

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Représentations intégrables du groupe de De Sitter

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 9-41

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__9_0

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**REPRÉSENTATIONS INTÉGRABLES
DU GROUPE DE DE SITTER ;**

PAR

JACQUES DIXMIER

(Paris).

Soit G un groupe de Lie semi-simple réel. HARISH-CHANDRA a émis la conjecture suivante : pour chaque classe de sous-groupe de Cartan H de G , il existe une série de représentations unitaires irréductibles de G paramétrées, en gros, par les caractères de H pris modulo le groupe de Weyl ; et les représentations ainsi obtenues permettent de décomposer la représentation régulière gauche de G . En particulier, si G possède un sous-groupe de Cartan compact, il doit exister une série discrète de représentations de G de carré intégrable. HARISH-CHANDRA a établi ce dernier point [4] lorsque, G étant simple, les sous-groupes compacts maximaux de G admettent un centre de dimension 1. Le cas où ce centre est de dimension 0 reste ouvert. Le premier groupe simple (dans l'ordre des dimensions croissantes) pour lequel le problème se pose est un groupe de dimension 10, à savoir le groupe de De Sitter. Dans ce cas, G est de rang 2, et l'on peut donc espérer une série de représentations de carré intégrable dépendant de deux entiers. En fait, les représentations unitaires irréductibles de ce groupe ont été déjà classées [8], [9], et il apparaît une série de représentations dépendant de deux entiers. Dans le présent Mémoire, nous montrerons que presque toutes ces représentations sont de carré intégrable, et même intégrables.

Le paragraphe 1 fixe les notations concernant le groupe de De Sitter. Dans les paragraphes 2-6, nous reprenons, par la même méthode que dans [8] et [9], la détermination des représentations unitaires irréductibles de G . En effet, d'une part les méthodes de [8] et [9] sont heuristiques sur quelques points ; or on dispose maintenant de théorèmes généraux suffisamment puissants pour assurer la rigueur du raisonnement. D'autre part, les résultats de [8] et [9] contiennent quelques erreurs.

Pour étudier si les représentations obtenues sont de carré intégrable, nous montrerons que leurs coefficients vérifient certaines équations différentielles :

cette méthode, déjà employée par BARGMANN [1], a été beaucoup développée par HARISH-CHANDRA [5]. Nous imitons les calculs d'HARISH-CHANDRA; la situation est ici à certains égards plus compliquée, parce que les fonctions étudiées ne sont pas biinvariantes par un sous-groupe compact maximal K de G ; toutefois, on peut les choisir biinvariantes par un sous-groupe assez grand de K , ce qui permet de mener à bien la méthode d'HARISH-CHANDRA. Les équations différentielles sont obtenues aux paragraphes 7-8. Comme dans [1] et [5], on est conduit à des équations hypergéométriques. Ceci permet d'étudier, au paragraphe 9, le comportement asymptotique de certains coefficients des représentations, et l'on obtient ainsi l'existence d'une série à deux paramètres entiers de représentations intégrables. Ce résultat a été annoncé dans une Note (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 4257-4259.)

1. Description du groupe de De Sitter.

Nous considérons dans l'espace vectoriel réel \mathbf{R}^5 la forme quadratique $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$. Le groupe des transformations linéaires de \mathbf{R}^5 conservant cette forme est un groupe de Lie qui possède quatre composantes connexes. Soit \mathfrak{G} la composante connexe de l'élément neutre e . C'est le groupe \mathfrak{G} que nous appellerons ici le groupe de De Sitter. Son centre est réduit à $\{e\}$. Soit \mathfrak{G}' le groupe de recouvrement universel de \mathfrak{G} . Le noyau de l'application canonique $\mathfrak{G}' \rightarrow \mathfrak{G}$, c'est-à-dire le centre de \mathfrak{G}' , est d'ordre 2. Nous allons rechercher les représentations unitaires continues topologiquement irréductibles (en abrégé, les représentations unitaires irréductibles) de \mathfrak{G}' , autrement dit les représentations unitaires irréductibles univalentes ou bivalentes de \mathfrak{G} .

Nous identifions les opérateurs linéaires de \mathbf{R}^5 à leurs matrices par rapport à la base canonique de \mathbf{R}^5 . L'algèbre de Lie \mathfrak{g} de \mathfrak{G} (ou de \mathfrak{G}') est l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a, b, \dots, k) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & e & f & g \\ b & -e & 0 & h & j \\ c & -f & -h & 0 & k \\ d & -g & -j & -k & 0 \end{pmatrix},$$

où $a, b, \dots, k \in \mathbf{R}$. Posons

$$A = M(1, 0, 0, \dots, 0), \quad B = M(0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad K = M(0, 0, \dots, 0, 1).$$

Alors A, B, C, \dots, K est une base de \mathfrak{g} , et $M(a, b, \dots, k) = aA + bB + \dots + kK$. Nous noterons \mathfrak{U} l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} .

Soit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ l'ensemble des matrices $eE + fF + gG + hH + jJ + kK$. C'est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , et le sous-groupe correspondant \mathfrak{K} (resp. \mathfrak{K}') de \mathfrak{G} (resp. \mathfrak{G}') est un sous-groupe compact maximal de \mathfrak{G} (resp. \mathfrak{G}').

D'ailleurs, \mathfrak{K} s'identifie à la composante connexe de e dans le groupe des opérateurs linéaires de \mathbf{R}^4 conservant $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$. Le groupe \mathfrak{K}' s'identifie au groupe de recouvrement universel de \mathfrak{K} , et le noyau de l'application canonique $\mathfrak{K}' \rightarrow \mathfrak{K}$ est égal à celui de l'application canonique $\mathfrak{G}' \rightarrow \mathfrak{G}$.

Nous poserons

$$\begin{aligned} L &= -E - K, & M &= -F + J, & N &= -G - H; \\ L' &= -E + K, & M' &= -F - J, & N' &= -G + H. \end{aligned}$$

Soient $\mathfrak{k}_1 = \mathbf{R}L + \mathbf{R}M + \mathbf{R}N \subset \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}_2 = \mathbf{R}L' + \mathbf{R}M' + \mathbf{R}N' \subset \mathfrak{k}$. Alors \mathfrak{k}_1 et \mathfrak{k}_2 sont deux idéaux supplémentaires dans \mathfrak{k} et \mathfrak{k} s'identifie donc à $\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2$. Soient $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ et $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2$ les sous-groupes correspondants de \mathfrak{K} et \mathfrak{K}' . Alors $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'_1 \times \mathfrak{K}'_2$. Par contre, \mathfrak{K} ne s'identifie pas au produit $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$: les sous-groupes \mathfrak{K}_1 et \mathfrak{K}_2 ont en commun l'élément $\exp(\pi L) = \exp(\pi L')$, c'est-à-dire la rotation

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad x'_4 = -x_4, \quad x'_5 = -x_5$$

qui constitue, avec e , le centre de \mathfrak{K} .

Posons $\mathfrak{h} = \mathbf{R}L + \mathbf{R}L'$, qui est une sous-algèbre de Cartan à la fois de \mathfrak{k} et de \mathfrak{g} . Il est facile de trouver une base de Weyl correspondante. Considérons les éléments suivants de la complexification $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} X_\alpha &= M + iN, & X_{-\alpha} &= M - iN, & X_\beta &= M' + iN', & X_{-\beta} &= M' - iN', \\ X_\gamma &= A + iB, & X_{-\gamma} &= A - iB, & X_\delta &= C + iD, & X_{-\delta} &= C - iD. \end{aligned}$$

Alors $L, L', X_\alpha, X_{-\alpha}, \dots, X_{-\delta}$ constituent une base de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, et la table de multiplication correspondante est la suivante :

- (1) $[L, L'] = 0$
- (2) $\begin{cases} [L, X_\alpha] = -2iX_\alpha & [L, X_{-\alpha}] = 2iX_{-\alpha} \\ [L, X_\beta] = 0 & [L, X_{-\beta}] = 0 \end{cases}$
- (3) $\begin{cases} [L, X_\gamma] = -iX_\gamma & [L, X_{-\gamma}] = iX_{-\gamma} \\ [L, X_\delta] = -iX_\delta & [L, X_{-\delta}] = -iX_{-\delta} \end{cases}$
- (4) $\begin{cases} [L', X_\alpha] = 0 & [L', X_{-\alpha}] = 0 \\ [L', X_\beta] = 2iX_\beta & [L', X_{-\beta}] = -2iX_{-\beta} \end{cases}$
- (5) $\begin{cases} [L', X_\gamma] = -iX_\gamma & [L', X_{-\gamma}] = iX_{-\gamma} \\ [L', X_\delta] = iX_\delta & [L', X_{-\delta}] = -iX_{-\delta} \end{cases}$
- (6) $\begin{cases} [X_\alpha, X_{-\alpha}] = -4iL & [X_\beta, X_{-\beta}] = 4iL' \\ [X_\alpha, X_\beta] = [X_\alpha, X_{-\beta}] = [X_{-\alpha}, X_\beta] = [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = 0 \end{cases}$
- (7) $\begin{cases} [X_\alpha, X_\gamma] = [X_\alpha, X_\delta] = 0 \\ [X_\alpha, X_{-\gamma}] = 2X_\delta & [X_\alpha, X_{-\delta}] = -2X_\gamma \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \begin{cases} [X_{-\alpha}, X_{-\gamma}] = [X_{-\alpha}, X_{-\delta}] = 0 \\ [X_{-\alpha}, X_{\gamma}] = 2X_{-\delta} \quad [X_{-\alpha}, X_{\delta}] = -2X_{-\gamma} \end{cases} \\
 (9) \quad & \begin{cases} [X_{\beta}, X_{-\gamma}] = [X_{\beta}, X_{\delta}] = 0 \\ [X_{\beta}, X_{\gamma}] = 2X_{\delta} \quad [X_{\beta}, X_{-\delta}] = -2X_{-\gamma} \end{cases} \\
 (10) \quad & \begin{cases} [X_{-\beta}, X_{\gamma}] = [X_{-\beta}, X_{-\delta}] = 0 \\ [X_{-\beta}, X_{-\gamma}] = 2X_{-\delta} \quad [X_{-\beta}, X_{\delta}] = -2X_{\gamma} \end{cases} \\
 (11) \quad & \begin{cases} [X_{\gamma}, X_{-\gamma}] = i(L + L') \quad [X_{\delta}, X_{-\delta}] = i(L - L') \\ [X_{\gamma}, X_{\delta}] = -X_{\alpha} \quad [X_{\gamma}, X_{-\delta}] = -X_{-\beta} \\ [X_{-\gamma}, X_{-\delta}] = -X_{-\alpha} \quad [X_{-\gamma}, X_{\delta}] = -X_{\beta} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les huit racines $\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma, \pm \delta$ sont définies par

