BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS BRUHAT

Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 43-75

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__43_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 43 à 75.

DISTRIBUTIONS SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT ET APPLICATIONS À L'ÉTUDE DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES $\mathfrak{p}$-ADIQUES ;

PAR

FRANÇOIS BRUHAT

(Nancy).

L'origine de ce travail se trouve dans le désir d'étendre aux groupes classiques sur un corps $\mathfrak{p}$-adique certains résultats de la théorie des représentations des groupes de Lie semi-simples : c'est l'objet des deux derniers numéros de cet article. Nous y démontrons en particulier l'irréductibilité de « presque toutes » les représentations de la « série principale » par une méthode analogue à celle utilisée dans [3] dans le cas des groupes de Lie réels ou complexes. D'autres résultats portant sur les fonctions sphériques seront publiés ultérieurement.

La méthode de [3] reposait sur l'usage de la théorie des distributions et sur le théorème des noyaux de L. Schwartz. Nous avons donc été amené à rédiger une théorie des distributions sur un groupe localement compact. Plusieurs auteurs se sont déjà attaqués à ce problème ([6], [7], [22]). J. RISS a donné dans [22] une théorie des distributions sur un groupe abélien localement compact. Mais sa théorie, même généralisée au cas non abélien, ne pouvait nous servir, car d'une part elle repose essentiellement sur l'utilisation des sous-groupes à un paramètre et, par suite, ne sort pas du cadre des mesures dans le cas totalement discontinu, d'autre part les espaces de distributions de RISS ne sont pas nucléaires et le théorème des noyaux n'y est pas valable. Enfin RISS est amené, pour l'étude de la transformation de Fourier, à introduire une seconde sorte de distributions, dont les rapports avec la première restent assez obscurs.

De son côté, EHRENPREIS est parti dans [7] d'un espace localement compact X muni d'une famille d'opérateurs D_i non bornés dans l'espace des fonctions continues sur X, et a donné, moyennant des conditions axiomatiques sur les D_i, une théorie des distributions sur X, où les opérateurs D_i jouent le rôle des opérateurs de dérivation dans le cas ordinaire. Ici encore, les deux mêmes raisons (cas totalement discontinu et nucléarité des espaces obtenus) font que la théorie d'Ehrenpreis était inutilisable pour nos besoins.

Nous avons donc dû reprendre la question, en partant des résultats sur la structure des groupes localement compacts connus depuis la résolution du 5^e^ problème. On trouvera au n° 12 une étude des « opérateurs différentiels » sur un groupe localement compact qui permet de faire la comparaison avec la théorie de Riss.

Par ailleurs, C. George a, semble-t-il, obtenu indépendamment un certain nombre de nos définitions et résultats sur les distributions.

Notations et rappels. — La lettre G désignera un groupe localement compact. Si H est un sous-groupe fermé de G, on désignera par μ_H une mesure de Haar à gauche sur H, identifiée à une mesure sur G. Si H est compact, on supposera toujours μ normalisée par la condition $\mu_H(H) = 1$. On désignera par i_H l'application canonique de G sur l'espace homogène G/H des classes à gauche suivant H. Si E est un ensemble quelconque, l'application $j_H : f \to f \circ i_H$ permet d'identifier une application f de G/H dans E avec une application de G dans E invariante à droite par H.

Supposons H compact, et soit $\mu_{G/H}$ une mesure positive sur G/H invariante par G. Pour qu'une fonction f sur G/H soit localement intégrable pour $\mu_{G/H}$, il faut et il suffit que $j_H(f)$ soit localement intégrable pour μ_G. De plus, l'application $g \to g \star \mu_H$ est un projecteur noté π_H de $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(G)$ sur $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(G/H)$ identifié à un sous-espace de $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(G)$. Les mêmes résultats sont valables pour la plupart des espaces fonctionnels usuels : par exemple j_H est un isomorphisme topologique de l'espace $\mathcal{K}(G/H)$ des fonctions continues à support compact sur G/H, sur un sous-espace fermé de $\mathcal{K}(G)$ et π_H est un projecteur continu de $\mathcal{K}(G)$ sur $j(\mathcal{K}(G/H))$. Si G est un groupe de Lie, ceci est encore vrai en remplaçant les espaces $\mathcal{K}$ par les espaces $\mathcal{D}$ de fonctions indéfiniment différentiables à support compact (avec la topologie de Schwartz) (*cf.* par exemple [3], p. 130).

Enfin, rappelons le résultat suivant : soit $\mathcal{F}$ une famille filtrante décroissante de sous-groupes distingués compacts de G, d'intersection réduite à l'élément neutre. Alors tout voisinage de e contient un sous-groupe $k \in \mathcal{F}$, et G est canoniquement isomorphe à la limite projective des groupes quotients G/k pour $k \in \mathcal{F}$ (*cf.* [26], p. 25).

1. Les fonctions régulières sur G : cas préliminaire. — Soit G un groupe localement compact, et soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-groupes *distingués compacts* k de G tels que le groupe quotient G/k soit un *groupe de Lie :* nous dirons pour simplifier qu'un tel sous-groupe de G est un *bon sous-groupe*. La famille $\mathcal{F}$ ordonnée par inclusion est filtrante décroissante : si k_1 et $k_2 \in \mathcal{F}$, le groupe $G/k_1 \cap k_2$ est extension du groupe de Lie G/k_1 par le sous-groupe $k_1/k_1 \cap k_2$, qui est topologiquement isomorphe (puisque les k_i sont compacts) à $k_1 k_2/k_2$. Or $k_1 k_2/k_2$ est un groupe de Lie, comme sous-groupe compact du groupe de Lie G/k_2. On en déduit que $G/k_1 \cap k_2$ est lui aussi un groupe de Lie [8].

Dans ce numéro, nous supposerons que l'*intersection des sous-groupes* $k \in \mathcal{F}$ *est réduite à l'élément neutre* e *:* on sait (*cf.* [19], p. 175) que c'est le cas si le quotient G/G_0 de G par la composante connexe G_0 de e est *compact*. Le groupe G est alors canoniquement isomorphe à la *limite projective* des groupes de Lie G/k pour $k \in \mathcal{F}$. Si, de plus, G est *métrisable*, il existe une suite décroissante (k_n) de bons sous-groupes telle que $\cap k_n = \{ e \}$. Le groupe G est alors canoniquement isomorphe à la limite projective des G/k_n. D'ailleurs la suite (k_n) est cofinale à $\mathcal{F}$, comme il résulte du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit H un sous-groupe distingué de G tel que G/H soit un groupe de Lie, et soit $\mathcal{F}'$ un sous-ensemble filtrant décroissant de $\mathcal{F}$ tel que l'intersection des $k \in \mathcal{F}'$ soit réduite à $\{ e \}$. Il existe un $k \in \mathcal{F}'$ tel que $k \subset H$.*

En effet, les sous-groupes kH/H forment une famille filtrante décroissante de sous-groupes compacts de G/H, d'intersection réduite à e. Comme un groupe de Lie n'a pas de sous-groupes non triviaux arbitrairement petits, on a nécessairement $kH = H$ pour $k \in \mathcal{F}'$ suffisamment petit.

Pour $k \in \mathcal{F}$, l'espace $\mathcal{D}(G/k)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur le groupe de Lie G/k s'identifie, comme nous l'avons rappelé plus haut, à un sous-espace $\mathcal{D}_k(G)$ de l'espace $\mathcal{K}(G)$. Nous considérerons toujours $\mathcal{D}_k(G)$ comme muni de la topologie transportée de celle de $\mathcal{D}(G/k)$: cette topologie est plus fine que celle induite par la topologie de $\mathcal{K}(G)$. Pour k, $h \in \mathcal{F}$, avec $k \subset h$, on a $\mathcal{D}_h(G) \subset \mathcal{D}_k(G)$ et la topologie de $\mathcal{D}_h(G)$ est induite par celle de $\mathcal{D}_k(G)$, puisque $\mathcal{D}(G/h)$ s'identifie à un sous-espace topologique de $\mathcal{D}(G/k)$. Ceci nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 1. — *Nous désignerons par $\mathcal{D}(G)$ le sous-espace de $\mathcal{K}(G)$ réunion des $\mathcal{D}_k(G)$ pour $k \in \mathcal{F}$, muni de la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{D}_k(G)$. Une fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ sera dite régulière à support compact.*

EXEMPLES.

1° Si G est un groupe de Lie, la famille $\mathcal{F}$ possède un élément minimal $\{ e \}$, et notre définition redonne bien l'espace $\mathcal{D}$ habituel.

2° Si G est compact totalement discontinu, les espaces $\mathcal{D}_k(G)$ sont de dimension finie, et la topologie de $\mathcal{D}(G)$ n'est autre que la topologie localement convexe la plus fine.

3° Prenons pour G le groupe compact attaché au groupe R^n : on vérifie facilement que les fonctions régulières sur G correspondent aux fonctions presque périodiques sur R^n qui peuvent s'exprimer comme fonctions indéfiniment différentiables périodiques d'un nombre fini de formes linéaires sur R^n (fonctions quasi-périodiques).

L'espace $\mathcal{D}(G)$ est une limite inductive stricte d'espaces qui sont eux-mêmes des limites inductives strictes d'espaces de Fréchet et même des espaces $(\mathcal{LF})$ au sens de [5] si G est dénombrable à l'infini. Par suite, $\mathcal{D}(G)$ est *tonnelé* et *bornologique*. Si G est séparable (c'est-à-dire métrisable et dénombrable à l'infini) et si (k_n) est une suite cofinale à F, l'espace $\mathcal{D}(G)$ est encore limite inductive de la suite des $\mathcal{D}_{k_n}(G)$, donc est un espace $(\mathcal{LF})$.

L'espace $\mathcal{D}$ induit sur chaque $\mathcal{D}_k$ sa propre topologie : plus généralement, soit H un sous-groupe compact distingué de G. La restriction à $\mathcal{D}_k$ du projecteur $\pi_H : f \to f \star \mu_H = \mu_H \star f$ s'identifie [quand on identifie $\mathcal{D}_k$ à $\mathcal{D}(G/k)$] au projecteur continu $\pi_{Hk/k}$ dans $\mathcal{D}(G/k)$. Par suite, π_H est un projecteur continu dans $\mathcal{D}$ et son image est un sous-espace fermé $\mathcal{D}_H(G)$ qui est la réunion des espaces $\mathcal{D}_{Hk}$ pour $k \in \mathcal{F}$. En particulier, $\mathcal{D}_k$ est, pour $k \in \mathcal{F}$, un sous-espace fermé de $\mathcal{D}$ et π_k est un projecteur continu de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_k$. De plus, $\mathcal{D}_H$ est exactement le sous-espace formé des éléments $f \in \mathcal{D}$ qui sont invariants par H, et l'espace $\mathcal{D}$ est *somme directe topologique* de $\mathcal{D}_H$ et du noyau $\mathcal{N}_H$ de π_H.

Enfin, les sous-groupes Hk/H de G/H forment, pour $k \in \mathcal{F}$, la famille des bons sous-groupes de G/H. Par suite, l'espace $\mathcal{D}(G/H)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}((G/H)/(Hk/H)) \approx \mathcal{D}(G/Hk) \approx \mathcal{D}_{Hk}$, d'où une application linéaire continue canonique de $\mathcal{D}(G/H)$ sur $\mathcal{D}_H$. Cette application est un *isomorphisme topologique :* en effet, π_H en est un inverse à gauche; or, nous avons vu que la restriction de π_H à $\mathcal{D}_k$ envoie continûment $\mathcal{D}_k$ sur $\mathcal{D}_{Hk}$. Par suite, π_H envoie continûment $\mathcal{D}$ sur la limite inductive $\mathcal{D}(G/H)$ des $\mathcal{D}_{Hk}$. En résumé :

PROPOSITION 1. — *Pour tout sous-groupe compact distingué H de G, la restriction à $\mathcal{D}(G)$ de π_H est un projecteur continu sur le sous-espace $\mathcal{D}_H(G)$ des fonctions invariantes par H et l'espace $\mathcal{D}_H(G)$ s'identifie canoniquement (grâce à l'application j_H), avec sa topologie à l'espace $\mathcal{D}(G/H)$.*

Il nous faut maintenant montrer qu'il y a suffisamment de fonctions régulières sur G :

PROPOSITION 2.

a. Pour tout voisinage ouvert U de e, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, positive, à support contenu dans U et telle que $\mu_G(\varphi) = 1$.

b. Soit K un compact de G, et soit (U_i) un recouvrement ouvert fini de K. Pour tout i, il existe une fontion $\varphi_i \in \mathcal{D}$, positive à support contenu dans U_i et telles que $\Sigma\, \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Démontrons (a) : soit V un voisinage ouvert de e tel que $V^2 \subset U$ et soit k un bon sous-groupe contenu dans V. Posons $W = kV$: on a $W = kW = Wk \subset U$

et l'image W/k de W dans G/k est un voisinage de e. Par suite, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(G/k)$, positive à support contenu dans W/k et telle que $\mu_{G/k}(\psi) = 1$. Il suffit alors de prendre $\varphi = \psi \circ j_k$.

Démontrons (*b*) : pour tout $x \in K$, on peut trouver un voisinage ouvert $W(x)$ de x, un indice $i(x)$ et un bon sous-groupe $k(x)$ tels que $W(x)\,k(x) = W(x) \subset U_{i(x)}$. Extrayons du recouvrement ouvert $W(x)$ de K un recouvrement fini correspondant à des points x_j de K et soit $k = \bigcap k(x_j)$: les $W(x_j)/k$ forment un recouvrement ouvert fini de l'image Kk/k de K dans le groupe de Lie G/k. On peut donc trouver des fonctions $\psi_j \in \mathcal{D}(G/k)$ positives de support contenu dans $W(x_j)/k$ avec $\Sigma\,\psi_j = 1$ sur Kk/k. Il suffit alors de prendre pour φ_i la somme (finie) des fonctions $\psi_j \circ j_k$ pour lesquelles on a $i(x_j) = i$.

Corollaire. — *L'espace $\mathcal{D}$ est dense dans l'espace $\mathcal{K}(G)$.*

Remarque. — Soit K un compact de G. Désignons par $\mathcal{D}(G;\,K)$ le sous-espace des fonctions régulières à support dans K, et posons $\mathcal{D}_k(G;\,K) = \mathcal{D}(G;\,K) \cap \mathcal{D}_k(G)$. Si $kK = K$, l'espace $\mathcal{D}_k(G;\,K)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{D}(G/k;\,K/k)$ et la topologie induite par $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_k(G;\,K)$ coïncide avec la topologie habituelle de $\mathcal{D}(G/k;\,K/k)$. Comme la topologie de $\mathcal{D}_k(G)$ est limite inductive des topologies des $\mathcal{D}_k(G;\,K)$ (où K décrit l'ensemble des parties compactes de G telles que $kK = K$), la topologie de $\mathcal{D}$ est encore limite inductive des topologies des $\mathcal{D}_k(G;\,K)$ pour $k \in \mathcal{F}$ et K compact de G. Par suite, la topologie de $\mathcal{D}(G;\,K)$ est moins fine que la limite inductive des topologies des $\mathcal{D}_k(G;\,K)$ pour $k \in \mathcal{F}$, ce qui entraîne en particulier que la topologie de $\mathcal{D}$ est encore limite inductive des topologies des $\mathcal{D}(G;\,K)$ quand K décrit l'ensemble des parties compactes de G.

