et est donc un élément de A^2 à coefficients étrangers. Montrons que w n'est associé à aucun élément de A^2. Utilisons la base $(1, x, y, xy)$ de B sur B^2 : on a $w=y^2+x+b^4xy$; à un carré inversible près (ce qui est inoffensif en vue de l'appartenance à A^2) tout élément inversible de B est de la forme $1+c^2x+d^2y+e^2xy (c, d, e\in B)$. Le produit de w et d'un tel élément est

$$(y+cx+b^2exy)^2+(yc+1+b^2dy)^2x$$
$$+(dy+ex+b^2cx)^2y+(ye+d+b^2)^2xy.$$

Pour que ce produit soit dans $A^2=B^2+B^2(x^3+y^7)$, il faut et il suffit qu'on ait $ye+d+b^2=0$ et $y^3(yc+1+b^2dy)=x(dy+ex+b^2cx)$. La seconde relation donne $y^3\in By^4+Bx$, ce qui est absurde.

Pour l'équation $z^2=x^3+y^{11}$ (toujours en caractéristique 2), on prend pour b l'unique solution (dans $k[[y]]$) de $b=1+b^4y^5$, et l'on pose $w=bx-y^2$. Si

$$t=(x+b^2y^7)^2x+(y^5+by^3x)^2y+(y^4)^2xy$$

on a

$$wt=(bx^2+b^2y^9)^2+y^2(x^3+y^{11}),$$

de sorte quc wt est un élément de A^2 à coefficients étrangers. Écrivant le produit $w(1+c^2x+d^2y+e^2xy)$ sous la forme $u_1^2+u_2^2x+u_3^2y+u_4^2xy$, on a $u_2=1+cy+db^2y^3$. Si un tel produit était dans $A^2+B^2+(x^3+y^{11})B^2$, on aurait $u_2y^5=u_3x$, et donc $y^5\in By^6+Bx$, ce qui est absurde. Par conséquent w n'est associé à aucun élément de A^2.

Une méthode analogue montre que (toujours en caractéristique 2), l'anneau complet $A=k[[x, y, z]]$, où $z^2=x^3+y^5$, n'est pas factoriel, tandis que $k[x, y, z]$ est factoriel par la proposition 14. Ici la proposition 11 ne s'applique pas, car les exposants 2, 3, 5 sont trop petits. Enfin il est intéressant de remarquer que, sur le corps C des nombres complexes, l'anneau complet $C[[x, y, z]]$ (où $z^2 = x^3 + y^5$) est factoriel d'après un résultat de M. MUMFORD.

On prend ici $b = 1 + b^4 y^3$, $w = y + bx$.

6. Sur les théorèmes de Severi, Lefschetz et Andreotti. — Le théorème suivant est dû à SEVERI dans le cas non singulier ([20]), et à ANDREOTTI dans le cas général ([1]).

(SA) « Soit V une hypersurface projective de dimension $n \geq 3$, non singulière en codimension ≤ 3. Alors l'anneau de coordonnées homogènes de V est factoriel ».

Par voie topologique, LEFSCHETZ a démontré ([10]) :

(L) « Soit V une intersection complète non singulière de dimension ≥ 3 dans l'espace projectif complexe. Alors l'anneau de coordonnées homogènes de V est factoriel ».

En vertu de notre paragraphe 2, des généralisations algébriques de ces théorèmes sont :

(SA′) « Soit A un anneau local intègre de la forme R/Rx avec R local régulier. Si $A_\mathfrak{p}$ est factoriel pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur ≤ 3, alors A est factoriel ».

(L′) « Soit A un anneau local intègre de la forme $R/\mathfrak{J}$, où R est local régulier, et où $\mathfrak{J}$ est engendré par une R-suite. Si $\dim(A) \geq 4$, et si $A_\mathfrak{p}$ est régulier pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$, alors A est factoriel ».

Les assertions (SA') et (L') sont, pour l'instant, des conjectures. La méthode d'ANDREOTTI pour (SA), qui est purement algébrique, pourrait être utilisée pour (SA') si notre conjecture du paragraphe 3 était vraie. On aurait aussi une démonstration de (SA') si l'on prouvait que, si A est un anneau local intègre de Macaulay dans lequel tout idéal premier *parfait* de hauteur 1 est principal, alors A est factoriel (*cf.* le lemme à la fin du paragraphe 3).