$$\begin{aligned}
 \alpha(L) &= -2i, & \alpha(L') &= 0; \\
 \beta(L) &= 0, & \beta(L') &= 2i; \\
 \gamma(L) &= -i, & \gamma(L') &= -i; \\
 \delta(L) &= -i, & \delta(L') &= i.
 \end{aligned}$$

Les notations $X_{\alpha}, \dots, X_{-\delta}$ sont alors conformes aux notations habituelles.

Les éléments $L, X_{\alpha}, X_{-\alpha}$ (resp. $L', X_{\beta}, X_{-\beta}$) constituent une base du complexifié de \mathfrak{k}_1 (resp. \mathfrak{k}_2).

Dans \mathfrak{U} , nous poserons

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \Omega &= E^2 + F^2 + G^2 + H^2 + J^2 + K^2 - A^2 - B^2 - C^2 - D^2 \\
 &= \frac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2) - A^2 - B^2 - C^2 - D^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(L^2 + \frac{1}{2} X_{\alpha} X_{-\alpha} + \frac{1}{2} X_{-\alpha} X_{\alpha} + L'^2 + \frac{1}{2} X_{\beta} X_{-\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} X_{-\beta} X_{\beta} - X_{\gamma} X_{-\gamma} - X_{-\gamma} X_{\gamma} - X_{\delta} X_{-\delta} - X_{-\delta} X_{\delta} \right).
 \end{aligned}$$

Cet « élément de Casimir » appartient au centre de \mathfrak{U} .

(Les éléments notés, dans [9],

$L, M, N, X, Y, Z, U, V, W, T, A_1, B_1, C_1, C_{1+},$
 $C_{1-}, A_2, B_2, C_2, C_{2+}, C_{2-}, T+iW, T-iW, U-iV, U+iV$

sont notés ici

$$\begin{aligned}
 & -iH, iF, -iE, iG, iJ, iK, iA, iB, iC, iD, -iN', \\
 & -iM', iL', X_{-\beta}, -X_{\beta}, -iN, -iM, -iL, X_{-\alpha}, -X_{\alpha}, \\
 & -X_{-\delta}, X_{\delta}, iX_{-\gamma}, iX_{\gamma}.
 \end{aligned}$$

Signalons que les éléments U, V, W, T de [9], 2.12, doivent être multipliés par i pour être vraiment des éléments de \mathfrak{g} ; on a supposé faite cette rectification).

2. Relations entre les représentations de \mathfrak{G} et les représentations de \mathfrak{g} .

Étudions d'abord les représentations unitaires irréductibles univalentes ou bivalentes de \mathfrak{K} , c'est-à-dire les représentations unitaires irréductibles de \mathfrak{K}' . Celles-ci sont bien connues. Elles s'effectuent dans des espaces de dimension finie. Pour chaque couple (k, k') de demi-entiers ≥ 0 , il existe une représentation unitaire irréductible $\sigma_{k, k'}$ de \mathfrak{K}' ; elle s'effectue dans un espace de dimension $(2k+1)(2k'+1)$, et l'on peut choisir une base orthonormale $f_{\nu, \nu'}$ ($\nu = -k, -k+1, \dots, k$; $\nu' = -k', -k'+1, \dots, k'$) dans l'espace de $\sigma_{k, k'}$ de manière que

$$\begin{aligned} \sigma_{k, k'}(L) f_{\nu, \nu'} &= -2i\nu f_{\nu, \nu'}, & \sigma_{k, k'}(L') f_{\nu, \nu'} &= -2i\nu' f_{\nu, \nu'}, \\ \sigma_{k, k'}(X_\alpha) f_{\nu, \nu'} &= 2\sqrt{(k+\nu+1)(k-\nu)} f_{\nu+1, \nu'}, \\ \sigma_{k, k'}(X_{-\alpha}) f_{\nu, \nu'} &= -2\sqrt{(k+\nu)(k-\nu+1)} f_{\nu-1, \nu'}, \\ \sigma_{k, k'}(X_\beta) f_{\nu, \nu'} &= -2\sqrt{(k'+\nu')(k'-\nu'+1)} f_{\nu, \nu'-1}, \\ \sigma_{k, k'}(X_{-\beta}) f_{\nu, \nu'} &= 2\sqrt{(k'+\nu'+1)(k'-\nu')} f_{\nu, \nu'+1}. \end{aligned}$$

Maintenant, soit ρ une représentation unitaire irréductible de \mathfrak{G}' . Alors, $\rho|_{\mathfrak{K}'}$ (restriction de ρ à \mathfrak{K}') est complètement réductible; autrement dit, l'espace \mathcal{H} de ρ est somme hilbertienne de sous-espaces de dimension finie deux à deux orthogonaux stables pour $\rho|_{\mathfrak{K}'}$, et irréductibles pour $\rho|_{\mathfrak{K}'}$. D'autre part ([2], théorème 2), chaque représentation $\sigma_{k, k'}$ apparaît une fois au plus dans la décomposition de $\rho|_{\mathfrak{K}'}$. Soit Γ_0 l'ensemble des couples (k, k') , où k et k' sont des demi-entiers ≥ 0 . Soit Γ l'ensemble des $(k, k') \in \Gamma_0$ tels que $\sigma_{k, k'}$ intervienne dans la réduction de $\rho|_{\mathfrak{K}'}$. Alors, à tout $(k, k') \in \Gamma$ est associé un sous-espace $\mathcal{H}_{k, k'}$ de \mathcal{H} , stable pour $\rho|_{\mathfrak{K}'}$, tel que la sous-représentation de $\rho|_{\mathfrak{K}'}$ définie par $\mathcal{H}_{k, k'}$ soit de classe $\sigma_{k, k'}$, et \mathcal{H} est somme hilbertienne des $\mathcal{H}_{k, k'}$:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(k, k') \in \Gamma} \mathcal{H}_{k, k'}.$$

Soit $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ la somme algébrique $\sum_{(k, k') \in \Gamma} \mathcal{H}_{k, k'}$ des $\mathcal{H}_{k, k'}$, qui est partout dense dans \mathcal{H} . Alors, \mathcal{H}' est contenu dans l'ensemble \mathcal{A} des vecteurs de \mathcal{H} analytiques pour ρ , et la représentation de \mathfrak{g} dans \mathcal{A} associée à ρ laisse stable \mathcal{H}' ([3], p. 191 et 228). Nous noterons $\rho_{\mathfrak{g}}$ ou $\rho_{\mathfrak{u}}$ la représentation de \mathfrak{g} ou de \mathfrak{u} dans \mathcal{H}' ainsi définie; elle est algébriquement irréductible ([4], lemme 1). Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $i\rho_{\mathfrak{g}}(X)$ est hermitien.

Réciproquement, soient \mathcal{H} un espace de Hilbert, Γ une partie de Γ_0 ,

($\mathcal{H}_{k,k'}$) $_{(k,k') \in \Gamma}$ une famille de sous-espaces de dimension finie de \mathcal{H} deux à deux orthogonaux tels que $\mathcal{H} = \bigoplus_{(k,k') \in \Gamma} \mathcal{H}_{k,k'}$. Posons $\mathcal{H}' = \sum_{(k,k') \in \Gamma} \mathcal{H}_{k,k'}$. Soit ρ' une représentation de \mathfrak{g} (ou de \mathfrak{U}) dans \mathcal{H}' sur laquelle nous faisons les hypothèses suivantes : 1° ρ' est algébriquement irréductible ; 2° les $i\rho'(\mathcal{X})$ sont hermitiens pour tout $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$; 3° pour $\mathcal{X} \in \mathfrak{k}$, $\rho'(\mathcal{X})$ laisse stables les $\mathcal{H}_{k,k'}$, et la représentation de \mathfrak{k} dans $\mathcal{H}_{k,k'}$ ainsi définie est de classe $\sigma_{k,k'}$. Alors, il existe une représentation unitaire irréductible et une seule ρ de \mathfrak{G}' dans \mathcal{H} telle que $\rho' = \rho_{\mathfrak{g}}$ (ou $\rho_{\mathfrak{u}}$). L'unicité est immédiate : car, d'après le théorème 2 de [3], la connaissance de $\rho_{\mathfrak{g}}$ détermine, pour tous les s d'un voisinage W de e dans \mathfrak{G}' , les restrictions à \mathcal{H}' des opérateurs $\rho(s)$, donc les opérateurs $\rho(s)$ eux-mêmes ; et tout élément de \mathfrak{G}' est produit d'un nombre fini d'éléments de W . Prouvons maintenant l'existence de ρ . Les opérateurs $\rho'(L^2 + M^2 + N^2)$ et $\rho'(L'^2 + M'^2 + N'^2)$ laissent stables chaque $\mathcal{H}_{k,k'}$, et induisent dans $\mathcal{H}_{k,k'}$ les opérateurs scalaires $-4k(k+1)$, $-4k'(k'+1)$. Soit \mathfrak{C} l'ensemble des opérateurs linéaires dans \mathcal{H}' permutables à $\rho'(\mathfrak{U})$. Comme $\rho'(\mathfrak{U})$ est algébriquement irréductible, \mathfrak{C} est un corps. D'autre part, la remarque précédente prouve que \mathfrak{C} laisse stable chaque $\mathcal{H}_{k,k'}$. D'où, pour tout $(k, k') \in \Gamma$, un homomorphisme de \mathfrak{C} dans l'anneau des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}_{k,k'}$. Cet homomorphisme est non nul, donc injectif, de sorte que \mathfrak{C} est de degré fini sur le corps des nombres complexes. Donc \mathfrak{C} est égal au corps des nombres complexes ; par suite, $\rho'(\mathcal{X})$ est scalaire pour tout \mathcal{X} du centre de \mathfrak{U} . Écrivons alors