Pour toute fonction f sur G et tout $x \in G$, nous désignerons par $\sigma_x f$ (resp. $\tau_x f$) la fonction $y \to f(x^{-1}y)$ [resp. $y \to f(yx)$].

Proposition 3. — *Les translations à gauche σ_x et à droite τ_x définissent deux représentations continues de G dans l'espace $\mathcal{D}(G)$.*

Comme $\mathcal{D}(G)$ est tonnelé, il suffit (*cf.* [3], p. 110) de montrer que les applications τ_x par exemple sont continues dans $\mathcal{D}$ et que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, l'application $x \to \tau_x\varphi$ est continue de G dans $\mathcal{D}$. Or, cela résulte trivialement des résultats analogues pour un groupe de Lie : la restriction de τ_x à chaque $\mathcal{D}_k$ est donc continue et pour $\varphi \in \mathcal{D}_k$, l'application $x \to \tau_x\varphi$ est continue de G (et même de G/k) dans $\mathcal{D}_k$.

Passons maintenant à la définition des fonctions régulières à support quelconque :

Définition 2. — *Nous dirons qu'une fonction f sur G est régulière si, pour tout $x \in G$, il existe un voisinage U de x et une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ telle que $f(y) = \varphi(y)$ pour tout $y \in U$.*

Il est immédiat (grâce à la proposition 2) que f est régulière si et seulement si pour tout compact K de G, il existe une $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que $f(y) = \varphi(y)$ pour $y \in K$, ou encore que f est régulière si et seulement si $\varphi f \in \mathcal{D}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$.

Nous désignerons par $\mathcal{E}(G)$ l'espace des fonctions régulières, muni de la topologie localement convexe la moins fine qui rende continue, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, l'application $f \to \varphi f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}$. L'espace $\mathcal{D}$ est le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des fonctions à support compact, l'injection de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ est continue et $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}$. Plus précisément, pour tout compact K de G, les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ induisent la même topologie sur le sous-espace $\mathcal{D}(G; K)$ des fonctions régulières à support dans K.

Il est immédiat que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des algèbres (pour le produit ordinaire) à multiplication séparément continue et que $\mathcal{D}$ est un module topologique sur $\mathcal{E}$. D'autre part, soit Ω un sous-ensemble ouvert et fermé de G et soit χ sa fonction caractéristique : χ est régulière puisque localement constante. Par suite, l'application $\varphi \to \chi\varphi$ de $\mathcal{D}$ sur le sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions régulières à support compact contenu dans Ω est continue. On en déduit aussitôt [en utilisant le fait que $\mathcal{D}$ est limite inductive des $\mathcal{D}(G; K)$] que, si (Ω_i) est une *partition* de G en ensembles *ouverts*, l'espace $\mathcal{D}$ s'identifie avec sa topologie à l'espace somme directe des sous-espaces $\mathcal{D}(\Omega_i)$. On voit de même que $\mathcal{E}(G)$ s'identifie au produit direct topologique des $\mathcal{E}(\Omega_i)$.

2. Les fonctions régulières sur G; cas général. — Soit G un groupe localement compact quelconque : on sait (*cf.* [19], p. 54) que G possède un sous-groupe ouvert G_1 qui satisfait aux hypothèses du n° 1, par exemple tel que G_1/G_0 soit *compact*. On pourra donc appliquer ce qui précède à G_1 et construire à partir de la famille $\mathcal{F}$ des bons sous-groupes de G_1, l'espace $\mathcal{D}(G_1)$.

Soit $\Gamma = xG_1$ une classe à gauche modulo G_1. La translation σ_x transforme l'espace $\mathcal{D}(G_1)$ en un espace $\mathcal{D}(\Gamma)$ de fonctions continues à support compact contenu dans Γ et la proposition 3 montre que ni cet espace, ni sa topologie [déduite de celle de $\mathcal{D}(G_1)$ par transport de structure] ne dépendent du choix de x dans Γ. Nous désignerons provisoirement par $\mathcal{D}^g(G)$ le sous-espace de $\mathcal{K}(G)$, somme directe de ces espaces $\mathcal{D}(\Gamma)$ quand Γ décrit l'ensemble des classes à gauche modulo G_1, muni de la topologie somme directe. Naturellement, nous pouvons aussi considérer les classes à droite $\Delta = G_1 x$, construire de manière analogue l'espace $\mathcal{D}(\Delta)$ et former l'espace $\mathcal{D}^d(G)$ somme directe topologique des divers $\mathcal{D}(\Delta)$.

PROPOSITION 4. — *Les espaces $\mathcal{D}^g(G)$ et $\mathcal{D}^d(G)$ sont identiques et ont même topologie, et l'espace $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}^g(G) = \mathcal{D}^d(G)$ ne dépend pas du choix du sous-groupe ouvert G_1.*

Introduisons les ensembles $E(z)$ intersection d'une classe à gauche zG_1 et d'une classe à droite $G_1 z$. On obtient ainsi une partition de G en ensembles ouverts, et l'espace $\mathcal{D}^g(G)$ [resp. $\mathcal{D}^d(G)$] est somme directe des espaces $\mathcal{D}^g(E(z))$ [resp. $\mathcal{D}^d(E(z))$], où $\mathcal{D}^g(E(z))$ par exemple est le sous-espace de $\mathcal{D}(zG_1)$ formé des fonctions à support dans $E(z)$. Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{D}^g(E(z)) = \mathcal{D}^d(E(z))$ algébriquement et topologiquement pour obtenir la première assertion.

Or, dire que $f \in \mathcal{D}^g(E(z))$ [resp. $f \in \mathcal{D}^d(E(z))$], c'est dire que la fonction $\varphi : y \to f(zy)$ [resp. $\psi : y \to f(yz)$] appartient à $\mathcal{D}(G_1)$. Par suite, il suffit de montrer que l'application $x \to zxz^{-1}$ définit un isomorphisme topologique du sous-espace $\mathcal{D}(G_1 \cap z^{-1}G_1 z)$ de $\mathcal{D}(G_1)$ sur le sous-espace $\mathcal{D}(zG_1z^{-1} \cap G_1)$. Or, par transport de structure, cette application définit un isomorphisme du sous-espace $\mathcal{D}(G_1 \cap z^{-1}G_1 z)$ de $\mathcal{D}(G_1)$ sur le sous-espace $\mathcal{D}(zG_1z^{-1} \cap G_1)$ *considéré comme sous-espace de l'espace* $\mathcal{D}(zG_1z^{-1})$, construit sur le groupe localement compact zG_1z^{-1}. Par suite, nous sommes ramenés au lemme suivant, qui entraîne également la seconde assertion de la proposition 4 :

Lemme 2. — *Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes ouverts de G, tels que la famille des bons sous-groupes de G_i ait une intersection réduite à $\{e\}$ (pour $i = 1, 2$). L'espace $\mathcal{D}(G_1 \cap G_2)$ est le même (algébriquement et topologiquement) comme sous-espace de $\mathcal{D}(G_1)$ ou comme sous-espace de $\mathcal{D}(G_2)$.*

On peut se borner au cas $G_1 \subset G_2$. Puisque G_1 est ouvert, les sous-groupes compacts k de G_1 qui sont distingués dans G_2 et tels que G_2/k (donc aussi G_1/k) soit de Lie, forment une famille $\mathcal{F}'$ d'intersection réduite à $\{e\}$. Par suite, $\mathcal{D}(G_i)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}_k(G_i) \approx \mathcal{D}(G_i/k)$ pour $k \in \mathcal{F}'$ (lemme 1). Comme $\mathcal{D}(G_1/k)$ est le sous-espace fermé facteur direct topologique dans $\mathcal{D}(G_2/k)$ composé des fonctions à support contenu dans G_1/k, il en résulte aussitôt que $\mathcal{D}(G_1)$ est le sous-espace de $\mathcal{D}(G_2)$ formé des fonctions à support dans G_1, muni de la topologie induite, d'où le lemme.

L'espace $\mathcal{D}(G)$ est, comme $\mathcal{D}(G_1)$, tonnelé et bornologique; c'est un espace $(\mathcal{LF})$ si G est séparable. D'autre part, la proposition 2 et son corollaire s'étendent immédiatement au cas général.

Corollaire 1. — *Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. Il existe un bon sous-groupe k de G_1 tel que f soit invariante à gauche et à droite par k.*

En effet, on peut écrire φ à la fois comme somme finie de translatées à droite de fonctions $f_i \in \mathcal{D}(G_1)$ et comme somme finie de translatées à gauche de fonctions $g_j \in \mathcal{D}(G_1)$ et il suffit de prendre pour k l'intersection des sous-groupes d'invariance des f_i et des g_j.

Corollaire 2. — *Les translations à gauche* (resp. *à droite*) *définissent une représentation continue de G dans $\mathcal{D}(G)$.*

Démontrons-le pour les translations à gauche. Considérons $\mathcal{D}$ sous l'aspect $\mathcal{D}^g(G) = \Sigma\, \mathcal{D}(xG_1)$: il est alors immédiat que σ_y est, pour tout $y \in G$, un opérateur continu dans $\mathcal{D}$, car il permute entre eux les espaces $\mathcal{D}(xG_1)$. Puisque $\mathcal{D}$ est tonnelé, il nous suffit maintenant de montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, l'application $y \rightarrow \sigma_y \cdot \varphi$ est continue de G (ou de G_1, puisque G_1 est ouvert dans G) dans $\mathcal{D}$. Pour cela, nous considérerons $\mathcal{D}$ sous l'aspect $\mathcal{D}^d(G) = \Sigma\, \mathcal{D}(G_1 x)$: on peut supposer que φ appartient à l'un des $\mathcal{D}(G_1 x)$ et par translation à droite par x, on se ramène au cas $\varphi \in \mathcal{D}(G_1)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3.

Remarque. — La définition que nous avons donnée de $\mathcal{D}^g(G)$ peut encore se traduire de la manière suivante. Considérons pour un bon sous-groupe k de G_1, l'espace homogène G/k des classes à gauche modulo k. C'est une variété différentiable (non nécessairement dénombrable à l'infini, mais paracompacte), puisque les classes à gauche modulo G_1 définissent une partition de G/k en ouverts homéomorphes au groupe de Lie G_1/k. Le groupe G est alors homéomorphe à la limite projective des G/k et l'espace $\mathcal{D}(G)$ est topologiquement isomorphe à la limite inductive des $\mathcal{D}(G/k)$. La proposition 4 signifie qu'on obtient le même espace en considérant les espaces homogènes *à droite* $k\backslash G$.

A partir de $\mathcal{D}(G)$, on définit exactement comme plus haut l'espace $\mathcal{E}(G)$ des fonctions régulières à support quelconque. Il s'identifie par exemple au produit topologique des espaces $\mathcal{E}(xG_1)$ correspondant aux différentes classes à gauche xG_1, ces derniers étant définis par transport de structure à partir de $\mathcal{E}(G_1)$.

Remarque. — Les coefficients d'une représentation linéaire continue ρ de G dans un espace de dimension finie sont toujours des fonctions régulières : en effet, le groupe quotient de G par le noyau N de ρ est un groupe de Lie, donc contient un bon sous-groupe k de G_1. La restriction de ρ à G_1 est donc en réalité une représentation continue, donc analytique, de G_1/k, d'où notre assertion.

3. Les distributions sur G.

Définition 3. — *Nous appellerons distribution sur G une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(G)$.*

On désignera par $\mathcal{D}'(G)$ l'espace des distributions sur G, c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(G)$, muni de la topologie forte de dual. Comme $\mathcal{D}(G)$ est, par exemple, la somme directe des espaces $\mathcal{D}(xG_1)$, le dual fort $\mathcal{D}'$ est le produit direct topologique des duals forts $\mathcal{D}'(xG_1)$, qui sont isomorphes à l'espace $\mathcal{D}'(G_1)$ des distributions sur G_1. D'autre part, comme $\mathcal{D}$ est bornologique, l'espace $\mathcal{D}'$ est *complet.*

La définition du produit αT d'une distribution T par une fonction régulière α est immédiate (par transposition de l'application $\varphi \rightarrow \alpha\varphi$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$). L'existence d'un plus petit fermé S (appelé *support* de T) tel que $T(\varphi) = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ à support ne rencontrant pas S résulte immédiatement de l'existence de partitions de l'unité dans $\mathcal{D}$ (proposition 2).

PROPOSITION 5. — *Pour qu'une distribution T soit continue pour la topologie induite par $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}$ (et, par suite, se prolonge d'une manière et d'une seule en une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$), il faut et il suffit qu'elle soit à support compact.*

La condition est évidemment suffisante : si T a un support K compact, il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{D}$ avec $\alpha = 1$ sur un voisinage de K, et l'on a $T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$. Si φ tend vers zéro pour la topologie de $\mathcal{E}$, alors $\alpha\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}$ et $T(\varphi) \to 0$.

Réciproquement, si T est continue pour la topologie induite par $\mathcal{E}$, il existe un nombre fini de fonctions $\alpha_j \in \mathcal{D}$ et des voisinages convexes W_j de 0 dans $\mathcal{D}$ tels que les conditions $\alpha_j \varphi \in W_j$ entraînent $|T(\varphi)| \leq 1$ (pour $\varphi \in \mathcal{D}$). Le support de T est donc contenu dans la réunion des supports des α_j.

L'espace des distributions à support compact s'identifie donc au dual $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$. Nous le munirons toujours de la topologie forte de dual : $\mathcal{E}'$ est alors, par exemple, somme directe topologique des espaces $\mathcal{E}'(xG_1)$.

REMARQUE. — Soient T une distribution et φ une fonction régulière. Supposons que l'intersection du support de T et du support de φ soit un compact K. On peut alors définir $T(\varphi)$ de la manière habituelle : on prend une fonction $\alpha \in \mathcal{D}$ avec $\alpha = 1$ sur un voisinage de K, on pose $T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$ et l'on vérifie aussitôt que $T(\alpha\varphi)$ ne dépend pas du choix de α.

4. Propriétés topologiques des espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. — Si le groupe G est séparable, l'espace $\mathcal{D}(G)$ est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet nucléaires et est, par suite, un *espace ($\mathcal{LF}$) nucléaire et complet*. De plus, un *borné* de $\mathcal{D}$ est dans ce cas contenu dans un sous-espace $\mathcal{D}_k(G; K)$, où k est un bon sous-groupe de G_1 et K un compact de G. Dans le cas général, $\mathcal{D}$ est encore limite inductive stricte d'espaces de Fréchet nucléaires, mais l'ensemble d'indices n'est plus dénombrable et les théorèmes généraux sur les limites inductives dénombrables ne s'appliquent plus. Cependant :

THÉORÈME 1. — *L'espace $\mathcal{D}(G)$ est complet.*

Comme une somme directe topologique d'espaces complets est complète (*cf.* [13], p. 14), il suffit de faire la démonstration dans le cas $G = G_1$, en supposant G_1/G_0 compact, donc G dénombrable à l'infini. D'après un théorème de GROTHENDIECK [11], il suffit de démontrer que toute forme linéaire u sur le dual $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ dont la restriction à toute partie équicontinue de $\mathcal{D}'$ est faiblement continue, provient d'un élément de $\mathcal{D}$.