La conjecture (L') paraît plus difficile à attaquer. L'hypothèse que A est une « intersection complète » ne peut y être affaiblie en « A est un anneau de Macaulay ». En effet l'anneau local $A = (k[x, y, z, x', y', z'])_{(x, y, z, x', y', z')}$ où $xy' - yx' = yz' - zy' = zx' - xz' = 0$ (c'est-à-dire l'anneau local du sommet du cône projetant de $P_1 \times P_2$) est un anneau de Macaulay de dimension 4 [on vérifie aisément que $(x, y', z - z', x' + y + z)$ est une A-suite]; comme $P_1 \times P_2$ est non singulière, $A_\mathfrak{p}$ est régulier pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$. Cependant A n'est évidemment pas factoriel.

En conclusion, l'étude des conjectures (SA') et (L') pourrait donner des renseignements précieux sur les anneaux qui sont des « intersections complètes ».

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ANDREOTTI (A.) e SALMON (P.). — Anelli con unica decomponibilità in fattori primi, ed un problema di intersezioni complete, *Monatshefte für Mathematik*, t. 61, 1957, p. 97-142.

[2] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D. A.). — Unique factorization in regular local rings, *Proc Nat. Acad. U. S. A.*, t. 45, 1959, p. 733-734.

[3] BARSOTTI (Iacopo). — Repartitions on abelian varieties, *Illinois J. Math.*, t. 2, 1958, p. 43-70.

[4] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*, Chapitre 6 : *Groupes et corps ordonnés.* — Paris, Hermann. 1952 (*Act. scient. et ind.*, 1179; *Éléments de Mathématique*, 14).

[5] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative* (à paraître).

[6] CARTAN (H.) and EILENBERG (S). — *Homological algebra.* — Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical Series*, 19).

[7] CARTIER (Pierre). — Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 177-251 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1958).

[8] HABICHT (Walter). — Über Polynomabbildungen, *Math. Annalen*, t. 126, 1953, p. 149-176.

[9] KRULL (Wolfgang). — *Idealtheorie.* — Berlin, J. Springer, 1935 (*Ergebnisse der Mathematik*, Band 4, Heft 3).

[10] LEFSCHETZ (Solomon). — On certain numerical invariants of algebraic varieties, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 22, 1921, p. 327-482.

[11] MORI (Yoshiro). — On the fundamental theorem of regular local rings, *Bull. Kyoto Gakugei Univ.*, Series B, t. 15, 1959, p. 17-22.

[12] NAGATA (Masayoshi). — A remark on the unique factorization theorem, *J. Math. Soc. Japan*, t. 9, 1957, p. 143-145.

[13] SAMUEL (Pierre). — La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique, *J. Math. pures et appl.*, Série 9, t. 30, 1951, p. 159-274.

[14] SAMUEL (Pierre). — *Progrès récents d'algèbre locale.* — Rio de Janeiro, Instituto de Matematica, 1959 (*Notas de Matematica*, 19).

[15] SAMUEL (Pierre). — On unique factorization domains, *Illinois J. Math.*, vol. 5, 1961, p. 1-17.

[16] SERRE (Jean-Pierre). — Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[17] SERRE (Jean-Pierre). — Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.

[18] SERRE (Jean-Pierre). — Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, *Séminaire Dubreil-Pisot* : Algèbre et Théorie des nombres, t. 11, 1957-1958, n° 23, 18 pages.

[19] SESHADRI (C. S.). — Triviality of vector bundles over the affine space K^2, *Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 44, 1958, p. 456-468.

[20] SEVERI (Francesco). — Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli, *Accad. dei Lincei*, *Rendiconti.* Serie 5, t. 15, 1906, p. 691-696.

[21] TARSKI (Alfred). — *A decision method for elementary algebra and geometry*, Berkeley, University Press, 1951.

[22] ZARISKI (O) and SAMUEL (P). — *Commutative algebra*, vol. 1 et 2. — Princeton, D. Van Nostrand, 1958-1960.

(Manuscrit reçu le 3 décembre 1960.)

Pierre SAMUEL,
Professeur à la Faculté des Sciences
de Clermont-Ferrand,
34, avenue Carnot,
Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).