$$\begin{aligned} & \rho'(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2) \\ &= -\rho'(\Omega) + \frac{3}{2}\rho'(L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2). \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $\rho'(\Omega)$ est scalaire, et il est clair que $\rho'(L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2)$ est essentiellement auto-adjoint. Donc $\rho'(A^2 + B^2 + \dots + N'^2)$ est essentiellement auto-adjoint. Alors ([6], corollaire 9.1), il existe une représentation unitaire ρ de \mathfrak{G}' dans \mathcal{H} telle que les opérateurs infinitésimaux correspondants prolongent les $\rho'(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$). Ceci prouve d'abord que les sous-espaces $\mathcal{H}_{k,k'}$ définis par ρ sont précisément les sous-espaces $\mathcal{H}_{k,k'}$ donnés. Donc l'espace de $\rho_{\mathfrak{g}}$ est \mathcal{H}' . Et les $\rho_{\mathfrak{g}}(\mathcal{X})$, pour $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$, sont les restrictions à \mathcal{H}' des opérateurs infinitésimaux de ρ , c'est-à-dire que $\rho_{\mathfrak{g}}(\mathcal{X}) = \rho'(\mathcal{X})$ pour $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$. Enfin, si ρ n'était pas irréductible, il existerait une partition de Γ , soit $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, telle que ρ laisse stables les sous-espaces fermés $\bigoplus_{(k,k') \in \Gamma'} \mathcal{H}_{k,k'}$ et $\bigoplus_{(k,k') \in \Gamma''} \mathcal{H}_{k,k'}$. Alors $\rho_{\mathfrak{g}} = \rho'$ laisserait stables $\sum_{(k,k') \in \Gamma'} \mathcal{H}_{k,k'}$ et $\sum_{(k,k') \in \Gamma''} \mathcal{H}_{k,k'}$, contrairement à l'irréductibilité de ρ' .

Nous avons ainsi entièrement ramené la recherche des représentations unitaires irréductibles de \mathfrak{G}' à un problème concernant \mathfrak{g} . Naturellement, des raisonnements analogues s'appliqueraient dans le cas de tout groupe de Lie semi-simple.

3. Opérateurs infinitésimaux d'une représentation unitaire irréductible.

Soit ρ une représentation unitaire irréductible de \mathfrak{G}' dans un espace hilbertien \mathfrak{H} . Introduisons, conformément au paragraphe 2, la décomposition

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{(k,k') \in \Gamma} \mathfrak{H}_{k,k'}$$

de \mathfrak{H} . Pour abrégé, nous emploierons désormais la notation ρ à la place de $\rho_{\mathfrak{g}}$ ou de $\rho_{\mathfrak{u}}$. Il existe une base orthonormale de $\mathfrak{H}_{k,k'}$

$$f_{\nu, \nu'}^{k, k'} \quad (\nu = -k, -k+1, \dots, k, \quad \nu' = -k', -k'+1, \dots, k')$$

telle que

$$(13) \quad \begin{cases} \rho(L) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = -2i\nu f_{\nu, \nu'}^{k, k'}, \\ \rho(X_{\alpha}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = 2\sqrt{(k+\nu+1)(k-\nu)} f_{\nu+1, \nu'}^{k, k'}, \\ \rho(X_{-\alpha}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = -2\sqrt{(k+\nu)(k-\nu+1)} f_{\nu-1, \nu'}^{k, k'}; \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \rho(L') f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = -2i\nu' f_{\nu, \nu'}^{k, k'}, \\ \rho(X_{\beta}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = -2\sqrt{(k'+\nu'+1)(k'-\nu'+1)} f_{\nu, \nu'+1}^{k, k'}, \\ \rho(X_{-\beta}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = 2\sqrt{(k'+\nu'+1)(k'-\nu')} f_{\nu, \nu'+1}^{k, k'}. \end{cases}$$

Le raisonnement de [9], p. 117-118, prouve qu'il existe des nombres complexes $A_{k,k'}$, $B_{k,k'}$, $C_{k,k'}$, $D_{k,k'}$, où $(k, k') \in \Gamma$, tels que

$$(15) \quad \begin{aligned} \rho(X_{\gamma}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = & \sqrt{(k+\nu+1)(k'+\nu'+1)} A_{k,k'} f_{\nu+\frac{1}{2}, \nu'+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \\ & + \sqrt{(k-\nu)(k'+\nu'+1)} B_{k,k'} f_{\nu+\frac{1}{2}, \nu'+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \\ & + \sqrt{(k+\nu+1)(k'-\nu')} C_{k,k'} f_{\nu+\frac{1}{2}, \nu'+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \\ & + \sqrt{(k-\nu)(k'-\nu')} D_{k,k'} f_{\nu+\frac{1}{2}, \nu'+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} \rho(X_{-\gamma}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = & -\sqrt{(k-\nu+1)(k'-\nu'+1)} A_{k,k'} f_{\nu-\frac{1}{2}, \nu'-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \\ & + \sqrt{(k+\nu)(k'-\nu'+1)} B_{k,k'} f_{\nu-\frac{1}{2}, \nu'-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \\ & + \sqrt{(k-\nu+1)(k'+\nu')} C_{k,k'} f_{\nu-\frac{1}{2}, \nu'-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \\ & - \sqrt{(k+\nu)(k'+\nu')} D_{k,k'} f_{\nu-\frac{1}{2}, \nu'-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \rho(X_{\delta}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} &= -\sqrt{(k + \nu + 1)(k' - \nu' + 1)} A_{k, k'} f_{\nu + \frac{1}{2}, \nu' - \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}} \\
 &\quad - \sqrt{(k - \nu)(k' - \nu' + 1)} B_{k, k'} f_{\nu + \frac{1}{2}, \nu' - \frac{1}{2}}^{k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sqrt{(k + \nu + 1)(k' + \nu')} C_{k, k'} f_{\nu + \frac{1}{2}, \nu' - \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sqrt{(k - \nu)(k' + \nu')} D_{k, k'} f_{\nu + \frac{1}{2}, \nu' - \frac{1}{2}}^{k - \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \rho(X_{-\delta}) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} &= -\sqrt{(k - \nu + 1)(k' + \nu' + 1)} A_{k, k'} f_{\nu - \frac{1}{2}, \nu' + \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sqrt{(k + \nu)(k' + \nu' + 1)} B_{k, k'} f_{\nu - \frac{1}{2}, \nu' + \frac{1}{2}}^{k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}} \\
 &\quad - \sqrt{(k - \nu + 1)(k' - \nu')} C_{k, k'} f_{\nu - \frac{1}{2}, \nu' + \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sqrt{(k + \nu)(k' - \nu')} D_{k, k'} f_{\nu - \frac{1}{2}, \nu' + \frac{1}{2}}^{k - \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir ces formules en imitant un raisonnement fait par NEUMARK [7] dans la recherche des représentations infinitésimales du groupe de Lorentz homogène.

Dans les formules (15)-(18), il intervient éventuellement des $f_{\nu, \nu'}^{k, k'}$ non définis, et ceci pour deux raisons : 1° on peut avoir $|\nu| > |h|$ ou $|\nu'| > |h'|$ (par exemple $f_{\nu + \frac{1}{2}, \nu' + \frac{1}{2}}^{k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}}$ est non défini lorsque $\nu = k$); le coefficient numérique correspondant ($\sqrt{(k - \nu)(k' + \nu' + 1)}$ dans l'exemple envisagé) est alors nul. 2° $f_{\nu, \nu'}^{k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}}$ est non défini lorsque $(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}) \notin \Gamma$; nous conviendrons que $A_{k, k'} = 0$ dans ce cas. De même, nous poserons $B_{k, k'} = 0$ si $(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}) \notin \Gamma$, $C_{k, k'} = 0$ si $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \notin \Gamma$, $D_{k, k'} = 0$ si $(k - \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \notin \Gamma$. Les formules (15)-(18) sont alors toujours valables, étant entendu qu'un vecteur non défini, multiplié par le scalaire 0, est considéré comme nul. Par ailleurs, il est également commode de convenir que, pour $(k, k) \notin \Gamma$, les $A_{k, k'}$, $B_{k, k'}$, $C_{k, k'}$, $D_{k, k'}$ sont encore définis mais nuls.