Soit $k \in \mathcal{F}$. A la décomposition en somme directe topologique $\mathcal{D} = \mathcal{D}_k + \mathcal{N}_k$ associée au projecteur π_k [on a donc posé $\mathcal{N}_k = \pi_k^{-1}(0)$], correspond une décomposition de $\mathcal{D}'$ en somme directe topologique $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_k + \mathcal{N}'_k$, où $\mathcal{D}'_k = {}^t\pi_k(\mathcal{D}')$ est l'orthogonal de $\mathcal{N}_k$ et s'identifie au dual de $\mathcal{D}_k$, c'est-à-dire à l'espace des distributions sur le groupe de Lie G/k.

Soit alors $\mathcal{D}'_f$ la réunion des $\mathcal{D}'_k$ pour $k \in \mathcal{F}$. Montrons tout d'abord qu'il existe un $k_0 \in \mathcal{F}$ tel que u soit nulle sur $\mathcal{D}'_f \cap \mathcal{N}'_{k_0}$. Raisonnons par l'absurde : si un tel k_0 n'existait pas, on pourrait trouver par récurrence une suite décroissante de sous-groupes $k_n \in \mathcal{F}$ et une suite d'éléments $x_n \in \mathcal{N}_{k_n} \cap \mathcal{D}'_{k_{n+1}}$ avec $u(x_n) = 1$. Posons $H = \cap k_n$: le groupe G/H est alors séparable et l'espace $\mathcal{D}(G/H)$ est complet. De plus, $\mathcal{D}(G)$ est somme directe topologique de $\mathcal{D}(G/H)$ et de $\mathcal{N}_H$, donc $\mathcal{D}'$ est somme directe topologique de $\mathcal{D}'(G/H)$ et de $\mathcal{N}'_H$. La restriction de u à $\mathcal{D}'(G/H)$ satisfait aux mêmes hypothèses de continuité que u et comme $\mathcal{D}(G/H)$ est complet, il existe d'après le théorème de Grothendieck un élément $\varphi \in \mathcal{D}(G/H)$ tel que $u(T) = T(\varphi)$ pour toute $T \in \mathcal{D}'(G/H)$. Or $\mathcal{D}(G/H)$ est la réunion des $\mathcal{D}_{k_n}$. Il existe un indice n tel que $\varphi \in \mathcal{D}_{k_n}$, donc tel que $T(\varphi) = 0$ pour $T \in \mathcal{N}'_{k_n}$. Comme $x_n \in \mathcal{N}'_{k_n} \cap \mathcal{D}'(G/H)$, ceci contredit l'hypothèse $u(x_n) = 1$.

D'autre part, l'ensemble des projecteurs π_k pour $k \in \mathcal{F}$ est *équicontinu :* comme $\mathcal{D}$ est tonnelé, il suffit de montrer que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, l'ensemble des $\pi_k\varphi$ est borné. Or, φ appartient à un sous-espace $\mathcal{D}_h$ pour $h \in \mathcal{F}$, π_k conserve $\mathcal{D}_h$ et si l'on identifie $\mathcal{D}_h$ à $\mathcal{D}(G/h)$, la fonction $\pi_k\varphi$ s'identifie à $\varphi \star \mu_{hk/h}$. Qnand k décrit $\mathcal{F}$, le sous-groupe kh/h du groupe de Lie G/h reste contenu dans le plus grand sous-groupe distingué compact H de G/h et les fonctions $\varphi \star \mu_{hk/h}$ gardent leur support dans le compact HK (où K est le support de φ dans G/h) et restent bornées ainsi que chacune de leurs dérivées. Donc les $\pi_k\varphi$ décrivent un borné de $\mathcal{D}_h$. De plus, on a $\pi_k\varphi = \varphi$ pour $k \subset h$, ce qui entraîne que π_k tend simplement suivant $\mathcal{F}$ vers l'application identique. Par transposition, on en déduit que les projecteurs ${}^t\pi_k$ décrivent un ensemble équicontinu dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ et convergent simplement vers l'identité suivant $\mathcal{F}$, dans $\mathcal{D}'$ muni de la topologie *faible.* Par suite, le sous-espace $\mathcal{D}'_f$, qui est la réunion des images des ${}^t\pi_k$, est faiblement dense dans $\mathcal{D}'$. Plus précisément, pour tout $x \in \mathcal{D}'$, l'ensemble X des ${}^t\pi_k(x)$ est borné donc équicontinu dans $\mathcal{D}'$ et x est faiblement adhérent à X. Si $x \in \mathcal{N}'_{k_0}$, on a $X \subset \mathcal{D}'_f \cap \mathcal{N}'_{k_0}$, d'où $u = 0$ sur X et l'hypothèse de continuité faite sur u montre que $u(x) = 0$. Par suite, on a $u = 0$ sur $\mathcal{N}'_{k_0}$ tout entier, u s'identifie à une forme linéaire sur $\mathcal{D}'_{k_0} \approx \mathcal{D}'(G/k_0)$ dont la restriction à tout équicontinu est faiblement continue et comme $\mathcal{D}(G/k_0)$ est complet, il existe une $\varphi \in \mathcal{D}(G/k_0)$ avec $u(T) = T(\varphi)$ pour toute $T \in \mathcal{D}'$, ce qui achève la démonstration.

Étudions maintenant les parties bornées de $\mathcal{D}$: comme une partie bornée d'une somme directe est contenue dans la somme d'un nombre fini de facteurs (*cf.* [13], p. 14), on peut ici encore supposer que $G = G_1$ et que G est dénombrable à l'infini.

THÉORÈME 2. — *Toute partie bornée B de $\mathcal{D}(G_1)$ est contenue dans un sous-espace $\mathcal{D}_k(G_1)$.*

Raisonnons par l'absurde; si B n'est contenue dans aucun des $\mathcal{D}_k$, on peut trouver par récurrence une suite décroissante de bons sous-groupes k_n et une suite de points $x_n \in B$ tels que $x_n \notin B \cap \mathcal{D}_{k_n}$ mais que $x_n \in B \cap \mathcal{D}_{k_{n+1}}$. Posons $H = \cap k_n$: le groupe G/H est métrisable et l'espace $\mathcal{D}(G/H)$ s'identifie à $\mathcal{D}_H = \cup \mathcal{D}_{k_n}$ (n° 1). Nous obtenons alors une contradiction, car $B \cap \mathcal{D}_H$ est borné, $\mathcal{D}_H$ est limite inductive stricte de la suite des $\mathcal{D}_{k_n}$ et $B \cap \mathcal{D}_H$ n'est pas contenu dans l'un des $\mathcal{D}_{k_n}$, contrairement aux propriétés des bornés d'une limite inductive stricte d'une suite [1].

Corollaire 1. — *Soit B un borné de $\mathcal{D}(G)$. Il existe un compact K de G et un bon sous-groupe k de G tels que les éléments de B soient invariants à gauche et à droite par k et aient leur support dans K.*

En effet, un borné de $\mathcal{D}_k(G_1)$ est composé de fonctions ayant leur support dans un même compact.

Corollaire 2. — *$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des espaces de Montel (donc sont réflexifs).*

En effet, $\mathcal{D}$ est tonnelé et ses bornés sont relativement compacts puisque l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur un groupe de Lie est un espace de Montel. D'autre part, le dual fort d'un Montel est un Montel, et un Montel est réflexif [1].

L'espace $\mathcal{D}$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'$ en associant à la fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ la mesure $\varphi . \mu_G$. Avec cette identification :

Corollaire 3. — *$\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$.*

Comme $\mathcal{D}$ est le dual de $\mathcal{D}'$ (corollaire 2), il suffit de montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ est telle que $\int \varphi(x)\,\psi(x)\,d\mu_G(x) = 0$ pour toute $\psi \in \mathcal{D}$, alors $\varphi = 0$, ce qui résulte immédiatement de ce que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{K}(G)$, et que le support de μ_G est G tout entier.

Corollaire 4. — *L'espace $\mathcal{D}'(G_1)$ muni de la topologie forte est canoniquement isomorphe (avec sa topologie) à la limite projective des espaces $\mathcal{D}'(G_1/k)$ pour $k \in \mathcal{F}$.*

Soit $E = \varprojlim \mathcal{D}'(G_1/k)$. Comme ${}^t\pi_k$ envoie continûment $\mathcal{D}'(G_1)$ sur $\mathcal{D}'(G_1/k)$, on en déduit une application linéaire canonique continue λ de $\mathcal{D}'$ dans E. Il est immédiat que λ est bijective. De plus, λ est un *homéomorphisme* : le théorème 2 montre en effet que, pour que T tende vers zéro dans $\mathcal{D}'$, il faut et il suffit que, pour tout $k \in \mathcal{F}$, ${}^t\pi_k(T) \to 0$ dans $\mathcal{D}'(G_1/k)$, c'est-à-dire que $\lambda(T)$ tende vers zéro dans E.

Corollaire 5. — *L'espace $\mathcal{D}'(G)$ est nucléaire.*

En effet, les $\mathcal{D}'(G_1/k)$ sont nucléaires et tout produit direct, toute limite projective d'espaces nucléaires est nucléaire [13].

Remarque. — L'espace $\mathcal{D}$ est nucléaire si et seulement si G est séparable : nous avons déjà vu que la condition est suffisante. Inversement, si $\mathcal{D}$ est nucléaire, alors, d'une part G est métrisable parce que les parties bornées du dual d'un espace nucléaire sont métrisables [13] et que l'application qui, à $x \in G$ fait correspondre la mesure de Dirac au point x, est un homéomorphisme de G dans $\mathcal{D}'$, d'autre part G/G_1 est dénombrable, car sinon, $\mathcal{D}$ contiendrait un sous-espace F somme directe topologique d'une infinité non dénombrable de droites; or un tel sous-espace n'est pas nucléaire, alors que tout sous-espace d'un espace nucléaire est nucléaire.

PROPOSITION 6.

a. *$\mathcal{E}(G)$ et $\mathcal{E}'(G)$ sont des espaces de Montel complets.*

b. *Pour tout compact K de G, les espaces $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}'$ induisent la même topologie sur l'espace $\mathcal{E}'(K)$ des distributions à support dans K. L'espace $\mathcal{E}'$ est limite inductive stricte des $\mathcal{E}'(K)$ et un borné de $\mathcal{E}'$ est contenu dans un $\mathcal{E}'(K)$.*

c. *$\mathcal{E}$ est nucléaire si et seulement si G est métrisable; $\mathcal{E}'$ est nucléaire si et seulement si G est dénombrable à l'infini.*

Démontrons d'abord (b) : *a priori*, la topologie induite par $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{E}'(K)$ est plus fine que celle induite par $\mathcal{D}'$. Cependant, soit $\alpha \in \mathcal{D}$ avec $\alpha = 1$ sur un voisinage de K et soit B un borné de $\mathcal{E}$: l'ensemble des $\alpha\varphi$ pour $\varphi \in B$ est un borné de $\mathcal{D}$. Si $T \in \mathcal{E}'(K)$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}'$, alors $T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$ tend vers zéro uniformément pour $\varphi \in B$, ce qui montre que T tend vers zéro dans $\mathcal{E}'$. D'où la première assertion de (b). D'autre part, la topologie sur $\mathcal{E}'$ limite inductive des $\mathcal{E}'(K)$ est plus fine que la topologie de $\mathcal{E}'$. Pour montrer que ces deux topologies coïncident, il suffit de montrer qu'un ensemble équicontinu B de formes linéaires sur $\varinjlim \mathcal{E}'(K)$ est encore équicontinu sur $\mathcal{E}'$. Or l'espace $\mathcal{K}(G)$ est un sous-espace de $\varinjlim \mathcal{E}'(K)$, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite. Par suite, une forme linéaire $u \in B$ est une *mesure* μ_u. De plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, l'application $T \to \varphi T$ est continue de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}'(K)$ (avec $K =$ support de φ). La mesure $\varphi . \mu_u$ se prolonge donc en une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire appartient à $\mathcal{D}$. Par suite, μ_u est une fonction régulière f_u (ou plus exactement, on a $\mu_u = f_u . \mu_G$ avec $f_u \in \mathcal{E}$). Quand u décrit B, les $\varphi . \mu_u$ décrivent un équicontinu du dual de $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire un borné de $\mathcal{D}$. Donc les f_u décrivent un borné de $\mathcal{E}$ et les formes linéaires $u \in B$ sont encore équicontinues sur $\mathcal{E}'$.

Comme G_1 est réunion d'une suite croissante de compacts K_n, l'espace $\mathcal{E}'(G_1)$ est limite inductive stricte de la suite des espaces $\mathcal{E}'(K_n)$, qui sont complets et nucléaires comme sous-espaces fermés de $\mathcal{D}'$. Par suite, $\mathcal{E}'(G_1)$ est complet et nucléaire, $\mathcal{E}'(G)$ est complet et est nucléaire si et seulement si G est dénombrable à l'infini (*cf.* Remarque ci-dessus).

D'autre part, une partie bornée B de $\mathcal{E}'$ est contenue dans l'un des $\mathcal{E}'(K)$, d'après les propriétés des bornés des sommes directes et des limites inductives strictes de suites. B est donc *relativement compact*. De plus, B est borné, donc équicontinu dans $\mathcal{D}'$; il existe un voisinage convexe équilibré W de o dans $\mathcal{D}$ tel que $|T(\varphi)| \leq 1$ pour $T \in B$ et $\varphi \in W$, Soit alors $\alpha \in \mathcal{D}$ avec $\alpha = 1$ sur un voisinage de K : les conditions $\varphi \in \mathcal{E}$, $\alpha\varphi \in W$ et $T \in B$ entraînent $|T(\varphi)| = |T(\alpha\varphi)| \leq 1$, ce qui montre que B est *équicontinu* dans $\mathcal{E}'$. La topologie de $\mathcal{E}$ est donc induite par la topologie du dual fort de $\mathcal{E}'$.

Par ailleurs, la topologie de $\mathcal{E}$ est définie comme limite projective (par les applications $\varphi \to \alpha\varphi$ pour $\alpha \in \mathcal{D}$) de sous-espaces de $\mathcal{D}$ et même de sous-espaces d'espaces $\mathcal{D}(G; K)$ pour K compact. Comme $\mathcal{D}$ est un espace de Montel complet, on en déduit aussitôt que $\mathcal{E}$ est *complet* et est *nucléaire* si et seulement si G est métrisable [car alors les espaces $\mathcal{D}(G; K)$ sont nucléaires]. De plus, les parties bornées de $\mathcal{E}$ sont relativement compactes. Par suite, $\mathcal{E}$ est semi-réflexif et même *réflexif* puisqu'il a la topologie de dual fort de $\mathcal{E}'$. On en déduit que $\mathcal{E}'$ est tonnelé, donc que $\mathcal{E}'$, et par suite son dual fort $\mathcal{E}$, sont des espaces de Montel.

5. **Le théorème des noyaux.** — Soient V et V' deux variétés différentiables : on sait que l'espace $\mathcal{D}(V \times V')$ s'identifie canoniquement, avec sa topologie, au produit tensoriel « inductif » $\mathcal{D}(V) \overline{\otimes} \mathcal{D}(V')$ défini à partir des formes bilinéaires séparément continues [13] : ce résultat exprime essentiellement le « théorème des noyaux » de Schwartz [24]. Quant à l'espace $\mathcal{D}'(V \times V')$, il s'identifie canoniquement au produit tensoriel projectif $\mathcal{D}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V')$. De même :

THÉORÈME 3. — *Soient G et H deux groupes localement compacts.*

a. L'espace $\mathcal{D}(G \times H)$ s'identifie canoniquement avec sa topologie au produit tensoriel inductif $\mathcal{D}(G) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H)$.

b. L'espace $\mathcal{D}'(G \times H)$ s'identifie canoniquement avec sa topologie au produit tensoriel projectif $\mathcal{D}'(G) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(H)$.

Soit G_1 (resp. H_1) un sous-groupe ouvert de G (resp. H) tel que G_1/G_0 (resp. H_1/H_0) soit compact, et soit $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) la famille des bons sous-groupes de G_1 (resp. H_1). Les sous-groupes $k \times h$ pour $k \in \mathcal{G}$ et $h \in \mathcal{H}$ forment une famille filtrante de bons sous-groupes de $G_1 \times H_1$, d'intersection réduite à l'élément neutre. On a donc $\mathcal{D}(G_1 \times H_1) = \varinjlim \mathcal{D}((G_1/k) \times (H_1/h))$ pour $k \in \mathcal{G}$ et $h \in \mathcal{H}$. Or $\mathcal{D}((G_1/k) \times (H_1/h))$ est isomorphe à

$$\mathcal{D}(G_1/k) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H_1/h),$$

qui s'identifie avec sa topologie à un sous-espace fermé de $\mathcal{D}(G_1) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H_1)$ puisque $\mathcal{D}(G_1/k)$ par exemple admet un supplémentaire topologique dans $\mathcal{D}(G_1)$. Par suite, on obtient ainsi une application linéaire continue *injective* de $\mathcal{D}(G_1 \times H_1)$ sur un sous-espace E de $\mathcal{D}(G_1) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H_1)$ et un théorème de GROTHENDIECK ([13], proposition 14) assure que $\mathcal{D}(G_1) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H_1)$ induit sur E la topologie limite inductive des $\mathcal{D}(G_1/k) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H_1/h)$, c'est-à-dire la topologie de $\mathcal{D}(G_1 \times H_1)$. Comme ce dernier espace est complet et que E contient le produit tensoriel algébrique $\mathcal{D}(G_1) \otimes \mathcal{D}(H_1)$, on a

$$E = \mathcal{D}(G_1) \overline{\otimes} \mathcal{D}(H_1),$$

d'où l'assertion (a) dans le cas $G = G_1$ et $H = H_1$. On passe de là au cas général en utilisant le même résultat de GROTHENDIECK, qui entraîne la commutation du produit tensoriel inductif avec les sommes directes.

Quant à l'assertion (b), elle résulte aussitôt du résultat correspondant pour les groupes de Lie, du corollaire 4 au théorème 2 et des propriétés de commutation du produit tensoriel projectif avec les produits directs topologiques et les limites projectives [13]. On en déduit aussitôt la conséquence suivante :

COROLLAIRE 1. — *Soit S (resp. T) une distribution sur G (resp. H). Il existe sur $G \times H$ une distribution $S \times T$ et une seule telle que*

$$S \times T(\varphi \otimes \psi) = S(\varphi)\, T(\psi)$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ et toute $\psi \in \mathcal{D}(H)$. L'application $(S, T) \to S \times T$ est continue de $\mathcal{D}'(G) \times \mathcal{D}'(H)$ dans $\mathcal{D}'(G \times H)$.

D'autre part, on déduit de (a) :

COROLLAIRE 2 (théorème des noyaux). — *Soit A une application linéaire continue de $\mathcal{D}(G)$ dans l'espace $\mathcal{D}'(H)$ muni de la topologie faible. Il existe une distribution T sur $G \times H$ et une seule telle que $A(\varphi)(\psi) = T(\varphi \otimes \psi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ et $\psi \in \mathcal{D}(H)$.*

6. Convolution et régularisation. — Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, la fonction $\tilde{\varphi} : (x, y) \to \tilde{\varphi}(xy)$ est *régulière* sur $G \times G$: il suffit de le montrer pour $\varphi \in \mathcal{D}(G_1)$. Il existe alors un bon sous-groupe k tel que $\varphi \in \mathcal{D}_k(G_1)$. En considérant φ comme une fonction sur le groupe de Lie G_1/k, on voit immédiatement que la restriction de $\tilde{\varphi}$ à $G_1 \times G_1$ est régulière. Soit maintenant $(x, y) \in G \times G$: si $xy \notin G_1$, la fonction $\tilde{\varphi}$ est identiquement nulle au voisinage de (x, y). Si $z = xy \in G_1$, on a $\tilde{\varphi}(ux, yv) = \tilde{\varphi}(uz, v)$. Comme $G_1 x \times y G_1$ est un voisinage de (x, y), ceci montre que $\tilde{\varphi}$ est régulière au voisinage de (x, y).

Soient alors S et T deux distributions sur G et supposons que le support de $S \times T$ (qui est évidemment le produit du support de S et du support de T) rencontre le support de n'importe quelle fonction de la forme $\tilde{\varphi}$ suivant un compact (ce qui est toujours le cas à l'une des distributions S ou T est à support compact). On peut alors définir le produit scalaire $S \times T(\tilde{\varphi})$ et l'on vérifie sans difficultés que l'application $\varphi \to S \times T(\tilde{\varphi})$ est une distribution sur G, notée $S \star T$. Ce produit de convolution possède toutes les bonnes propriétés habituelles : il est associatif si toutes les distributions considérées sont à support compact sauf une au plus, commutatif si G l'est. Si K est un compact de G, l'application $(S, T) \to S \star T$ est *continue* de

$\mathcal{E}'(K) \times \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$: soit, en effet, B un borné de $\mathcal{D}(G)$. Il nous faut montrer que si $S \to 0$ dans $\mathcal{E}'(K)$ et si $T \to 0$ dans $\mathcal{D}'$, alors $S \star T(\varphi) \to 0$ uniformément pour $\varphi \in B$. On se ramène aussitôt au cas où $K \subset G_1$ et $B \subset \mathcal{D}(G_1)$. Les fonctions φ ont alors leur support contenu dans un même compact $H \subset G_1$ et l'intersection du support de $S \star T$ avec le support d'une $\tilde{\varphi}$ est, pour $\varphi \in B$, contenue dans le compact fixe $L = K \times K^{-1} H$ de $G_1 \times G_1$. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G_1 \times G_1)$ avec $\alpha = 1$ sur un voisinage de L. Les fonctions $\alpha\tilde{\varphi}$ décrivent un borné de $\mathcal{D}(G_1 \times G_1)$, on a $S \star T(\varphi) = S \times T(\alpha\tilde{\varphi})$ et notre assertion résulte du corollaire 1 du théorème 3.

On en déduit aussitôt que l'application $(S, T) \to S \star T$ est continue de $\mathcal{E}'(K) \times \mathcal{E}'(H)$ dans $\mathcal{E}'(KH)$ et qu'elle est *séparément continue* de $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$.

Passons maintenant à la *régularisation* : pour $T \in \mathcal{D}'$, nous désignerons par $\check{T}$ la distribution image de T par l'anti-isomorphisme $x \to x^{-1}$ de G sur lui-même. Le produit de convolution d'une fonction régulière α et d'une distribution T sera alors défini de manière suivante : l'application $\alpha \to \alpha \star T$ (resp. $\alpha \to T \star \alpha$) est la *transposée* de l'application $S \to S \star \check{T}$ (resp. $S \to \check{T} \star S$) (de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ si $T \in \mathcal{E}'$, de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$ si T est à support quelconque). Les propriétés algébriques (associativité, etc.) sont évidentes. Si μ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur G, on a

$$(T \star \alpha).\mu = T \star (\alpha.\mu) \ [\text{resp. } (\alpha \star T).\mu = (\alpha.\mu) \star T].$$

Enfin :

Proposition 7. — *L'application $(\alpha, T) \to \alpha \star T$ est séparément continue de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$) dans $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{D} \times \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}$.*

La continuité en α pour T fixé résulte de la définition. Soit. d'autre part, K un compact de G et soit α fixe dans $\mathcal{D}$. La continuité de l'application $(S, T) \to S \star T$ de $\mathcal{E}'(K) \times \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ entraîne que si T tend vers zéro dans $\mathcal{E}'(K)$, les opérateurs $S \to \check{T} \star S$ sont équicontinus dans $\mathcal{D}'$ et tendent vers zéro uniformément sur tout borné de $\mathcal{D}'$: par suite, $\alpha \star T$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{E}'$ est limite inductive des $\mathcal{E}'(K)$, on en déduit la continuité séparée de $\alpha \star T$ de $\mathcal{D} \times \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}$. Dans les deux autres cas, on peut se borner à regarder $\alpha \star T$ dans un voisinage ouvert relativement compact U de e. Si T par exemple est à support compact K, et tend vers zéro dans $\mathcal{E}'(K)$, on choisira une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ égale à 1 sur un voisinage de $\bar{U}K^{-1}$: on vérifie facilement que $\alpha \star T = (\varphi\alpha) \star T$ dans U, et l'on est ramené au cas précédent. On raisonne de façon analogue pour la continuité séparée de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}$.

7. Propriétés fonctorielles. — Soient G et H deux groupes localement compacts, et soit ρ une représentation continue de H dans G :

Proposition 8. — *L'application ρ' : $\varphi \to \varphi \circ \rho$ est une application linéaire-continue de $\mathcal{E}(G)$ dans $\mathcal{E}(H)$.*

La régularité d'une fonction et la convergence dans $\mathcal{E}$ sont des questions locales : on peut donc se borner à regarder $\varphi\circ\rho$ dans un voisinage compact K suffisamment petit de e. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, avec $\alpha = 1$ sur un voisinage de $\rho(K)$: on a $\varphi\circ\rho = (\alpha\varphi)\circ\rho$ dans K. On peut par suite supposer que $\varphi\in\mathcal{D}(G_1)$ et il suffit de montrer que, pour tout bon sous-groupe k de G_1, l'application $\varphi \to \varphi\circ\rho$ est continue de $\mathcal{D}_k(G_1)$ dans $\mathcal{E}(H)$. Autrement dit, on est ramené au cas où G est un groupe de Lie. De plus, on peut remplacer H par n'importe quel sous-groupe ouvert et, par suite, supposer que H est dénombrable à l'infini et que la famille des bons sous-groupes de H a une intersection réduite à l'élément neutre. La représentation ρ est alors un homomorphisme et $H/\rho^{-1}(e)$ est lui aussi un groupe de Lie. Il existe donc un bon sous-groupe k de H tel que $k\subset\rho^{-1}(e)$ et la représentation ρ se factorise en $H \xrightarrow{i} H/k \xrightarrow{j} G$. La représentation continue j du groupe de Lie H/k dans G est nécessairement analytique. Par suite, l'application $\varphi\to\varphi\circ j$ est continue de $\mathcal{E}(G)$ dans $\mathcal{E}(H/k)$, d'où le résultat, car l'application $\psi\to\psi\circ i$ est évidemment continue de $\mathcal{E}(H/k)$ dans $\mathcal{E}(H)$.

Par transposition, on obtient une application continue de $\mathcal{E}'(H)$ dans $\mathcal{E}'(G)$ (image directe d'une distribution à support compact). Si l'on suppose de plus que la représentation ρ est *propre*, on vérifie facilement que ρ' est aussi une application linéaire continue de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{D}(H)$, donc définit par transposition, une application linéaire continue de $\mathcal{D}'(H)$ dans $\mathcal{D}'(G)$. En particulier :

Proposition 9. — *Soit H un sous-groupe fermé de G et soit ρ l'injection de H dans G. L'application ρ' : $\varphi\to\varphi\circ\rho$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{D}(G)$ sur $\mathcal{D}(H)$ et une partie bornée de $\mathcal{D}(H)$ est contenue dans l'image d'une partie bornée de $\mathcal{D}(G)$. Par suite, la transposée de ρ' est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}'(H)$ sur un sous-espace fermé de $\mathcal{D}'(G)$.*

Comme $\mathcal{D}(G)$ [resp. $\mathcal{D}(H)$] est la somme directe des divers $\mathcal{D}(xG_1)$ [resp. $\mathcal{D}(H\cap xG_1)$], il suffit de faire la démonstration dans le cas $G=G_1$. Soit alors k un bon sous-groupe de G; le groupe $H/H\cap k \approx Hk/k$ est un groupe de Lie et les $H\cap k$ forment une famille de bons sous-groupes de H, d'intersection réduite à $\{e\}$. On a donc $\mathcal{D}(G) = \varinjlim \mathcal{D}(G/k)$ et $\mathcal{D}(H) = \varinjlim \mathcal{D}(H/H\cap k)$ pour $k\in\mathcal{F}$ et nos assertions se déduisent immédiatement des assertions correspondantes pour un groupe de Lie, compte tenu du théorème 2.

8. Distributions sur un espace homogène. — Soit H un sous-groupe fermé de G. Considérons l'espace homogène G/H des classes à gauche modulo H; soit i_H l'application canonique de G sur G/H et soit K un compact de G/H. Nous désignerons par $\mathcal{D}(G/H;\ K)$ l'espace des fonctions f sur G/H, à support dans K et telles que $f\circ i_H\in\mathcal{E}(G)$. L'application $f\to f\circ i_H$ identifie $\mathcal{D}(G/H;\ K)$ à un sous-espace fermé de $\mathcal{E}(G)$ et nous transporterons à $\mathcal{D}(G/H;\ K)$ la topologie induite par $\mathcal{E}$ sur ce sous-espace. Enfin, l'espace $\mathcal{D}(G/H)$ sera la limite inductive des $\mathcal{D}(G/H;\ K)$ quand K décrit l'ensemble des parties compactes de G/H, et l'espace $\mathcal{D}'(G/H)$ sera le dual fort de $\mathcal{D}(G/H)$.