Nous définirons une partition $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ de la manière suivante :

$(k, k') \in \Gamma_1$ si $k + k'$ est entier (ou, ce qui revient au même, si $k - k'$ est entier), $(k, k') \in \Gamma_2$ si $k + k'$ est non entier. Les formules (13)-(18) montrent que $\sum_{(k, k') \in \Gamma \cap \Gamma_1} \mathcal{E}_{k, k'}$ et $\sum_{(k, k') \in \Gamma \cap \Gamma_2} \mathcal{E}_{k, k'}$ sont stables pour $\rho(\mathfrak{g})$. En raison de l'irréductibilité de ρ , on a donc, ou bien $\Gamma \subset \Gamma_1$, ou bien $\Gamma \subset \Gamma_2$. Les formules (13) et (14) entraînent notamment que

$$\rho(\exp \pi L) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = e^{-2i\pi\nu} f_{\nu, \nu'}^{k, k'}, \quad \rho(\exp \pi L') f_{\nu, \nu'}^{k, k'} = e^{-2i\pi\nu'} f_{\nu, \nu'}^{k, k'}.$$

Donc $\rho(\exp \pi L) = \rho(\exp \pi L')$ si et seulement si les différences $\nu - \nu'$ sont entières, c'est-à-dire si et seulement si les différences $k - k'$ sont entières, ce qui signifie que $\Gamma \subset \Gamma_1$. Ainsi, le cas $\Gamma \subset \Gamma_1$ correspond aux représentations univalentes de \mathfrak{G} et le cas $\Gamma \subset \Gamma_2$ aux représentations bivalentes de \mathfrak{G} .

Il faut choisir les $A_{k, k'}$, $B_{k, k'}$, $C_{k, k'}$, $D_{k, k'}$, de façon que les opérateurs $\rho(L)$, $\rho(M)$, ..., $\rho(X_{-\delta})$ vérifient les 45 relations de commutation analogues aux relations (1)-(11). Le calcul montre que les relations analogues à (1)-(10) sont automatiquement satisfaites, et que les relations analogues à (11) sont satisfaites si et seulement si l'on a

$$(19) \quad (k' + 1) A_{k, k'} C_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - k' C_{k, k'} A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$(20) \quad (k + 1) A_{k, k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - k B_{k, k'} A_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$(21) \quad (k' + 1) B_{k, k'} D_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - k' D_{k, k'} B_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$(22) \quad (k + 1) C_{k, k'} D_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} - k D_{k, k'} C_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & (k' + 1) A_{k, k'} D_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - k' D_{k, k'} A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \\ & + (k' + 1) B_{k, k'} C_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - k' C_{k, k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 1 \\ & \text{(pour } (k, k') \in \Gamma, k > 0 \text{)}. \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & (k + 1) A_{k, k'} D_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - k D_{k, k'} A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \\ & - k B_{k, k'} C_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} + (k + 1) C_{k, k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 1 \\ & \text{(pour } (k, k') \in \Gamma, k' > 0 \text{)}. \end{aligned} \right.$$

Exprimant maintenant que $i\rho(X)$ est hermitien pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on trouve

$$(25) \quad D_{k, k'} = \overline{A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}}, \quad C_{k, k'} = -\overline{B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}}.$$

En substituant dans (19)-(24), les relations (21) et (22) deviennent conséquences de (19) et (20); il nous reste les relations de récurrence :

$$(26) \quad - (k' + 1) A_{k, k'} \overline{B_{k+1, k'}} + k' \overline{B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}} A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$(27) \quad (k+1)A_{k,k'}B_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} - kB_{k,k'}A_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$(28) \quad (k'+1)|A_{k,k'}|^2 - k' \left| A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \right|^2 - (k'+1)|B_{k,k'}|^2 \\ + k' \left| B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \right|^2 = 1 \quad [(k, k') \in \Gamma, k > 0],$$

$$(29) \quad k+1|A_{k,k'}|^2 - k \left| A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \right|^2 + k|B_{k,k'}|^2 \\ - (k+1) \left| B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \right|^2 = 1 \quad [(k, k') \in \Gamma, k' > 0].$$

Il nous faudra aussi exprimer l'irréductibilité de ρ .

(Les notations $f(j_1, j_2)$, $g(j_1, j_2)$, $h(j_1, j_2)$, $k(j_1, j_2)$ de [9] correspondent à nos notations $A_{j_2-\frac{1}{2}, j_1-\frac{1}{2}}$, $C_{j_2-\frac{1}{2}, j_1+\frac{1}{2}}$, $-B_{j_2+\frac{1}{2}, j_1-\frac{1}{2}}$, $-D_{j_2+\frac{1}{2}, j_1+\frac{1}{2}}$).

4. Solutions des relations de récurrence.

Ici, nous nous écartons plus sensiblement de la méthode de [9].

Nous excluons désormais la représentation triviale de \mathfrak{G}' dans un espace de dimension 1.

LEMME 1. — Soit (k, k') un élément de Γ tel que $B_{k,k'} = 0$. Alors :

$$a. A_{k,k'} \neq 0; \quad b. \left(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right) \in \Gamma; \quad c. B_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} = 0.$$

Si $k' > 0$, (29) donne $A_{k,k'} \neq 0$. Si $k' = 0$ et $k > 0$, on a

$$A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0,$$

donc (28) donne $A_{k,k'} \neq 0$. Si $k = k' = 0$, et si $A_{0,0} = 0$, les relations (13)-(18) montrent que $\mathfrak{H}_{0,0}$ est annulé par $\rho(\mathfrak{g})$; d'après l'irréductibilité, on aurait $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{0,0}$, contrairement à l'hypothèse que ρ est non triviale. On a donc prouvé *a*. L'assertion *b*. en résulte aussitôt puisque $A_{k,k'} = 0$

si $\left(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right) \notin \Gamma$. Enfin, *c*. résulte de *a*. et de la relation (27).

LEMME 2. — Soit (k, k') un élément de Γ tel que $B_{k,k'} = 0$. Alors :

$$a. A_{k,k'} \neq 0, A_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \neq 0, A_{k+1, k'+1} \neq 0, \dots;$$

$$b. \left(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right), (k+1, k'+1), \left(k + \frac{3}{2}, k' + \frac{3}{2}\right), \dots \in \Gamma;$$

$$c. B_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} = B_{k+1, k'+1} = \dots = 0.$$

Ceci se déduit du lemme 1 par itération.

LEMME 3. — Soit (k, k') un élément de Γ tel que $B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0$. Alors :

a. $A_{k, k'} \neq 0, A_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \neq 0, A_{k+1, k'+1} \neq 0, \dots$;

b. $(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}), (k + 1, k' + 1), (k + \frac{3}{2}, k' + \frac{3}{2}), \dots \in \Gamma$;

c. $B_{k+1, k'} = B_{k+\frac{3}{2}, k'+\frac{1}{2}} = \dots = 0$.

Ceci s'établit comme le lemme 2, en échangeant les rôles des équations (28) et (29) d'une part, (26) et (27) d'autre part.

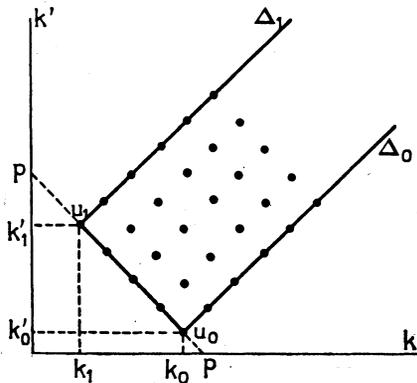


Fig. 1.

Ceci posé, soit $p = \inf_{(k, k') \in \Gamma} (k + k')$. Et soient q_0 et q_1 le minimum et le maximum des valeurs de $k' - k$ pour $(k, k') \in \Gamma, k + k' = p$. (On peut avoir $q_0 = q_1$). Nous allons montrer qu'alors, si p est entier (resp. demi-entier impair), Γ est l'ensemble des $(k, k') \in \Gamma_1$ (resp. Γ_2) tels que $k + k' \geq p, q_0 \leq k' - k \leq q_1$. Supposons pour fixer les idées que p soit entier, donc que $\Gamma \subset \Gamma_1$. Soient (k_0, k'_0) et (k_1, k'_1) tels que $k_0 + k'_0 = k_1 + k'_1 = p, k'_0 - k_0 = q_0, k'_1 - k_1 = q_1$. Par définition de q_1 , on a $(k_1 - \frac{1}{2}, k'_1 + \frac{1}{2}) \notin \Gamma$, donc $B_{k_1, k'_1} = 0$. D'après le lemme 2, on a les résultats suivants :

1° tous les points de Γ_1 appartenant à la demi-droite Δ_1 (définie par $k' - k = q_1, k' + k \geq p$) appartiennent à Γ ;

2° $A_{k, k'} \neq 0$ pour $(k, k') \in \Gamma \cap \Delta_1$;

3° $B_{k, k'} = 0$ pour $(k, k') \in \Gamma \cap \Delta_1$.