D'autre part, pour $\varphi\in\mathcal{D}(G)$, la fonction $\varphi\bigstar\mu_H$ appartient à $\mathcal{E}(G)$ et est invariante à droite suivant H : elle définit donc une fonction $\pi(\varphi)$ sur G/H et la proposition 7 entraîne que π est une application continue de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{D}(G/H)$. En réalité :

PROPOSITION 10. — *L'application π est un homomophisme surjectif de $\mathcal{D}(G)$ sur $\mathcal{D}(G/H)$ et une partie bornée de $\mathcal{D}(G/H)$ est contenue dans l'image d'une partie bornée de $\mathcal{D}(G)$.*

Il suffit de construire une application continue de $\mathcal{D}(G/H)$ dans $\mathcal{D}(G)$ qui soit inverse à droite de π. Pous cela, on construit une fonction $\beta\in\mathcal{E}(G)$, telle que, pour tout compact $K\subset G/H$, l'intersection de $i_H^{-1}(K)$ avec le support de β soit compacte et que $\beta\bigstar\mu_H=1$ (voir [3], p. 103 : les raisonnements faits dans le cas d'un groupe de Lie sont valables sans modifications, en tenant compte de ce qu'un espace homogène d'un groupe localement compact est toujours paracompact). Si $f\in\mathcal{D}(G/H)$, la fonction $\beta(f\circ i_H)$ appartient à $\mathcal{D}(G)$, on a $\pi(\beta(f\circ i_H))=f$ et l'application $f\to\beta(f\circ i_H)$ est continue, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1. — *Les opérations de G dans G/H définissent une représentation continue de G dans $\mathcal{D}(G/H)$.*

COROLLAIRE 2. — *L'espace $\mathcal{D}(G/H)$ est un espace de Montel complet, nucléaire si G est séparable. L'espace $\mathcal{D}'(G/H)$ est un espace de Montel nucléaire et complet.*

En effet, $\mathcal{D}(G/H)$ est, par définition même, une somme directe de limites inductives strictes de suites de sous-espaces fermés de $\mathcal{E}(G)$. Par suite, il est complet et ses parties bornées sont relativement compactes. D'autre part, la proposition 10 montre que $\mathcal{D}(G/H)$ est tonnelé, et est nucléaire si $\mathcal{D}(G)$ l'est. Quant à $\mathcal{D}'(G/H)$, la proposition 10 montre qu'il s'identifie avec sa topologie à un sous-espace fermé de $\mathcal{D}'(G)$. Il est donc nucléaire et complet, et est aussi tonnelé puisque $\mathcal{D}(G/H)$ est semi-réflexif.

Soit (Ω_i) une partition de G/H en ensembles ouverts et soit $\mathcal{D}(\Omega_i)$ le sous-espace de $\mathcal{D}(G/H)$ formé de fonctions à support dans Ω_i. On déduit aussitôt de la proposition 10 que $\mathcal{D}(G/H)$ est somme directe topologique des $\mathcal{D}(\Omega_i)$. En particulier, considérons la partition de G/H correspondant à la partition de G en *doubles classes* G_1xH. On peut construire de manière différente l'espace $\mathcal{D}(G_1xH/H)$: tout d'abord, on se ramène au cas $x=e$ par une translation à gauche par x^{-1} et en remplaçant G_1 par $x^{-1}G_1x$. Si K est un compact de G_1, l'application qui, à une fonction $f\in\mathcal{E}(G)$, invariante à droite par H et à support dans KH, fait correspondre sa restriction à G_1, est un isomorphisme topologique du sous-espace de $\mathcal{E}(G; KH)$ formé des fonctions invariantes par H sur le sous-espace de $\mathcal{E}(G_1; KH_1)$ formé des fonctions invariantes par H_1 (on a posé $H_1 = H \cap G_1$). Par suite, $\mathcal{D}(G_1 H/H)$ est isomorphe à $\mathcal{D}(G_1/H_1)$ et la proposition 10 entraîne que $\mathcal{D}(G_1/H_1)$ est isomorphe à la limite inductive des $\mathcal{D}(G_1/H_1 k)$ pour k décrivant la famille des bons sous-groupes de G_1.

En particulier, si H est *distingué*, alors G/H est un groupe localement compact et l'on déduit facilement de ce qui précède que la définition donnée au début de ce numéro de l'espace $\mathcal{D}(G/H)$ est équivalente à notre définition initiale.

Remarque. — Soit Ω un ouvert de G/H. On désignera par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions régulières sur G/H à support compact contenu dans Ω, muni de la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{D}(G/H; K)$ pour K compact contenu dans Ω (topologie qui est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{D}(G/H)$). Une distribution sur Ω sera un élément du dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Il est clair que toute distribution sur G/H induit une distribution sur Ω par restriction. D'autre part, on a un principe de recollement : si (Ω_i) est un recouvrement ouvert de G/H et si T_i est une distribution sur Ω_i telle que $T_i(\varphi) = T_j(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i \cap \Omega_j)$, alors il existe une distribution T et une seule sur G/H telle que $T(\varphi) = T_i(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$. De plus, si Ω est contenu dans G_1/H_1 et s'il existe un bon sous-groupe k de G_1 tel que $k\Omega = \Omega$, on vérifie aisément que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est la limite projective des espaces $\mathcal{D}'(\Omega_h)$ (où Ω_h est l'image canonique de Ω dans $G_1/H_1 h$) quand h décrit la famille des bons sous-groupes contenus dans k.

9. Distributions tempérées et transformation de Fourier dans le cas abélien. — Dans ce numéro, nous supposerons que G est *commutatif*. Nous désignerons par $\hat{G}$ le groupe dual de G et par $f \to \hat{f}$ la transformation de Fourier. A un bon sous-groupe k de G correspond par dualité un sous-groupe $k^{\perp}$ de $\hat{G}$ qui est *ouvert* (puisque $\check{G}/k^{\perp} \approx \hat{k}$ est discret) et *engendré par un voisinage compact de e* (car le groupe de Lie G/k est extension d'un groupe discret par un groupe de Lie connexe, donc de la forme $R^n \times T^p$; par suite, $k^{\perp} \approx (G/k)\hat{}$ est extension d'un groupe $R^n \times Z^p$ par un sous-groupe compact). Inversement, à un sous-groupe Γ de G, ouvert et engendré par un voisinage compact de e, correspond un bon sous-groupe $\Gamma^{\perp}$ de G (*cf.* [26], p. 110).

D'autre part, dire que f est invariante par un sous-groupe fermé H de G est équivalent à dire que $\hat{f}$ a son support dans $H^{\perp}$. Nous sommes donc amenés à considérer les couples (k, Γ) formés d'un bon sous-groupe k et d'un sous-groupe ouvert Γ engendré par un voisinage compact de e, avec $k \subset \Gamma$. Le groupe Γ/k est alors un groupe de Lie élémentaire de la forme $R^n \times T^p \times Z^q \times \Phi$, où Φ est un groupe fini. Soit $\mathcal{S}(k, \Gamma)$ l'espace des fonctions sur G, à support contenu dans Γ, invariantes par k, et qui, considérées comme fonctions sur Γ/k sont indéfiniment différentiables à décroissance rapide, muni de la topologie transportée de celle de $\mathcal{S}(\Gamma/k)$ (*cf.* [23], chap. VII ou [3], p. 138). Nous désignerons par $\mathcal{S}(G)$ l'espace *limite inductive* des $\mathcal{S}(k, \Gamma)$: il est immédiat que $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{E}(G)$, les injections étant continues et $\mathcal{D}(G)$ étant dense dans $\mathcal{S}(G)$. Par suite, le dual fort $\mathcal{S}'(G)$ de $\mathcal{S}(G)$ (espace des *distributions tempérées* sur G) s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(G)$, contenant $\mathcal{E}'(G)$, et les injections de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{S}'$ et de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{D}'$ sont continues.

Quant à la *transformation de Fourier*, c'est un isomorphisme de $\mathcal{S}(k, \Gamma) \approx \mathcal{S}(\Gamma/k)$ sur $\mathcal{S}(\Gamma^{\perp}, k^{\perp}) \approx \mathcal{S}(\Gamma^{\perp}/k^{\perp}) \approx (\mathcal{S}(\Gamma/k)^{\wedge})$ et par suite c'est un *isomorphisme topologique de* $\mathcal{S}(G)$ *sur* $\mathcal{S}(\hat{G})$, donc, par transposition, *de* $\mathcal{S}'(G)$ sur $\mathcal{S}'(\hat{G})$.

D'autre part, on démontre exactement comme pour $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (en remplaçant le projecteur π_k par l'application qui, à une $f \in \mathcal{S}$, fait correspondre la restriction à Γ de $f \star \mu_k$) les résultats suivants (dont nous laisserons au lecteur le soin de faire les démonstrations) :

PROPOSITION 11.

a. $\mathcal{S}(k, \Gamma)$ *est facteur direct topologique dans* $\mathcal{S}(G)$. *L'espace* $\mathcal{S}(G)$ *est limite inductive stricte des* $\mathcal{S}(k, \Gamma)$ *et une partie bornée de* $\mathcal{S}(G)$ *est contenue dans l'un des* $\mathcal{S}(k, \Gamma)$. *L'espace* $\mathcal{S}(G)$ *est un espace de Montel complet et bornologique et est nucléaire si et seulement si* G *est séparable.*

b. L'espace $\mathcal{S}'(G)$ *est limite projective des espaces* $\mathcal{S}'(\Gamma/k)$. *C'est un espace de Montel nucléaire et complet.*

10. Algèbre de Lie et algèbre enveloppante. — Soit $U(G)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{D}'(G)$ formé des distributions de support $\{e\}$: c'est une *sous-algèbre* de $\mathcal{E}'$ (pour la convolution). Il est clair que, pour l'étude de $U(G)$, on peut supposer $G = G_1$. L'espace $\mathcal{D}'(G) = \mathcal{D}'(G_1)$ est alors limite projective des $\mathcal{D}'(G/k)$ pour $k \in \mathcal{F}$; par suite, $U(G)$ est limite projective de ses images dans les $\mathcal{D}'(G/k)$ et il est clair que l'image de $U(G)$ dans $\mathcal{D}'(G/k)$ est contenue dans $U(G/k)$ [qui s'identifie à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $A(G/k)$ de G/k]. En réalité, cette image est $U(G/k)$ tout entier et l'on a $U(G) = \varprojlim U(G/k)$. Plus généralement, si F est un sous-ensemble fermé quelconque de G, l'espace $\mathcal{D}'(G; F)$ des distributions à support dans F est la limite projective des sous-espaces $\mathcal{D}'(G/k; Fk/k)$: il suffit évidemment de vérifier que si T appartient au sous-espace fermé $\varprojlim \mathcal{D}'(G/k; Fk/k)$ de $\mathcal{D}'(G)$, alors T est à support dans F. Or, soit x un point de G non dans F, soient U un voisinage ouvert de x et k un bon sous-groupe de G tels que $U \cap F = \emptyset$ et $Uk = kU = U$; soit $f \in \mathcal{D}(G)$ à support dans U : il existe un bon sous-groupe $h \subset k$ avec $f \in \mathcal{D}_h(G)$. On a alors $T(f) = ({}^t\pi_h T)(f)$ et le produit scalaire $T(f)$ s'obtient encore en faisant le produit scalaire de f

considérée comme fonction sur G/h et de ${}^t\pi_h T$ considérée comme distribution sur G/h. Avec ces identifications, f est à support dans U/h et ${}^t\pi_h T$ est à support dans Fh/h. Comme $U = Uh$, on a $U \cap Fh = \emptyset$ et, par suite, $T(f)$ est nul.

Si H est un sous-groupe fermé de G l'algèbre $U(H)$ s'identifie à une sous-algèbre fermée de $U(G)$ (*cf.* proposition 9). En particulier, soit G_0 la composante connexe de e dans G : l'injection canonique de $U(G_0)$ dans $U(G)$ est un *isomorphisme* topologique. En effet, $U(G_0)$ est la limite projective des $U(G_0/G_0 \cap k)$ et $G_0/G_0 \cap k$ est isomorphe à $G_0 k/k$, c'est-à-dire à la composante connexe de e dans le groupe de Lie G/k. On a donc $U(G_0/G_0 \cap k) \approx U(G/k)$, d'où notre assertion.

On peut donc supposer si l'on veut que G est connexe. Par ailleurs, si G est *totalement discontinu*, alors $U(G)$ se réduit aux multiples scalaires de la mesure de Dirac en e.

Soit maintenant $A(G/k)$ l'algèbre de Lie de G/k, considérée comme sous-espace de $U(G/k)$: les $A(G/k)$ forment un sous-système projectif du système des $U(G/k)$, et nous désignerons par $A(G)$, et appellerons *algèbre de Lie* de G le sous-espace fermé de $U(G)$ limite projective des $A(G/k)$. C'est effectivement une sous-algèbre de Lie de $U(G)$ pour la structure d'algèbre de Lie de $U(G)$ déduite de sa structure d'algèbre associative et la sous-algèbre associative *fermée* engendrée par $A(G)$ dans $U(G)$ est $U(G)$ tout entière. Si H est un sous-groupe fermé de G, $A(H)$ est une sous-algèbre fermée de $A(G)$; plus généralement, on a des propriétés fonctorielles de $A(G)$ et de $U(G)$ relativement aux représentations continues, que nous laisserons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer. En particulier, $A(k)$ est, pour $k \in \mathcal{F}$, le *noyau* de l'application canonique de $A(G)$ sur $A(G/k)$. D'autre part, les automorphismes intérieurs définissent une représentation continue de G dans $A(G)$ appelée *représentation adjointe* (1).

L'espace $A(G)$ est limite projective d'espaces de dimension finie, donc est linéairement compact et isomorphe à un produit direct topologique de droites [16]. Plus généralement, tout sous-espace fermé M de $A(G)$ est isomorphe à un espace produit R^I et admet un supplémentaire topologique dans $A(G)$. Nous appellerons *base topologique* de M une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de M telle que l'application $(\lambda_i) \rightarrow \Sigma \lambda_i x_i$ définisse un isomorphisme topologique de R^I sur M.

Identifions $U(G/k)$ à l'algèbre enveloppante de $A(G/k)$: on sait (*cf.* [2]) que la restriction au sous-espace $S_r(A(G/k))$ des tenseurs symétriques d'ordre r de l'application canonique de l'algèbre tensorielle de $A(G/k)$ dans $U(G/k)$ est un isomorphisme sur un sous-espace $U_r(G/k)$ de $U(G/k)$. Les $U_r(G/k)$ forment, pour r fixé, un sous-système projectif du système des $U(G/k)$ et leur limite projective est un sous-espace fermé $U_r(G)$ qni est

(1) Comparer avec [9] et [15].

topologiquement isomorphe au sous-espace fermé $\hat{S}_r(A(G))$ engendré par les tenseurs symétriques dans le produit tensoriel projectif $\hat{\otimes}^r A(G)$ de r exemplaires de $A(G)$. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une base topologique de $A(G)$, on obtient comme suit une base topologique de $U_r(G)$: pour toute famille $\alpha=(\alpha_i)_{i\in I}$ d'entiers positifs, nuls, sauf un nombre fini, on désigne par X^α l'élément de $U(G)$ image canonique du tenseur symétrique dont l'image canonique dans l'algèbre symétrique de $A(G)$ est le monôme $\Pi X_i^{\alpha_i}$; alors, les X^α pour $|\alpha|=\Sigma\alpha_i=r$ forment une base topologique de $U_r(G)$.

De plus, $U(G/k)$ est somme directe des $U_r(G/k)$ (et même somme directe topologique, *voir* la proposition 12 ci-dessous) : tout élément $x\in U(G/k)$ s'écrit d'une manière et d'une seule comme somme Σx_r, avec $x_r\in U(G/k)$, $x_r=0$ pour r assez grand, et x_r dépend continûment de x ([23], chap. I, p. 101). Soit alors $x\in U(G)$: l'élément $x_k={}^t\pi_k(x)\in U(G/k)$ s'écrit $x_k=\Sigma x_{k,r}$ et l'on vérifie aussitôt que les $x_{k,r}$ forment, pour r fixé, un sous-système projectif, donc définissent un élément $x_r\in U_r(G)$. On a $x=\Sigma x_r$, la série étant *convergente* dans $U(G)$ et chaque x_r dépendant continûment de x. Réciproquement, si l'on se donne des $x_r\in U_r(G)$ tels que, pour tout $k\in\mathcal{F}$, on ait ${}^t\pi_k(x_r)=0$ pour r assez grand, alors la série Σx_r converge vers un élément de $U(G)$.

11. Distributions ayant pour support un sous-groupe fermé. — Nous allons dans ce numéro étudier les distributions sur G qui ont leur support contenu dans une partie fermée F d'un sous-groupe fermé H. Pour simplifier les notations, nous supposerons que $G=G_1$ et nous désignerons, si k est un bon sous-groupe de G, par π_k l'application canonique de $\mathcal{D}'(G)$ sur $\mathcal{D}'(G/k)$.

Supposons tout d'abord que G soit un *groupe de Lie*. Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une base d'un supplémentaire de $A(H)$ dans $A(G)$. On sait (*voir* [23], chap. I, p. 101 et [3], p. 106) que toute distribution T sur G à support compact contenu dans F s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\Sigma X^\alpha \star T_\alpha$, où les T_α sont des distributions sur H, à support compact contenu dans F, nulles sauf un nombre fini, et dépendant continûment de T. Soit alors S_r le sous-espace de $U(G)$ engendré par les X^α pour $|\alpha|=r$: l'application $(X, T)\to X\star T$ définit donc une bijection λ de l'espace somme directe des $S_r\otimes\mathcal{E}'(H; F)$ sur l'espace $\mathcal{E}'(G; F)$. Plus précisément :

Proposition 12. — *Si G est un groupe de Lie, λ est un isomorphisme de l'espace somme directe topologique $\Sigma\, S_r\otimes\mathcal{E}'(H; F)$ sur $\mathcal{E}'(G; F)$. L'espace $\Sigma\, S_r\otimes\mathcal{E}'(H; F)$ est aussi le produit tensoriel projectif $(\Sigma\, S_r)\hat{\otimes}\mathcal{E}'(H; F)$.*

En effet, λ est continue. D'autre part, $\mathcal{E}'(G; F)$ est un espace $(\mathcal{D}\mathcal{F})$ comme tout sous-espace fermé M de $\mathcal{E}'(G)$: en effet, $\mathcal{E}'$ est le dual d'un espace de Fréchet nucléaire; M s'identifie donc au dual fort de son orthogonal M^0 dans $\mathcal{E}$ ([12], théorème 12), qui est lui aussi un espace de Fréchet. Pour montrer que λ^{-1} est continue, il suffit d'après un résultat de Grothendieck sur les espaces ($\mathcal{DF}$) ([12], p. 69) de vérifier que la restriction de λ^{-1} à une partie *bornée* B de $\mathcal{E}'(G; F)$ est continue. Or, les parties bornées de $\mathcal{E}'$ sont formées de distributions d'ordre borné. Par suite, il existe un entier s tel que $\lambda^{-1}(\mathrm{B}) \subset \sum_0^s S_r \otimes \mathcal{E}'(H; F)$ et notre assertion résulte de ce que les T_α dépendent continûment de T. Quant à la seconde partie de la proposition, elle découle d'un résultat général sur le produit tensoriel projectif d'une somme directe dénombrable et d'un espace ($\mathcal{DF}$) ([13], proposition 6).

Remarque. — Il est clair qu'un résultat analogue est valable si l'on remplace G par une variété différentiable dénombrable à l'infini et F par un sous-ensemble fermé d'une sous-variété H de G telle qu'il existe au voisinage de F des champs de vecteurs différentiables formant en tout point de H une base d'un supplémentaire de l'espace tangent à H dans l'espace tangent à G.

Passons maintenant au cas où G est seulement supposé *métrisable* et soit (k_n) une suite décroissante cofinale à F. Posons $\pi_n = \pi_{k_n}$. On montre facilement qu'on peut construire (par récurrence sur n) une suite d'éléments X_i de $A(G)$ et une suite croissante d'entiers $i(n)$ telles que $X_i \in A(k_n)$ pour $i > i(n)$ et que les $\pi_n(X_i)$ forment, pour $1 \leqq i \leqq i(n)$ une base d'un supplémentaire de $A(Hk_n/k_n)$ dans $A(G/k_n)$. Soit X le sous-espace fermé engendré par les X_i : il s'identifie à la limite projective des $A(G/k_n)/A(Hk_n/k_n)$, donc, grâce à la linéaire compacité de $A(G)$, à $A(G)/A(H)$. Par suite, X est un supplémentaire topologique de $A(H)$ dans $A(G)$ et les X_i forment une base topologique de X. Soit S le sous-espace fermé engendré par les X^α dans $U(G)$. L'application $(X, T) \to X \star T$ est une application bilinéaire continue de $S \times \mathcal{E}'(H; F)$ dans $\mathcal{E}'(G; F)$ (n° 6), donc définit une application linéaire continue λ du produit tensoriel projectif $S \hat{\otimes} \mathcal{E}'(H; F)$ dans $\mathcal{E}'(G; F)$.

Proposition 13. — *Si G est métrisable et si F est compact, λ est un isomorphisme topologique de $S \hat{\otimes} \mathcal{E}'(H; F)$ sur $\mathcal{E}'(G; F)$.*

Posons $S_n = \pi_n(S)$. Soit ρ_n l'application $\pi_n \otimes \pi_n$ de $S \hat{\otimes} \mathcal{E}'(H; F)$ dans $S_n \otimes \mathcal{E}'(Hk_n/k_n; Fk_n/k_n)$: comme S est limite projective des S_n et que $\mathcal{E}'(H; F)$ est limite projective des $\mathcal{E}'(Hk_n/k_n; Fk_n/k_n)$, l'espace $S \hat{\otimes} \mathcal{E}'(H; F)$ est limite projective des $S_n \hat{\otimes} \mathcal{E}'(Hk_n/k_n; Fk_n/k_n)$, et de même $\mathcal{E}'(G; F)$ est limite projective des $\mathcal{E}'(G/k_n; Fk_n/k_n)$ (on a utilisé le corollaire 4 au théorème 2 et la proposition 6, b, grâce à l'hypothèse F compact). D'autre part, soit λ_n l'application linéaire continue de $S_n \hat{\otimes} \mathcal{E}'(Hk_n/k_n; Fk_n/k_n)$ dans $\mathcal{E}'(G/k_n; Fk_n/k_n)$ déduite de la convolution : on a $\lambda_n \circ \rho_n = \pi_n \circ \lambda$ et λ est l'application limite projective des λ_n. Il suffit donc de montrer que λ_n est un isomorphisme topologique, ce qui résulte de la proposition 12, puisque les $\pi_n(X_i)$ forment pour $1 \leqq i \leqq i(n)$ une base d'un supplémentaire de $A(Hk_n/k_n)$ dans $A(G/k_n)$ et sont nuls pour $i > i(n)$: l'espace S_n n'est donc autre que l'espace S associé à la base $(X_i)_{1 \leqq i \leqq i(n)}$.

Si G n'est plus métrisable, on peut encore considérer un supplémentaire topologique X de $A(H)$ dans $A(G)$, une base topologique (X_i) de X et former l'espace S engendré par les X^α. On obtient alors une application linéaire continue λ de $S \hat{\otimes} \mathcal{E}'(H; F)$ dans $\mathcal{E}'(G; F)$ et l'image de λ est dense dans $\mathcal{E}'(G; F)$, car, pour tout $k \in \mathcal{F}$, l'image de $\pi_k \circ \lambda$ est $\mathcal{E}'(G/k; Fk/k)$ tout entier. On en déduit facilement la :

PROPOSITION 14. — *Si G est totalement discontinu, toute distribution de support H est l'image canonique d'une distribution sur H.*

12. Opérateurs différentiels. — Dans ce numéro, nous supposerons pour simplifier que G est *connexe*. Pour tout $X \in U(G)$, nous désignerons par X_g (resp. X_d) l'application $T \to T \star X$ (resp. $T \to X \star T$) de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ (ou de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$) et nous l'appellerons l'*opérateur différentiel invariant à gauche* (resp. à *droite*) défini par X. Un premier résultat est que, *si T est une distribution telle que $X \star T = 0$ pour tout $X \in A(G)$, alors T est un multiple scalaire de la mesure de Haar à gauche sur G :* en effet, pour tout bon sous-groupe k, la distribution $T \star \mu_k$, considérée comme distribution sur le groupe de Lie connexe G/k, est annulée par tous les champs de vecteurs invariants à gauche, donc est un multiple de la mesure de Haar sur G/k ou encore sur G. Or T est limite des $T \star \mu_k$.

Plus généralement, nous appellerons *opérateur différentiel* sur G une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ telle que, pour tout compact K de G et tout bon sous-groupe k de G, il existe un bon sous-groupe $h \subset k$ et un opérateur différentiel Δ sur le groupe de Lie G/h (à coefficients indéfiniment différentiables) possédant la propriété suivante : si $f \in \mathcal{D}_k(G; K)$ (donc $f \in \mathcal{D}_h$) et si l'on identifie canoniquement $\mathcal{D}_h$ et $\mathcal{D}(G/h)$, alors $u(f) = \Delta(f)$. On vérifie aussitôt que les opérateurs différentiels forment une sous-algèbre Λ de $\mathcal{L}(\mathcal{D}; \mathcal{D})$, contenant les opérateurs de multiplication par les fonctions de $\mathcal{D}$ et les opérateurs X_g et X_d pour $X \in U(G)$. Nous allons voir que Λ est engendrée par les opérateurs de multiplication et par les X_d.

Pour cela, considérons une base topologique $(X_i)_{i \in I}$ de $A(G)$. Pour toute partie finie J de I, nous désignerons par X_J le sous-espace fermé de $A(G)$ engendré par les X_i pour $i \notin J$ et par $\tilde{J}$ l'ensemble des multi-indices

$$\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$$

tels que $\alpha_i = 0$ pour $i \notin J$. Soit $u \in \Lambda$, soit V un ouvert relativement compact de G et soient k et h deux bons sous-groupes de G tels que $h \subset k$, que $A(k) \subset X_J$ et que la condition de la définition d'un opérateur différentiel soit satisfaite avec $K = k\overline{V}$. Soient (Y_l) une base d'un supplémentaire de

$A(k)$ dans X_J et (Z_m) une base d'un supplémentaire de $A(h)$ dans $A(k)$. Tout opérateur différentiel sur le groupe de Lie G/h s'écrit dans l'ouvert Vh/h d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire finie à coefficients dans $\mathcal{E}(G/h)$ d'opérateurs $g \to Q \star g$, où Q parcourt les produits symétrisés des éléments X_i pour $i \in J$, Y_l et Z_m. Comme $Z_m \star f = 0$ pour $f \in \mathcal{D}_k$, on a, pour $f \in \mathcal{D}_k(kV)$:

$$u(f) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \lambda_\alpha(x) X^\alpha \star f + \ldots,$$

les termes non écrits faisant intervenir des produits symétrisés des X_i et des Y_l où interviennent effectivement des Y_l. On vérifie alors aisément que les coefficients $\lambda_\alpha(x)$ pour $x \in V$ ne dépendent ni du choix des Y_l et des Z_m, ni du choix de l'opérateur différentiel sur G/h coïncidant avec u sur $\mathcal{D}_k(kV)$, ni du choix du couple (h, k) satisfaisant aux conditions indiquées, et qu'ils ne changent pas non plus si l'on remplace J par une autre partie finie $J' \supset J$. Par suite, on définit ainsi pour chaque multi-indice α une fonction λ_α régulière sur V, et en faisant croître V, sur G tout entier.

D'autre part, si $f \in \mathcal{D}_k$, il existe une partie finie J de I telle que $X_J \subset A(k)$ et l'on vérifie facilement que $u(f) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \lambda_\alpha(x) X^\alpha \star f$. Autrement dit, on a d'une manière et d'une seule $u = \sum \lambda_\alpha(x) X_d^\alpha$, la série étant commutativement convergente dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{D}; \mathcal{D})$. Réciproquement, une telle série converge vers un opérateur différentiel si, pour toute partie finie J de I, et tout compact K de G, on a $\lambda_\alpha(x) = 0$ pour $x \in K$ et $\alpha \in \tilde{J}$, sauf pour un nombre fini de multi-indices $\alpha \in \tilde{J}$. En particulier, pour tout entier $r \geq 0$, la série $\sum_{|\alpha| = r} \lambda_\alpha(x) X_d^\alpha$ converge vers un opérateur différentiel u_r, qui est indépendant de la base (X_i) choisie, et l'on a $u = \sum u_r$. Si $u_r = 0$ pour $r > s$, nous dirons que u est d'ordre $\leq s$. On fera agir u dans $\mathcal{D}'$ en posant

$$u(T) = \sum (-1)^r\, {}^t u_r(T);$$

on vérifie aussitôt que cette définition est cohérente avec ce que nous avons dit plus haut pour les opérateurs X_d et X_g.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de fonction dérivable : nous dirons qu'une distribution est une fonction continue si c'est une mesure ayant une densité continue par rapport à une mesure de Haar sur G. Si l'on a fait le choix d'une mesure de Haar à gauche par exemple sur G, on identifiera alors la distribution et sa densité. Nous dirons qu'une distribution T est une fonction r fois dérivable si $u(T)$ est une fonction continue pour tout opérateur différentiel d'ordre $\leqq r$. Nous allons montrer que, *pour que T soit r fois dérivable, il faut et il suffit que $X \bigstar T$ soit une fonction continue pour tout* $X \in U^r(G) = \sum_0^r U_s(G)$. La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la satisfaite : l'application $\lambda : X \rightarrow X \bigstar T$ est alors continue de $U^r(G)$ dans l'espace $\mathcal{C}(G)$ des fonctions continues sur G (avec l'identification signalée plus haut). En effet, pour tout bon sous-groupe k, la distribution $T \bigstar \mu_k$ est une fonction r fois dérivable au sens usuel sur le groupe de Lie G/k. L'application $\lambda_k : X \rightarrow X \bigstar T \bigstar \mu_k$ est donc continue de $U^r(G)$ dans $\mathcal{C}(G)$. Mais, quand k converge vers $\{e\}$, l'application λ_k converge en tout point X vers λ. Comme $U^r(G)$ est tonnelé (comme produit topologique de droites), le théorème de Banach-Steinhaus entraîne que λ est continue. Soit alors K un compact de G : comme l'image par une application linéaire continue d'un espace produit topologique de droites dans un espace de Banach est nécessairement de dimension finie, le noyau de λ est un sous-espace fermé de codimension finie. Par suite, il n'existe qu'un nombre fini de multi-indices α avec $|\alpha| = r$ tels que la fonction continue $X^\alpha \bigstar T$ ne soit pas nulle sur K, d'où l'on déduit facilement notre assertion.