Soit Γ' (resp. Γ'') l'ensemble des $(k, k') \in \Gamma$ tels que $k' - k \leq q_1$ (resp. $> q_1$). L'égalité $B_{k, k'} = 0 = C_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}}$ pour $(k, k') \in \Gamma \cap \Delta_1$, et les formules (13)-

(18), montrent que $\sum_{(k, k') \in \Gamma'} \partial \mathcal{C}_{k, k}$ et $\sum_{(k, k') \in \Gamma''} \partial \mathcal{C}_{k, k'}$ sont stables pour ρ . L'irréductibilité entraîne que $\Gamma = \Gamma'$. Raisonnant de manière analogue

pour q_0 , mais utilisant cette fois le lemme 3, on voit que Γ est contenu dans l'ensemble fermé R délimité par les demi-droites Δ_0, Δ_1 et le segment $u_0 u_1$ de la figure 1. Si (k, k') est un point de Γ appartenant au segment $u_0 u_1$ et distinct de u_1 , on a $B_{k,k'} \neq 0$: sinon, raisonnant encore de la même façon, on aboutirait à la conclusion que ρ est réductible. Alors, appliquant les équations (26) et (27) dans les « carrés » qui recouvrent R , une double récurrence géométriquement évidente montre que $A_{k,k'} \neq 0$ pour $(k, k') \in \Gamma_1 \cap R$ (donc $\Gamma = \Gamma_1 \cap R$), et $B_{k,k'} \neq 0$ pour $(k, k') \in \Gamma_1 \cap R, k' - k < q_1$.

Supposons maintenant qu'on remplace chaque vecteur $f_{\nu, \nu'}^{k, k'}$, par le vecteur $\omega(k, k') f_{\nu, \nu'}^{k, k'}$, où $\omega(k, k')$ est un nombre complexe de module 1. Alors, les formules (13)-(18) sont encore valables à condition de remplacer $A_{k,k'}$, $B_{k,k'}$, $C_{k,k'}$, $D_{k,k'}$ par les nombres

$$\begin{aligned} A_{k,k'} & \frac{\omega(k, k')}{\omega\left(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right)}, & B_{k,k'} & \frac{\omega(k, k')}{\omega\left(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right)}, \\ C_{k,k'} & \frac{\omega(k, k')}{\omega\left(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}\right)}, & D_{k,k'} & \frac{\omega(k, k')}{\omega\left(k - \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Par un choix convenable des $\omega(k, k')$, on peut faire en sorte que $A_{k,k'} > 0$ pour tout $(k, k') \in \Gamma$. Sans changer ce résultat, on peut encore multiplier tous les $\omega(k, k')$ par des facteurs de module 1 ne dépendant que de $k' - k$. Ceci permet de faire en sorte que $B_{k,k'} > 0$ lorsque $k + k' = p$, $(k, k') \in \Gamma$ et $\left(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right) \in \Gamma$. Enfin, les formules (26) et (27) prouvent de proche en proche qu'on a alors $B_{k,k'} > 0$ lorsque $(k, k') \in \Gamma$ et $\left(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right) \in \Gamma$.

En résumé, on peut supposer que : 1° Γ est l'un des ensembles schématisés par la figure 1 ; 2° $A_{k,k'} > 0$ lorsque $(k, k') \in \Gamma$; 3° $B_{k,k'} > 0$ lorsque $(k, k') \in \Gamma$ et $\left(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}\right) \in \Gamma$. Et nous avons à résoudre les équations

$$(30) \quad (k' + 1)A_{k,k'} B_{k+1,k'} = k' A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}},$$

$$(31) \quad (k + 1)A_{k,k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} = k A_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} B_{k,k'},$$

$$(32) \quad \begin{cases} (k' + 1)A_{k,k'}^2 - k' A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2 - (k' + 1)B_{k,k'}^2 + k' B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2 = 1 \\ [(k, k') \in \Gamma, k > 0], \end{cases}$$

$$(33) \quad \begin{cases} (k + 1)A_{k,k'}^2 - k A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2 + k B_{k,k'}^2 - (k + 1)B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2 = 1 \\ [(k, k') \in \Gamma, k' > 0]. \end{cases}$$

Quand ces équations seront résolues, les formules (13)-(18) fourniront une représentation de \mathfrak{g} dans \mathcal{H}' . L'irréductibilité sera automatique. Car un sous-espace de \mathcal{H}' stable pour cette représentation sera nécessairement somme de certains des $\mathcal{H}_{k,k'}$. Et les conditions $A_{k,k'} \neq 0$ pour $(k, k') \in \Gamma$, et $B_{k,k'} \neq 0$ pour (k, k') et $(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}) \in \Gamma$, assurent qu'un tel sous-espace est réduit à $\{0\}$ ou égal à \mathcal{H}' .

L'équation (31), où l'on change k en $k + \frac{1}{2}$, k' en $k' - \frac{1}{2}$, donne

$$(34) \quad \left(k + \frac{1}{2}\right) A_{k,k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = \left(k + \frac{3}{2}\right) A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} B_{k+1, k'}.$$

Multiplions membre à membre les équations (30) et (34). On obtient :

$$(35) \quad \begin{aligned} (k' + 1) \left(k + \frac{1}{2}\right) A_{k,k'}^2 B_{k+1, k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \\ = k' \left(k + \frac{3}{2}\right) A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2 B_{k+1, k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $(k, k') \in \Gamma$ et $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \in \Gamma$, on a $B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \neq 0$; d'autre part, on a aussi $(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}) \in \Gamma$ et $(k + 1, k') \in \Gamma$, donc $B_{k+1, k'} \neq 0$. Donc on peut simplifier (35) et l'on a, pour $(k, k') \in \Gamma$ et $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \in \Gamma$,

$$(36) \quad \begin{aligned} \left(k' + \frac{1}{2}\right) (k' + 1) \left(k + \frac{1}{2}\right) (k + 1) A_{k,k'}^2 \\ = k' \left(k' + \frac{1}{2}\right) (k + 1) \left(k + \frac{3}{2}\right) A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2. \end{aligned}$$

Or le premier membre de (36) se déduit du deuxième membre en changeant (k, k') en $(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2})$. Donc

$$(37) \quad A_{k,k'}^2 = \frac{\Phi(k + k')}{(2k + 1)(2k + 2)(2k' + 1)(2k' + 2)} \quad \text{pour } (k, k') \in \Gamma.$$

Les équations (30) et (34) donnent aussi

$$\begin{aligned} (k' + 1) \left(k + \frac{3}{2}\right) B_{k+1, k'}^2 A_{k,k'} A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \\ = k' \left(k + \frac{1}{2}\right) B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2 A_{k,k'} A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $(k+1, k')$, $(k + \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2})$, $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2})$, $(k, k') \in \Gamma$, alors

$$A_{k,k'} A_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Raisonnant comme plus haut, on en déduit que

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{k,k'}^2 = \frac{\Psi(k-k')}{2k(2k+1)(2k'+1)(2k'+2)} \\ \text{pour } (k, k') \in \Gamma \quad \text{et} \quad (k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}) \in \Gamma. \end{array} \right.$$

Supposons les équations (37) et (38) satisfaites. Alors l'équation (30) est satisfaite pour $(k, k') \in \Gamma$, $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \in \Gamma$. Si $(k, k') \notin \Gamma$ ou $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \notin \Gamma$, l'équation (30) est encore satisfaite parce que les deux membres sont nuls. De même, (31) est satisfaite dans tous les cas.

Il reste donc à exprimer que $A_{k,k'}^2$, $B_{k,k'}^2$, donnés par (37) et (38), satisfont à (32) et (33). Il sera suffisant pour la suite d'établir le lemme suivant :

LEMME 4. — Soient λ et μ deux constantes réelles telles que le polynôme $P(X) = X^3 + \lambda X^2 + \mu$ admette les racines $p + \frac{1}{2}$, $q_0 - \frac{1}{2}$, $q_1 + \frac{1}{2}$.

Supposons

$$(39) \quad P(X) > 0 \quad \text{pour } X > p + \frac{1}{2}.$$

$$(40) \quad P(X) < 0 \quad \text{pour } q_0 - \frac{1}{2} < X < q_1 + \frac{1}{2}.$$

Soient $\Phi(X) = P(X + \frac{3}{2})$ et $\Psi(X) = -P(X - \frac{1}{2})$. Alors :

a. les formules (37) et (38) définissent pour $A_{k,k'}^2$ ($(k, k') \in \Gamma$) et $B_{k,k'}^2$ ((k, k') et $(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2}) \in \Gamma$) des valeurs > 0 ;

b. les équations (32) et (33) sont satisfaites.

L'assertion a. est immédiate. Vérifions (32) pour $(k, k') \in \Gamma$, $k > 0$. Si (k, k') , $(k - \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2})$, $(k - \frac{1}{2}, k' + \frac{1}{2})$, $(k + \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}) \in \Gamma$, les valeurs de $A_{k,k'}^2$, $A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2$, $B_{k,k'}^2$, $B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2$ sont fournies par (37) et (38).

Si $(k, k') \in \Gamma$ mais par exemple $\left(k - \frac{1}{2}, k' - \frac{1}{2}\right) \notin \Gamma$ (donc $k + k' = p$), on a $A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} = 0$, et en même temps

$$\Phi\left(k - \frac{1}{2} + k' - \frac{1}{2}\right) = \Phi(p - 1) = P\left(p + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

de sorte que la valeur de $A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}}^2$ est encore fournie par (37). Les autres cas particuliers conduisent à la même conclusion, et, en définitive on est ramené à vérifier que

$$\begin{aligned} (k'+1) \frac{P\left(k+k'+\frac{3}{2}\right)}{(2k+1)(2k+2)(2k'+1)(2k'+2)} - k' \frac{P\left(k+k'+\frac{1}{2}\right)}{2k(2k+1)2k'(2k'+1)} \\ - (k'+1) \frac{-P\left(k-k'-\frac{1}{2}\right)}{2k(2k+1)(2k'+1)(2k'+2)} + k' \frac{-P\left(k-k'+\frac{1}{2}\right)}{(2k+1)(2k+2)2k'(2k'+1)} = 1, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} kP\left(k+k'+\frac{3}{2}\right) - (k+1)P\left(k+k'+\frac{1}{2}\right) + (k+1)P\left(k-k'-\frac{1}{2}\right) \\ - kP\left(k-k'+\frac{1}{2}\right) = 2k(2k+1)(2k+2)(2k'+1), \end{aligned}$$

ce qui ne représente pas de difficulté. La vérification dans le cas de (33) conduit à la même identité, compte tenu du fait que $P(X)$ est pair.