Des raisonnements analogues montrent que si $T \in D'$ est telle que $X \bigstar T$ soit une *mesure* pour tout $X \in A(G)$, alors pour tout ouvert relativement compact $V \subset G$, il existe une partie finie J de I telle $X_i \bigstar T = 0$ dans V, pour tout $i \notin J$.

D'autre part, on sait [14] que pour tout voisinage U de $\{e\}$, il existe un bon sous-groupe $k \subset U$ et un groupe de Lie local $L \subset U$ tel que G soit localement isomorphe à $L \times k$. Si l'on suppose G *localement connexe*, alors k doit être localement connexe, la composante connexe k_0 de e dans k est d'indice fini, et k_0 est un bon sous-groupe : la famille des bons sous-groupes *connexes* est donc cofinale à $\mathcal{F}$. Soit alors T une distribution à support compact telle que $X \bigstar T$ soit une mesure pour tout $X \in A(G)$: il existe un bon sous-groupe k connexe tel que $X \bigstar T = 0$ pour $X \in A(k)$. Quel que soit le bon sous-groupe h, on a $X \bigstar T \bigstar \mu_h = 0$ pour $X \in A(k)$ et comme le groupe de Lie kh/k est connexe, ceci entraîne que $T \bigstar \mu_h$ est invariante par k. Par suite, $T \in \mathcal{D}'_k$. On en déduit immédiatement que *sur un groupe localement connexe, toute fonction indéfiniment dérivable [ou plus généralement, toute distribution T telle que $X \bigstar T$ soit une mesure pour tout $X \in U(G)$, d'ordre fini] est une fonction régulière.*

Mais ceci n'est plus exact si G, bien que connexe, n'est plus localement connexe : supposons, par exemple, que G soit de dimension finie. Il existe alors un sous-groupe de Lie local L et un bon sous-groupe *totalement discontinu* k tel que G soit localement isomorphe à $L \times k$ ([19], p. 182). Si l'on prend pour T le « produit tensoriel » d'une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur L par une fonction continue sur k, alors $X \star T$ sera une fonction continue quel que soit $X \in U(G)$ sans que T soit nécessairement régulière.

13. Application : irréductibilité des représentations induites. — Nous allons dans ce numéro indiquer rapidement comment notre théorie des distributions permet d'étendre aux groupes localement compacts généraux les principaux résultats démontrés dans [3] pour les groupes de Lie. Dans ce qui suit, toute lettre non définie a la même signification que dans [3], § 6.

Soit G un groupe localement compact et soit Γ un sous-groupe fermé de G. Pour $x \in G$, nous poserons $\Gamma_x = \Gamma \cap x\Gamma x^{-1}$. Le sous-espace $A(\Gamma) + A(x\Gamma x^{-1})$ de $A(G)$ est fermé (car dans un espace linéairement compact, la somme de deux sous-espaces fermés est fermée) et est stable par la représentation adjointe de Γ_x dans $A(G)$. Soit $N_x = A(G)/A(\Gamma) + A(x\Gamma x^{-1})$; nous désignerons par $\Lambda_{x,1}$ la représentation de Γ_x dans N_x déduite de la représentation adjointe par passage au quotient et par $\Lambda_{x,r}$ la représentation de Γ_x dans le produit tensoriel projectif symétrique $\hat{S}_r(N_x)$ canoniquement déduite de $\Lambda_{x,1}$ (pour r entier positif). Enfin, on désignera par $A_{x,r}$ la représentation $\omega \to (\delta_\Gamma(\omega)\,\delta_\Gamma(x^{-1}\,\omega\, x))^{-1/2}\,\delta_x(\omega)\,\Lambda_{x,r}(\omega)$ de Γ_x dans $\hat{S}_r(N_x)$ [rappelons que δ_G (resp. δ_Γ, δ_x) désigne le module de G (resp. Γ, Γ_x)]. On a alors :

THÉORÈME 4. — *Soit G un groupe localement compact, limite projective de groupes de Lie et dénombrable à l'infini. Soit Γ un sous-groupe fermé de G tel qu'il n'y ait qu'une infinité dénombrable de doubles classes modulo $\Gamma:\Gamma$, et soit L une représentation unitaire de Γ dans un espace de Hilbert E de dimension finie. Si pour tout $x \in G$ et tout $r \geq 0$ les représentations $\omega \to L_\omega \otimes \overline{L}_{x^{-1}\omega x}$ et $\omega \to A_{x,r}(\omega)$ de Γ_x n'ont pas de composantes irréductibles communes* (²), *sauf pour $x \in \Gamma$ et $r = 0$, alors la représentation unitaire U^L de G induite par L est irréductible.*

Nous supposerons pour simplifier les notations que $\dim E = 1$. En modifiant légèrement les raisonnements de [3], (§ 6, n° 4) pour tenir compte de ce que les ensembles M^i qu'on introduit ne sont plus en nombre fini, mais forment un ensemble dénombrable bien ordonné par inclusion, on montre que la dimension de l'espace vectoriel des opérateurs continus dans $\mathcal{H}^L$ qui commutent avec la représentation U^L est inférieure ou égale à la somme des dimensions de certains espaces $\mathcal{J}_x$ de distributions sur G, pour x décrivant un système de représentants des doubles classes modulo $\Gamma:\Gamma$. L'espace $\mathcal{J}_x$ est défini comme suit : on considère un ouvert Ω de G, avec $\Gamma\Omega x\Gamma x^{-1} = \Omega$, tel que $\Gamma x \Gamma x^{-1}$ soit un sous-ensemble fermé de Ω (*cf.* [3], lemme 3.1) ; l'espace $\mathcal{J}_x$ est l'espace des restrictions à Ω des distributions T sur G, telles

(²) Nous appelons composante irréductible d'une représentation V non unitaire une sous-représentation irréductible d'une représentation quotient de V.

que l'intersection de Ω avec le support de T soit contenue dans $\Gamma x \Gamma x^{-1}$ et satisfaisant dans Ω à la condition (A') ([3], p. 168, (6; 47)) :

$$(A') \qquad \sigma_\xi \circ \tau_{x\eta x^{-1}} T = (\delta_G(\xi\eta^{-1})\,\delta_\Gamma(\xi\eta))^{1/2} L(\xi^{-1}\eta)\,T$$

pour tous ξ, $\eta \in \Gamma$.

Il suffit donc de montrer que $\dim \mathcal{J}_x = 0$ si $x \notin \Gamma$ et $\dim \mathcal{J}_e = 1$ (on a toujours $\dim \mathcal{J}_e \geqq 1$: considérer une mesure relativement invariante convenable sur Γ).

Ce qui précède est valable en supposant seulement G localement compact dénombrable à l'infini. Supposons de plus G limite projective de groupes de Lie et soit k un bon sous-groupe suffisamment petit de G. Soit U un voisinage ouvert de e tel que $kU = Uk = U \subset \Omega$. La condition (A') montre que si $T \in \mathcal{J}_x$, la restriction de T à Ω est parfaitement déterminée par la restriction de T à U, qui est elle-même déterminée par la connaissance des restrictions T_h à U/h des distributions $\pi_h(T)$ sur G/h, pour tous les bons sous-groupes h avec $h \subset k$. Si T satisfait à (A'), alors T_h y satisfait également, puisque π_h commute avec les translations à gauche ou à droite. On sera donc sûr que $\dim \mathcal{J}_x \leqq p$ toutes les fois que, pour tout bon sous-groupe $h \subset k$, la dimension de l'espace $\mathcal{J}_{x,h}$ des distributions sur l'ouvert U/h du groupe de Lie G/h, à support dans $U/h \cap ((\Gamma/h \cap \Gamma)\,(x\Gamma x^{-1}/h \cap x\Gamma x^{-1})$ et satisfaisant à (A') dans U/h (en un sens évident : *voir* [3], p. 126), sera toujours inférieure ou égale à p. Il suffit alors d'appliquer les résultats de [3] : désignons par $A_{x,r,h}$ la représentation de Γ_x quotient de $A_{x,r}$ par le sous-espace fermé engendré par l'intersection de $S_r(N_x)$ avec l'idéal engendré dans l'algèbre tensorielle de N_x par le sous-espace image de $A(h)$ dans N_x, et soit $i(x, r, h)$ le nombre d'entrelacement de $A_{x,r,h}$ avec la représentation $\omega \to L(\omega x^{-1} \omega^{-1} x)$ de Γ_x. On a, d'après [3], $\dim \mathcal{J}_{x,h} \leqq \sum_0^\infty i(x, r, h)$.

D'autre part, $i(x, r, h)$ est inférieur ou égal au nombre d'entrelacement $i(x, r)$ de $A_{x,r}$ et de $\omega \to L(\omega x^{-1}\omega^{-1}x)$, et si ces deux représentations n'ont pas de composantes irréductibles communes, on a $i(x, r) = 0$ (*cf.* [3], p. 171-172). On en déduit aussitôt le théorème, compte tenu de ce que $i(e, 0) = 1$.

Dans le cas où G est *totalement discontinu*, le théorème se simplifie et il n'est plus nécessaire de supposer G limite projective de groupes de Lie :

THÉORÈME 5. — *Soit G un groupe localement compact totalement discontinu dénombrable à l'infini. Soit Γ un sous-groupe fermé de G tel qu'il n'y ait qu'une infinité dénombrable de doubles classes modulo $\Gamma : \Gamma$. Soit L une représentation unitaire de Γ dans un espace de Hilbert E de dimension finie. Si, pour tout $x \notin \Gamma$, la représentation $\omega \to L_\omega \otimes \overline{L}_{x^{-1}\omega x}$ de $\Gamma_x = \Gamma \cap x\Gamma x^{-1}$ ne contient pas la représentation $\omega \to (\delta_\Gamma(\omega x^{-1}\omega x))^{1/2}\,\delta_x(\omega)^{-1}$, alors la représentation unitaire U^L de G induite par L est irréductible.*

La première partie des raisonnements faits plus haut reste valable, mais pour majorer la dimension des espaces $\mathcal{J}_x$, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit G un groupe localement compact totalement discontinu. Soient A et B deux sous-groupes fermés de G, et soit N le sous-groupe de $A \times B$ formé des éléments (a, a) avec $a \in A \cap B$. Soit Ω un ouvert de G tel que $A\Omega B = \Omega$ et que AB soit un sous-ensemble fermé de Ω. Supposons que l'application $(a, b) \to ab^{-1}$ définisse un homéomorphisme α de l'espace homogène $M = A \times B/N$ sur AB. Pour toute distribution T sur G telle que l'intersection du support de T avec Ω soit contenue dans AB, il existe une distribution S sur M et une seule telle que $T(\varphi) = S(\varphi \circ \alpha)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Soit G_1 un sous-groupe ouvert de G qui soit limite projective de groupes de Lie. Posons $A' = A \cap G_1$, $B' = B \cap G_1$ et $N' = N \cap (A' \times B')$. Alors $A' \times B'$ est ouvert dans $A \times B$ et l'espace homogène $M' = A' \times B'/N'$ s'identifie à un ouvert de M. L'espace homogène M' est limite projective des espaces homogènes

$$M'_h = ((A'/h \cap A') \times (B'/h \cap B'))/(N'/(N' \cap ((A' \cap h) \times (B' \cap h)))),$$

quand h décrit la famille des bons sous-groupes de G_1. De plus, M'_h est discret, isomorphe à $(A'h \times B'h)/N'(h \times h)$ et s'identifie canoniquement au sous-ensemble $hA'B'/h$ du groupe discret G_1/h. Par suite, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(M)$, il existe une $\psi \in \mathcal{D}(G)$ telle que $\varphi = \psi \circ \alpha$ et l'on peut choisir ψ de support contenu dans un voisinage arbitraire de l'image par α du support de φ.

Soit alors k un bon sous-groupe de G_1 et soit U un voisinage ouvert relativement compact de e tels que $kU = U \subset \Omega \cap G_1$ et que $AB \cap U = A'B' \cap U$. Pour tout bon sous-groupe $h \subset k$, la restriction de $\pi_h(T)$ à l'ouvert (fini !) U/h a son support dans $(U \cap hA'B')/h$, ensemble qui s'identifie à l'image canonique V_h dans M'_h de l'ouvert $V = \alpha^{-1}(U)$ de M'. D'où une distribution S_h sur V_h. Comme l'espace des distributions sur V est la limite projective des espaces $\mathcal{D}'(V_h)$ pour $h \subset k$, on en déduit qu'il existe une distribution S_0 et une seule sur V qui corresponde aux S_h et S_0 est caractérisée par la relation $S_0(\varphi \circ \alpha) = T(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Soit maintenant (a, b) un point quelconque de $A \times B$: d'après ce qui précède, il existe une distribution $S'_{a,b}$ sur V telle que

$$S'_{a,b}(\varphi \circ \alpha) = (\sigma_a^{-1} \circ \tau_b^{-1} T)(\varphi) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Par suite, il existe une distribution $S_{a,b}$ et une seule dans l'ouvert $(a, b).V$ de M telle que $S_{a,b}(\varphi \circ \alpha) = T(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(aUb^{-1})$. Nous obtenons donc ainsi un recouvrement ouvert (V_i) de M et dans chaque V_i une distribution S_i telles que $S_i = S_j$ dans $V_i \cap V_j$. Il existe alors une distribution S

sur M telle que $S = S_i$ dans V_i et l'on vérifie aussitôt que S est caractérisée par la relation $S(\varphi \circ \alpha) = T(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On déduit alors du lemme 3 que la dimension de l'espace $\mathcal{J}_x$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace $\mathcal{J}_x$ des distributions sur l'espace homogène $M_x = \Gamma \times (x\Gamma x^{-1})/\tilde{\Gamma}_x$ (où $\tilde{\Gamma}_x$ désigne le sous-groupe formé des éléments (a, a) avec $a \in \Gamma_x$), qui satisfont à une condition de quasi-invariance pour $A \times B$ opérant sur M, déduite de (A'). Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.1 de [3] (dont la démonstration s'étend sans changement au cas localement compact général) : on vérifie sans difficultés que les hypothèses du théorème 5 entraînent que $\dim \mathcal{J}_x = 0$ pour $x \notin \Gamma$ et $\dim \mathcal{J}_e = 1$.

Remarque 1. — Comme la représentation $\omega \to (\delta_\Gamma(\omega x^{-1} \omega x))^{1/2} \delta_x(\omega)$ est réelle positive, elle ne peut être contenue dans la représentation *unitaire* $\omega \to L_\omega \overline{L}_{x^{-1}\omega x}$ que si elle est la représentation triviale.

Remarque 2. — On pourrait également généraliser les résultats de [3] relatifs à l'équivalence unitaire de deux représentations induites.