REMARQUE. — Il est facile de voir que les conclusions du lemme sont satisfaites si les conditions (39) et (40) sont imposées seulement pour les valeurs de X qui interviennent effectivement dans les expressions de $A_{k,k'}^2$ et $B_{k,k'}^2$, à savoir pour des valeurs de X telles que $X - p + \frac{1}{2}$ soit entier.

5. Classification des représentations unitaires irréductibles.

Reprenons les notations de la figure 1. Si le point u_1 n'est pas sur un des axes $k=0$, $k'=0$, les équations (32) et (33) donnent

$$(41) \quad (k'_1+1)A_{k_1, k'_1}^2 + k'_1 B_{k_1+\frac{1}{2}, k'_1-\frac{1}{2}}^2 = 1,$$

$$(42) \quad (k_1+1)A_{k_1, k'_1}^2 - (k_1+1)B_{k_1+\frac{1}{2}, k'_1-\frac{1}{2}}^2 = 1.$$

Donc $(k'_1+1)A_{k_1, k'_1}^2 \leq (k_1+1)A_{k_1, k'_1}^2$; on a même l'inégalité stricte si $B_{k_1+\frac{1}{2}, k'_1-\frac{1}{2}}^2 \neq 0$ c'est-à-dire si $q_0 \neq q_1$. Bref, $k'_1 \leq k_1$, et même $k'_1 < k_1$

si $q_0 \neq q_1$. De même, si u_0 n'est pas sur un axe, $k'_0 \geq k_0$, et même $k'_0 > k_0$ si $q_0 \neq q_1$.

Ceci donne aussitôt les possibilités suivantes pour Γ : (Dans le cas de la figure 5, $\frac{1}{2}p$ est un demi-entier, donc p est entier ; on pourrait avoir $p = 0$, mais ce cas est un cas particulier de la figure 2).

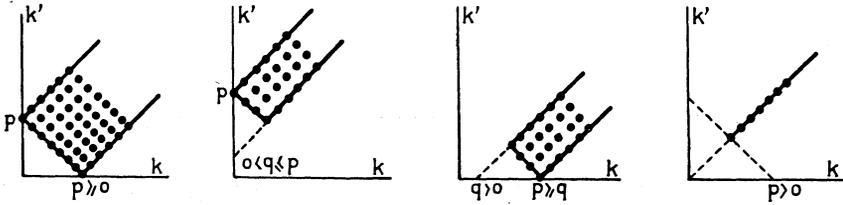


Fig. 2 - 3 - 4 - 5.

Nous pouvons maintenant entamer la classification des représentations unitaires irréductibles.

Les représentations $\pi_{p,0}$ ($p = 1, 2, 3, \dots$). — Nous nous plaçons dans le cas de la figure 5. Alors, tous les $B_{k,k'}$ sont nuls, et $A_{k,k'} = 0$ pour $k \neq k'$ et pour $k = k' < \frac{1}{2}p$. Il faut seulement choisir les $A_{k,k} > 0$ de façon que

$$(k+1)A_{k,k}^2 - kA_{k-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^2 = 1 \quad \left(k \geq \frac{1}{2}p\right).$$

Ceci détermine $A_{\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p}^2$ (puisque $A_{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p-\frac{1}{2}} = 0$), puis tous les $A_{k,k}^2$ par récurrence. On trouve :

$$(43) \quad A_{k,k}^2 = \frac{(2k-p+1)(2k+p+2)}{(2k+1)(2k+2)} \quad \left(k \geq \frac{1}{2}p\right),$$

D'où, pour $p = 1, 2, 3, \dots$, une représentation unitaire irréductible univariante de \mathfrak{G} que nous noterons $\pi_{p,0}$.

Les représentations $\pi_{p,q}$ ($p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$; $q = p, p-1, \dots, 1$ ou $\frac{1}{2}$). — Nous nous plaçons dans le cas de la figure 4. Les équations (41) et (42) déterminent A_{k_1, k'_1}^2 et $B_{k_1+\frac{1}{2}, k'_1-\frac{1}{2}}^2$ de manière unique. (Si $q = p$, seule (41) est valable, car (33) n'est pas applicable ; mais comme alors $B_{k_1+\frac{1}{2}, k'_1-\frac{1}{2}} = 0$, A_{k_1, k'_1} est encore déterminé de manière unique). Les équations (30) et (31)

déterminent alors les $A_{k,k'}$ et les $B_{k,k'}$ de proche en proche de manière univoque. Reste à vérifier qu'il existe effectivement une représentation unitaire irréductible dans le cas de la figure 4. Or le lemme 4 (avec $q_0 = -p$, $q_1 = -q$) assure qu'il en est bien ainsi en prenant

$$P(X) = \left(X - p - \frac{1}{2}\right) \left(X + p + \frac{1}{2}\right) \left(X + q - \frac{1}{2}\right) \left(X - q + \frac{1}{2}\right).$$

Nous noterons $\pi_{p,q}^-$ la représentation unitaire irréductible de G ainsi obtenue. Elle est univalente pour p entier, bivalente pour p demi-entier impair. On a, d'après le lemme 4

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{k,k'}^2 = \frac{(k+k'-p+1)(k+k'+p+2)(k+k'+q+1)(k+k'-q+2)}{(2k+1)(2k+2)(2k'+1)(2k'+2)} \\ [(k, k') \in \Gamma], \end{array} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{k,k'}^2 = -\frac{(k-k'-p-1)(k-k'+p)(k-k'+q-1)(k-k'-q)}{2k(2k+1)(2k'+1)(2k'+2)} \\ [(k, k') \in \Gamma]. \end{array} \right.$$

Les représentations $\pi_{p,q}^+$ ($p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$; $q = p, p-1, \dots, 1$ ou $\frac{1}{2}$). —

Nous nous plaçons dans le cas de la figure 3. Comme dans le cas précédent, on trouve une représentation unitaire irréductible et une seule, notée $\pi_{p,q}^+$. Cette fois, $q_0 = q$ et $q_1 = p$, d'où le même polynôme $P(X)$. Les formules (44) et (45) sont donc encore valables (le cas $k=0$, $k'=p$ étant exclu pour (45)). Notons que la formule (43) s'obtient à partir de (44) en y faisant $q=0$ ou $q=1$.

Les représentations $\nu_{0,\sigma}$ ($\sigma > -2$). — Il nous reste à examiner le cas de la figure 2. Le cas $p=0$ joue un rôle spécial. C'est celui que nous envisageons d'abord.

Comme dans le cas de $\pi_{p,0}$, nous avons seulement les relations

$$(k+1)A_{k,k}^2 - kA_{k-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^2 = 1,$$

mais cette fois pour $k > 0$ seulement. Posons

$$(46) \quad 2A_{0,0}^2 - \sigma + 2.$$

On obtient facilement

$$(47) \quad A_{k,k}^2 = \frac{4k^2 + 6k + 2 + \sigma}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Ainsi, pour chaque valeur > -2 de σ , on a une représentation unitaire irréductible univalente de \mathfrak{G} que nous noterons $\nu_{0,\sigma}$.

Les représentations $\nu_{p,\sigma}$ ($p = 1, 2, 3, \dots, \sigma > 0$). — Nous nous plaçons dans le cas de la figure 2, avec p entier > 0 . Posons

$$(48) \quad (p+1)(p+2)B_{\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p}^2 = \sigma.$$

Les équations (32) et (33), écrites pour $k = k' = \frac{1}{2}p$, permettent de calculer $A_{\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p}$ et $B_{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}$ en fonction de σ (car $A_{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p-\frac{1}{2}} = 0$). De proche en proche, (30) et (31) permettent de calculer tous les $A_{k,k'}$ et tous les $B_{k,k'}$. Pour vérifier qu'il existe effectivement une représentation unitaire irréductible correspondant à une valeur donnée de p ($= 1, 2, \dots$) et de $\sigma > 0$, appliquons le lemme 4 avec $q_0 = -p$, $q_1 = p$, et

$$P(X) = \left(X - p - \frac{1}{2}\right) \left(X + p + \frac{1}{2}\right) \left(X^2 + \sigma - \frac{1}{4}\right).$$

Ce polynôme admet bien les racines $p + \frac{1}{2}$, $q_0 - \frac{1}{2}$, $q_1 + \frac{1}{2}$, et l'on a $P(X) > 0$ pour $X > p + \frac{1}{2}$; pour $q_0 - \frac{1}{2} < X < q_1 + \frac{1}{2}$, on a

$$\left(X - p - \frac{1}{2}\right) \left(X + p + \frac{1}{2}\right) < 0;$$

si en outre $X - p + \frac{1}{2}$ est entier, X est demi-entier impair, donc $X^2 \geq \frac{1}{4}$, et $X^2 + \sigma - \frac{1}{4} > 0$. D'après la remarque suivant le lemme 4, on peut donc poser

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{k,k'}^2 = \frac{(k+k'-p+1)(k+k'+p+2)((k+k')^2 + 3(k+k') + 2 + \sigma)}{(2k+1)(2k+2)(2k'+1)(2k'+2)} \\ [(k, k') \in \Gamma], \end{array} \right.$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{k,k'}^2 = -\frac{(k-k'-p-1)(k-k'+p)((k-k')^2 - (k-k') + \sigma)}{2k(2k+1)(2k'+1)(2k'+2)} \\ [(k, k') \in \Gamma, (k, k') \neq (0, p)]. \end{array} \right.$$

En particulier, (50) donne bien $(p+1)(p+2)B_{\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p}^2 = \sigma$. Ainsi, on obtient, pour tout $\sigma > 0$, une représentation unitaire irréductible univale $\nu_{p,\sigma}$ de \mathfrak{G} .