14. La série principale de représentations unitaires des groupes simples de Chevalley. — Soit K un corps localement compact (discret ou non). Dans [4], Chevalley a associé à K et à une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}_c$ un groupe G. Quand on part d'une algèbre de Lie simple « classique », on obtient ainsi en particulier (à des groupes finis près) les groupes linéaires spéciaux ou les groupes orthogonaux d'indice maximal ou les groupes symplectiques sur K [21] (3). D'autre part, si K est le corps des réels ou le corps des complexes, on obtient des groupes de Lie semi-simples : l'objet de ce numéro est de construire, pour K quelconque, une série de représentations unitaires de G généralisant la « série principale » introduite par Gelfand et Naimark dans le cas réel ou complexe (4) et de démontrer leur irréductibilité : autrement dit, il s'agit de démontrer pour K quelconque l'analogue des résultats du chapitre III de [3].

Nous supposerons donc dans la suite que le corps K est *totalement discontinu* (éventuellement discret). Tous les symboles non définis ont la même signification que dans [4]. Le groupe G est un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur K. Cette algèbre de Lie possède une base formée d'éléments X_r (pour r décrivant le système des racines de $\mathfrak{g}_c$) et d'éléments $H_1, \ldots, H_l$ qui forment une base du « groupe des copoids » ([4], p. 32). Dans la suite, nous identifierons grâce à cette base le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ avec le groupe $GL(n, K)$. Si K est infini, G est un groupe algébrique [20]; dans tous les cas, G est un sous-

(3) On pourrait aussi traiter le cas des groupes introduits par Steinberg dans [25].

(4) Et par Mautner dans le cas du groupe projectif à deux variables sur un corps $\mathfrak{p}$-adique [18].

groupe fermé de $SL(n, K)$ (avec $n = \dim \mathfrak{g}$). Par suite, G est un groupe localement compact totalement discontinu.

Considérons le sous-groupe $\Gamma = \mathcal{U}\mathcal{H}$ de G : c'est un sous-groupe résoluble maximal donc fermé de G et le théorème 2 de [4] dit qu'il n'y a qu'un nombre *fini* de doubles classes modulo $\Gamma : \Gamma$ dans G, correspondant biunivoquement aux éléments du groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}_c$. Plus précisément, dans la double classe correspondant à l'élément w de W, on peut choisir un représentant $\overline{w}$ (noté $\omega(w)$ dans [4]) appartenant au normalisateur $\mathcal{W}$ de $\mathcal{H}$ dans G.

D'autre part, $\mathcal{W}/\mathcal{H}$ est isomorphe à W, et W opère ainsi sur $\mathcal{H}$. D'ailleurs, le sous-groupe $\mathcal{H}$ est isomorphe au groupe des homomorphismes du groupe des racines dans K^* et les opérations de W dans $\mathcal{H}$ s'obtiennent par « transposition » des opérations de W dans le groupe des racines.

Soit λ un caractère unitaire du groupe commutatif $\mathcal{H}$: comme Γ est le produit semi-direct du sous-groupe distingué $\mathcal{U}$ par le sous-groupe $\mathcal{H}$, on peut associer à λ une représentation unitaire $\tilde{\lambda}$ de dimension 1 de Γ. D'autre part, W opère sur le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ en posant $w.\lambda(h) = \lambda(w^{-1}(h))$ pour $h \in H$.

Pour tout $w \in W$, on a $\Gamma_{\overline{w}} = \Gamma \cap \overline{w}\Gamma\overline{w}^{-1} = \mathcal{H}\mathcal{U}'_{w^{-1}}$ ([4], p. 41-42) et l'on a $\tilde{\lambda}(\overline{w}^{-1}\omega\,\overline{w}) = (w^{-1}.\lambda)^{\sim}(\omega)$ pour $\omega \in \Gamma_{\overline{w}}$. Par suite, pour que la représentation $\omega \rightarrow \tilde{\lambda}(\omega\,\overline{w}^{-1}\omega^{-1}\,\overline{w})$ de $\Gamma_{\overline{w}}$ soit la représentation unité, il faut et il suffit que $\lambda = w^{-1}.\lambda$. On déduit alors du théorème 5 (et de la Remarque 1 qui le suit) le résultat suivant :

Théorème 6. — *Si le caractère unitaire λ de $\mathcal{H}$ n'est invariant par aucun élément $w \neq e$ du groupe de Weyl W, alors la représentation unitaire $U^{\tilde{\lambda}}$ de G induite par la représentation $\tilde{\lambda}$ de Γ est irréductible.*

Remarquons que dans le cas des groupes classiques complexes Gelfand et Naimark ont montré que la représentation $U^{\tilde{\lambda}}$ est *toujours* irréductible, même si λ est invariant par certains éléments de W. Par contre, si K est un corps *fini*, on voit facilement que la condition du théorème 6 est *nécessaire et suffisante* pour que $U^{\tilde{\lambda}}$ soit irréductible.

15. Caractères de la série principale dans le cas $\mathfrak{p}$-adique. — Supposons désormais que K soit un corps $\mathfrak{p}$-adique et soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K. Soit R le sous-$\mathcal{O}$-module de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée par les éléments de la base choisie plus haut et soit $\mathcal{K}$ le sous-groupe de G formé des éléments qui conservent R : autrement dit, on pose $\mathcal{K} = G \cap SL(n, \mathcal{O})$. Comme $SL(n, \mathcal{O})$ est un sous-groupe ouvert et compact de $SL(n, K)$, le sous-groupe $\mathcal{K}$ est lui aussi *ouvert et compact* dans G.

PROPOSITION 15. — *On a* $G = \Gamma \mathcal{K}$.

Il suffit de démontrer que $x\Gamma\mathcal{K} \subset \Gamma\mathcal{K}$ pour tout $x \in G$. Or G est engendré par les sous-groupes $\mathcal{H}$, $\mathfrak{X}_a$ et $\mathfrak{X}_{-a}$ pour a décrivant le système des racines fondamentales ([4], lemme 4). Comme $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{X}_a$ sont contenus dans Γ, il suffit de montrer que $\mathfrak{X}_{-a}\Gamma\mathcal{K} \subset \Gamma\mathcal{K}$. Or, on a $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_a\mathfrak{X}_a$ et $\mathfrak{X}_{-a}\mathfrak{U}_a = \mathfrak{U}_a\mathfrak{X}_{-a}$ ([4]) lemme 8). Il suffit donc de montrer que $yxh \in \Gamma\mathcal{K}$ pour $y \in \mathfrak{X}_{-a}$, $x \in \mathfrak{X}_a$ et $h \in \mathcal{H}$. Sous ces conditions, yx appartient au sous-groupe G_a engendré par $\mathfrak{X}_a$ et $\mathfrak{X}_{-a}$, et G_a est réunion de $G_a \cap \mathfrak{X}_a\mathcal{H}$ et de $G_a \cap \mathfrak{X}_a\mathcal{H}\omega_a\mathfrak{X}_a$. On est donc ramené à démontrer que $\omega_a xh \in \Gamma\mathcal{K}$ pour $x \in \mathfrak{X}_a$ et $h \in \mathcal{H}$. Or $\omega_a xh = (\omega_a h \omega_a^{-1})\omega_a(h^{-1}xh) \in \mathcal{H}\omega_a\mathfrak{X}_a$ et comme $\omega_a \in G_a$, il suffit de démontrer que $G_a \subset \Gamma\mathcal{K}$. Or G_a est l'image de $SL(2, K)$ par un certain homomorphisme φ_a de $SL(2, K)$ dans G, homomorphisme qui envoie dans $\mathcal{H}\mathfrak{X}_a$ les matrices $(z_{ij}) \in SL(2, K)$ telles que $z_{12} = 0$ ([4], p. 33-34). D'autre part, on vérifie aisément que tout élément de $SL(2, K)$ s'écrit comme produit d'une matrice triangulaire inférieure par une matrice appartenant à $SL(2, \mathcal{O})$. Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que $\varphi_a(SL(2, \mathcal{O})) \subset \Gamma\mathcal{K}$. Or on a même $\varphi_a(SL(2, \mathcal{O})) \subset \mathcal{K}$ car les éléments de la matrice de $\varphi_a((z_{ij}))$ par rapport à la base fixée sont des polynomes à coefficients entiers par rapport aux z_{ij} ([4], p. 29).

Nous allons déduire de cette proposition que la représentation unitaire $U^{\tilde{\lambda}}$ de G induite par la représentation $\tilde{\lambda}$ de Γ possède un *caractère* qui est une *distribution* sur le groupe localement compact G : cela découlera du résultat suivant :

PROPOSITION 16. — *Soit G un groupe localement compact totalement discontinu et soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert et compact de G. Soit U une représentation continue de G dans un espace de Banach E et soit V la restriction de U à $\mathcal{K}$. Supposons que toute représentation irréductible de $\mathcal{K}$ n'intervienne qu'un nombre fini de fois dans la décomposition de V en composantes irréductibles. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$, l'opérateur U_f est de rang fini et l'application $f \to \operatorname{Tr} U_f$ est une distribution sur G (appelée* caractère *de U).*

Soit $\mathcal{F}$ la famille des bons sous-groupes de $\mathcal{K}$. L'espace $\mathcal{D}(G)$ est somme directe des $\mathcal{D}(x\mathcal{K})$ pour x décrivant un système de représentants des classes modulo $\mathcal{K}$ et l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ est limite inductive des espaces $\mathcal{D}(\mathcal{K}/k)$ pour $k \in \mathcal{F}$; comme $\mathcal{K}/k$ est un groupe fini, on voit immédiatement qu'il suffit de démontrer que U_f est de rang fini pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathcal{K}/k)$. Pour toute représentation irréductible M de $\mathcal{K}$, désignons par $E(M)$ le sous-espace de E (de dimension finie par hypothèse) somme des composantes irréductibles de type M de V. On sait, d'après la théorie des représentations des groupes compacts, que la somme des $E(M)$ est dense dans E. D'autre part, pour $f \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$, l'opérateur U_f laisse stable les divers $E(M)$ et se réduit dans $E(M)$ à la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de l'opérateur M_f. Par suite, il suffit de démontrer que, si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{K}/k)$, on a $M_f = 0$ sauf pour un nombre fini de M. Or, on a, pour $f \in \mathcal{D}(\mathcal{K}/k)$:

$$M_f = \int_{\mathcal{K}} f(x) M_x \, dx = \int_{\mathcal{K}/k} f(\dot{x}) \, d\dot{x} \int_k M_{x\xi} \, d\xi$$

et $\int_k M_{x\xi} \, d\xi = M_x \int_k M_\xi \, d\xi = 0$ si M restreinte à k ne contient pas la représentation unité. Il suffit alors de remarquer que, d'après le théorème de réciprocité de Frobenius, les représentations irréductibles de $\mathcal{K}$ dont la restriction à k contient la représentation unité, sont les représentations contenues dans la représentation de $\mathcal{K}$ induite par la représentation unité de k, c'est-à-dire dans la représentation régulière de $\mathcal{K}/k$. Comme $\mathcal{K}/k$ est fini, ces représentations sont donc en nombre fini, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Les représentations de la série principale du groupe de Chevalley G sur un corps* $\mathfrak{p}$*-adique possèdent un caractère qui est une distribution sur G.*

Il suffit de remarquer que, d'après la proposition 15, la restriction V à $\mathcal{K}$ de $U^{\tilde{\lambda}}$ est la représentation de $\mathcal{K}$ induite par la restriction de $\tilde{\lambda}$ à $\Gamma \cap \mathcal{K}$, donc est une sous-représentation de la représentation régulière de $\mathcal{K}$. Par suite, une représentation irréductible M de $\mathcal{K}$ intervient au plus dim M fois dans V.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — *Espaces vectoriels topologiques*, t. 1 et 2, Paris, Hermann, 1953 (*Act. scient. et ind.*, 1189; *Éléments de Mathématique*, 15); t. 3, 4 et 5, Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1229; *Éléments de Mathématique*, 18).

[2] BOURBAKI (Nicolas). — *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1 : *Algèbres de Lie*, Paris, Hermann, 1960 (*Act. scient. et ind.*, 1285; *Éléments de Mathématique*, 26).

[3] BRUHAT (François). — Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 84, 1956, p. 97-205.

[4] CHEVALLEY (Claude). — Sur certains groupes simples, *Tohoku math. J.*, Series 2, t. 7, 1955, p. 14-66.

[5] DIEUDONNÉ (J.) et SCHWARTZ (L.). — La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 1, 1949, p. 61-101.

[6] EELLS (James). — Geometric aspects of currents and distributions, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 41, 1955, p. 493-496.

[7] EHRENPREIS (Léon). — *Theory of distributions for locally compact spaces*. Providence, American mathematical Society, 1956 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 21).

[8] GLEASON (A. M.). — The structure of locally compact groups, *Duke math. J.*, t. 18, 1951, p. 85-104.

[9] GLUSKOV (B. M.). — Algèbre de Lie d'un groupe localement compact [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk SSSR*, t. 12, 1957, p. 137-142.

[10] GODEMENT (Roger). — A theory of spherical functions, I., *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1952, p. 496-556.

[11] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe, *C. R. Aad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 605-606.

[12] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$), *Summa Brasil. Math.*, t. 3, 1954, p. 57-121.

[13] GROTHENDIECK (Alexander). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16).

[14] IWASAWA (Kenkichi). — On some types of topological groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 50, 1949, p. 507-558.

[15] LASHOF (Richard). — Lie algebras of locally compact groups, *Pacific J. Math.*, t. 7, 1957, p. 1145-1162.

[16] LEFSCHETZ (Salomon). — *Algebraic topology*, New-York, American mathematical Society, 1942 (*Amer. math. Soc. Coll. Publ.*, 27).

[17] MACKEY (George W.). — On induced representations of groups, *Amer. math. J.*, t. 73, 1951, p. 576-592.

[18] MAUTNER (F. I.). — Spherical functions over $\mathfrak{p}$-adic fields, I., *Amer math. J,*, t. 80, 1958, p. 441-457.

[19] MONTGOMERY (D.) and ZIPPIN (L.). — *Topological transformation groups*, New-York, Interscience Publishers, 1955 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 1).

[20] ONO (Takashi). — Sur les groupes de Chevalley, *J. Math. Soc. Japan*, t. 10, 1958, p. 307-313.

[21] REE (Rimhak). — On some simple groups defined by C. Chevalley, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 84, 1957, p. 392-400.

[22] RISS (J.). — Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts, *Acta Math.*, t. 89, 1953, p. 45-105.

[23] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, t. 1, 2e éd., Paris, Hermann, 1957 (*Act. scient. et ind.*, 1091 = 1245; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 9).

[24] SCHWARTZ (Laurent). — Théorie des noyaux, *Proceedings of the International congress of Mathematicians* [1950, Cambridge], vol. 1, p. 220-230. *Prov. Amer. math. Soc.*, 1952.

[25] STEINBERG (R.). — Variations on a theme of Chevalley, *Pacific J. of Math.*, t. 9. 1959, p. 875-891.

[26] WEIL (André). — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, Hermann, 1940 (*Act. scient. et ind.*, 869; *Publ. Inst. Math. Clermont-Ferrand*, 4).

(Manuscrit reçu le 25 juin 1960.)

François BRUHAT,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Nancy,
80, boulevard Pasteur,
Paris, 15e.