Les représentations $\nu_{p,\sigma}$ ($p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \sigma > \frac{1}{4}$). — Nous nous plaçons dans le cas de la figure 2, avec p demi-entier impair. Posons

$$(51) \quad \left(p + \frac{3}{2}\right)^2 B_{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}p-\frac{1}{4}}^2 = \sigma - \frac{1}{4} \quad \left(\sigma > \frac{1}{4}\right).$$

Comme dans le cas précédent, la donnée de σ détermine les $A_{k,k'}$ et les $B_{k,k'}$ de manière unique. L'existence d'une représentation correspondante se vérifie par emploi du lemme 4 en prenant le même polynôme $P(X)$. (Cette fois, la remarque suivant le lemme 4 n'est pas utilisable, mais on se sert de l'inégalité $\sigma > \frac{1}{4}$). Les formules (49), (50) sont encore valables. En particulier, (50) donne bien $\left(p + \frac{3}{2}\right)^2 B_{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}}^2 = \sigma - \frac{1}{4}$. Ainsi, on obtient, pour tout $\sigma > \frac{1}{4}$, une représentation unitaire irréductible bivalente $\nu_{p,\sigma}$ de \mathfrak{G} . Notons que (47) se déduit de (49) en y faisant $p = 0$.

6. Calcul de l'opérateur de Casimir.

Soit ρ une représentation unitaire irréductible de \mathfrak{G}' . L'opérateur $\rho(\Omega)$ est un opérateur scalaire. En utilisant la troisième expression (12), il est facile de voir que

$$(52) \quad \frac{1}{2} \rho(\Omega) f_{\nu, \nu'}^{k, k'} \\ = \left(-k^2 - k - k'^2 - k' + (k+1)(k'+1) A_{k, k'} D_{k+\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - k(k'+1) B_{k, k'} C_{k-\frac{1}{2}, k'+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - k'(k+1) C_{k, k'} B_{k+\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} + k k' D_{k, k'} A_{k-\frac{1}{2}, k'-\frac{1}{2}} \right) f_{\nu, \nu'}^{k, k'}.$$

En particulier, faisant $\rho = \nu_{p,\sigma}$, $k = p$, $k' = 0$, il vient :

$$\frac{1}{2} \nu_{p,\sigma}(\Omega) = -p^2 - p + (p+1) \frac{(2p+2)(p^2+3p+2+\sigma)}{2(2p+1)(2p+2)} \\ - p \frac{(-2p)(p^2-p+\sigma)}{2(2p)(2p+1)} \\ = -p^2 - p + \frac{(p+1)(p^2+3p+2+\sigma) + p(p^2-p+\sigma)}{2(2p+1)} \\ = -p^2 - p + \frac{1}{2}(p^2+p+2) + \frac{1}{2}\sigma,$$

d'où

$$(53) \quad \nu_{p,\sigma}(\Omega) = -p^2 - p + 2 + \sigma.$$

On trouve de même

$$(54) \quad \pi_{p,q}^{\pm}(\Omega) = -p^2 - p + 2 - q^2 + q,$$

$$(55) \quad \pi_{p,0}(\Omega) = -p^2 - p + 2.$$

On déduit de là les résultats suivants :

1° Les représentations cataloguées au paragraphe 5 sont deux à deux inéquivalentes.

2° Si, à deux représentations unitaires irréductibles de \mathfrak{G}' , correspondent le même ensemble Γ et le même opérateur de Casimir, ces deux représentations sont équivalentes.

3° On définit un automorphisme θ d'ordre 2 de \mathfrak{g} en posant

$$\begin{aligned} \theta(L) &= L', & \theta(L') &= L, & \theta(X_\alpha) &= X_{-\beta}, & \theta(X_{-\beta}) &= X_\alpha, \\ \theta(X_\beta) &= X_{-\alpha}, & \theta(X_{-\alpha}) &= X_\beta, & \theta(X_\gamma) &= X_\gamma, & \theta(X_{-\gamma}) &= X_{-\gamma}, \\ \theta(X_\delta) &= X_{-\delta}, & \theta(X_{-\delta}) &= X_\delta. \end{aligned}$$

D'où des automorphismes, que nous noterons encore θ , de \mathfrak{G} et de \mathfrak{G}' . Ces automorphismes échangent \mathfrak{K}_1 et \mathfrak{K}_2 , \mathfrak{K}'_1 et \mathfrak{K}'_2 , donc le rôle des paramètres k et k' dans tout ce qui précède. D'autre part, $\theta(\Omega) = \Omega$. Pour toute représentation unitaire irréductible ρ de \mathfrak{G}' soit ρ^0 la représentation $s \rightarrow \rho(\theta(s))$ de \mathfrak{G}' . Le résultat 2 ci-dessus prouve alors que ρ^0 est équivalente à ρ pour $\rho = \pi_{p,0}$, $\rho = \nu_{p,\sigma}$, et que $\pi_{p,q}^{\pm\theta}$ est équivalente à $\pi_{p,q}^-$.

REMARQUE. — Puisque \mathfrak{G} est de rang 2, le centre de \mathfrak{U} admet deux générateurs algébriquement indépendants, par exemple Ω et l'élément

$$\begin{aligned} \Omega' &= (EK - FJ + GH)^2 - (BK - CJ + DH)^2 - (AK - CG + DF)^2 \\ &\quad - (AJ - BG + DE)^2 - (AH - BF + CE)^2 \\ &= \Phi^2 - [A, \Phi]^2 - [B, \Phi]^2 - [C, \Phi]^2 - [D, \Phi]^2 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Phi &= EK - FJ + GH \\ &= \frac{1}{4}(L^2 + M^2 + N^2 - L'^2 - M'^2 - N'^2). \end{aligned}$$

Bien que ce ne soit pas nécessaire pour le présent Mémoire, notons qu'un calcul facile donne :

$$\begin{aligned} \nu_{p,\sigma}(\Omega') &= -(p^2 + p)\sigma, \\ \pi_{p,q}^\pm(\Omega') &= (p^2 + p)(q^2 - q), \\ \pi_{p,0}(\Omega') &= 0. \end{aligned}$$

(Comme signalé dans [8], la classification de [9] présente quelques erreurs.

D'autre part, nos résultats diffèrent de ceux de [8] sur les points suivants :

Dans les représentations de classe III de [8], il faudrait remplacer l'inégalité $Q \geq \frac{5}{2} - \left(s + \frac{1}{2}\right)^2$ par l'inégalité $Q > \frac{9}{4} - \left(s + \frac{1}{2}\right)^2$ pour s entier, et par l'inégalité $Q > \frac{5}{2} - \left(s + \frac{1}{2}\right)^2$ pour s demi-entier impair.

Pour les représentations de classe IV a de [8], il faudrait remplacer $t(t+1)$ par $t(t-1)$ dans l'expression de Q , et remplacer l'inégalité $0 < t \leq s-1$ par $0 < t \leq s$; d'autre part, les valeurs $s = \frac{1}{2}$, $t = 1$ devraient être admises.

Modifications analogues pour les représentations de classe IV b.)

7. Paramètres sur le groupe \mathfrak{G}' .

Commençons par choisir un système de paramètres sur \mathfrak{G} . Soit (e_1, \dots, e_5) la base canonique de \mathbf{R}^5 . Pour tout $t \in \mathbf{R}$, soit r_t la rotation hyperbolique définie par

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \operatorname{ch} t + x_2 \operatorname{sh} t, & x'_2 &= x_1 \operatorname{sh} t + x_2 \operatorname{ch} t, \\ x'_3 &= x_3, & x'_4 &= x_4, & x'_5 &= x_5. \end{aligned}$$

D'autre part, nous munissons le sous-espace $\mathbf{R}e_2 + \mathbf{R}e_3 + \mathbf{R}e_4 + \mathbf{R}e_5$ d'une structure d'algèbre de quaternions, admettant e_2 pour élément neutre, avec la table de multiplication

$$\begin{aligned} e_3^2 &= e_4^2 = e_5^2 = -e_2, & e_3 e_4 &= -e_4 e_3 = e_5, \\ e_4 e_5 &= -e_5 e_4 = e_3, & e_5 e_3 &= -e_3 e_5 = e_4. \end{aligned}$$

Alors, tout quaternion q de norme 1 définit un opérateur de multiplication à gauche L_q et un opérateur de multiplication à droite R_q dans $\mathbf{R}e_2 + \dots + \mathbf{R}e_5$. Nous noterons encore L_q et R_q les prolongements linéaires à \mathbf{R}^5 de ces opérateurs définis par $L_q e_1 = R_q e_1 = e_1$. Dans ces conditions, l'ensemble des L_q est \mathfrak{K}_1 , l'ensemble des R_q est \mathfrak{K}_2 .

LEMME 5. — *Tout élément de \mathfrak{G} n'appartenant pas à \mathfrak{K} se met de manière unique sous la forme $k_1 r_t k$, où $k_1 \in \mathfrak{K}_1$, $t > 0$, $k \in \mathfrak{K}$. L'application $(k_1, t, k) \rightarrow k_1 r_t k$ de $\mathfrak{K}_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{K}$ dans \mathfrak{G} est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{K}_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{K}$ sur la variété analytique $\mathfrak{G} - \mathfrak{K}$.*

1° Soit $s \in \mathfrak{G}$, avec $s \notin \mathfrak{K}$. Alors $s(e_1)$ est non proportionnel à e_1 , donc

$$s(e_1) = e_1 \operatorname{ch} t + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5,$$

où $t > 0$ et où $\operatorname{ch}^2 t - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) = 1$. On peut poser

$$x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = (\operatorname{sh} t) q,$$

où q est un quaternion de norme 1. Alors

$$L_q^{-1} s(e_1) = e_1 \operatorname{ch} t + e_2 \operatorname{sh} t = r_t(e_1).$$

Donc $k = r_t^{-1} L_q^{-1} s \in \mathfrak{K}$, et $s = L_q r_t k$, ce qui prouve l'existence de la décomposition du lemme.

2° Supposons maintenant $k_1 r_l k' = k_1 r_l k$, où $k_1, k'_1 \in \mathfrak{R}_1$, $t, t' > 0, k, k' \in \mathfrak{R}$. On a $k'_1 r_l (e_1) = k_1 r_l k' (e_1) = k_1 r_l k (e_1) = k_1 r_l (e_1)$. Ceci donne

$$e_1 \operatorname{ch} t = e_1 \operatorname{ch} t', \quad k'_1 (e_2 \operatorname{sh} t') = k_1 (e_2 \operatorname{sh} t),$$

d'où $t = t'$, et $k'_1 e_2 = k_1 e_2$, donc $k'_1 = k_1$. Ceci prouve l'unicité de la décomposition du lemme.

3° Il est clair que l'application $(k_1, r_l, k) \rightarrow k_1 r_l k$ de $\mathfrak{R}_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{G} - \mathfrak{R}$ est analytique. D'autre part, la partie 1° de la démonstration montre que t et k_1 dépendent analytiquement de s , d'où la dernière assertion du lemme.

LEMME 6. — *Identifions $\mathfrak{G} - \mathfrak{R}$ à $\mathfrak{R}_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{R}$ grâce au lemme 5. Soient dk_1, dk des mesures de Haar sur \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R} . Alors la mesure $\operatorname{sh}^3 t dk_1 dt dk$ est la restriction à $\mathfrak{G} - \mathfrak{R}$ d'une mesure de Haar de \mathfrak{G} .*

La restriction à $\mathfrak{G} - \mathfrak{R}$ d'une mesure de Haar de \mathfrak{G} est de la forme $\varphi(k_1, t, k) dk_1 dt dk$, où φ est une fonction analytique > 0 . Expriment que cette mesure est invariante à droite par \mathfrak{R} et à gauche par \mathfrak{R}_1 , on voit qu'elle est en fait de la forme $\varphi(t) dk_1 dt dk$.

Soit t_0 un élément fixé de $]0, +\infty[$, et posons

$$(56) \quad r_{t_0}(k_1 r_l k) = k'_1 r_l k',$$

où k'_1, t', k' sont des fonctions de k_1, t, k (définies presque partout). Soient

$$k_1 = L_q, k'_1 = L_{q'}, q = x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5, q' = x'_2 e_2 + x'_3 e_3 + x'_4 e_4 + x'_5 e_5.$$

On a

$$\begin{aligned} (k_1 r_l k)(e_1) &= k_1 (e_1 \operatorname{ch} t + e_2 \operatorname{sh} t) \\ &= e_1 \operatorname{ch} t + (x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5) \operatorname{sh} t, \\ (k'_1 r_l k')(e_1) &= k'_1 (e_1 \operatorname{ch} t' + e_2 \operatorname{sh} t') \\ &= e_1 \operatorname{ch} t' + (x'_2 e_2 + x'_3 e_3 + x'_4 e_4 + x'_5 e_5) \operatorname{sh} t', \\ (r_{t_0} k_1 r_l k)(e_1) &= (e_1 \operatorname{ch} t_0 + e_2 \operatorname{sh} t_0) \operatorname{ch} t + x_2 (e_1 \operatorname{sh} t_0 + e_2 \operatorname{ch} t_0) \operatorname{sh} t \\ &\quad + (x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5) \operatorname{sh} t, \end{aligned}$$

donc (56) donne

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} t' &= \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t_0 + x_2 \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_0 \\ x'_2 \operatorname{sh} t' &= \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t_0 + x_2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t_0, \\ x'_3 &= x_3 \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t'}, \quad x'_4 = x_4 \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t'}, \quad x'_5 = x_5 \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t'}. \end{aligned}$$

Donc, k'_1 et t' sont en réalité des fonctions de k_1, t seulement, et l'on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} t' dt' &= \operatorname{ch} t_0 \operatorname{sh} t dt + x_2 \operatorname{sh} t_0 \operatorname{ch} t dt + \operatorname{sh} t_0 \operatorname{sh} t dx_2, \\ dx'_i &= \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t'} dx_i + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t'} x_i dt - x_i \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}^2 t'} \operatorname{ch} t' dt' \quad (i = 3, 4, 5), \\ dt' \wedge dx'_3 \wedge dx'_4 \wedge dx'_5 &= dt' \wedge \prod_{i=3}^5 \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t'} dx_i + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t'} x_i dt \right). \end{aligned}$$

On a $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$, d'où $dx_2 = -\frac{x_3}{x_2} dx_3 - \frac{x_4}{x_2} dx_4 - \frac{x_5}{x_2} dx_5$.

Donc,

$$\begin{aligned}
 & \text{sh}^4 t' dt' \wedge dx'_3 \wedge dx'_4 \wedge dx'_5 \\
 &= (\text{ch } t_0 \text{ sh } t dt + x_2 \text{ sh } t_0 \text{ ch } t dt + \text{sh } t_0 \text{ sh } t dx_2) \wedge \prod_{i=3}^5 (\text{sh } t dx_i + \text{ch } t x_i dt) \\
 &= \text{sh}^3 t (\text{ch } t_0 \text{ sh } t + x_2 \text{ sh } t_0 \text{ ch } t) dt \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \\
 &\quad - \frac{1}{x_2} \text{sh } t_0 \text{ sh } t (\text{sh}^2 t \text{ ch } t) (x_3 dx_3 \wedge x_3 dt \wedge dx_4 \wedge dx_5 + x_4 dx_4 \wedge dx_3 \\
 &\quad \quad \quad \wedge x_4 dt \wedge dx_5 + x_5 dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge x_5 dt) \\
 &= \left(\text{sh}^3 t (\text{ch } t_0 \text{ sh } t + x_2 \text{ sh } t_0 \text{ ch } t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{x_2} \text{sh } t_0 \text{ sh}^3 t \text{ ch } t \right) dt \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \\
 &= \left(\text{sh}^4 t \text{ ch } t_0 + \frac{1}{x_2} \text{sh } t_0 \text{ sh}^3 t \text{ ch } t \right) dt \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \\
 &= \frac{1}{x_2} \text{sh}^3 t x'_2 \text{ sh } t' dt' \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5,
 \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$(57) \quad \frac{1}{x_2} \text{sh}^3 t' dt' \wedge dx'_3 \wedge dx'_4 \wedge dx'_5 = \frac{1}{x_2} \text{sh}^3 t dt \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5,$$

Or, la mesure de Haar dk_1 s'identifie à la mesure euclidienne usuelle sur la sphère d'équation $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$, c'est-à-dire à la mesure $x_2^{-1} dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5$. L'égalité (57) peut donc s'écrire

$$(58) \quad \text{sh}^3 t' dt' \wedge dk'_1 = \text{sh}^3 t dt \wedge dk_1.$$

Par ailleurs, pour k_1 et t fixés, k' se déduit de k par une translation à gauche, donc $dk' = dk$. Combiné avec (58), ceci donne

$$\text{sh}^3 t' dt' \wedge dk'_1 \wedge dk' = \text{sh}^3 t dt \wedge dk_1 \wedge dk.$$

Or, on doit avoir $\varphi(t') dt' \wedge dk'_1 \wedge dk' = \varphi(t) dt \wedge dk_1 \wedge dk$. Ceci montre que $\varphi(t)^{-1} \varphi(t') = \text{sh}^{-3} t \text{sh}^3 t'$. Cette égalité devant être vraie quel que soit t_0 , on voit que $\varphi(t)$ est proportionnel à $\text{sh}^3 t$, ce qui achève la démonstration du lemme 6.

REMARQUE. — Ce lemme peut aussi se déduire facilement de [4], lemme 22, mais la démonstration du lemme cité est assez longue.

Passons maintenant au groupe \mathfrak{G}' . Soit $r'_i (t \in \mathbf{R})$ l'image de l'élément tA de \mathfrak{g} par l'application exponentielle de \mathfrak{g} dans \mathfrak{G}' . L'application $t \rightarrow r'_i$ est

un isomorphisme de \mathbf{R} sur un sous-groupe à un paramètre de \mathfrak{G}' , et r_i est l'image de r_i^* par l'application canonique $\mathfrak{G}' \rightarrow \mathfrak{G}$. Rappelons d'autre part que \mathfrak{R}' est un recouvrement à deux feuillets de \mathfrak{R} et que $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'_1 \times \mathfrak{R}'_2$.

LEMME 7. — *Tout élément de \mathfrak{G}' n'appartenant pas à \mathfrak{R}' se met de manière unique sous la forme $k_1^* r_i^* h_1^* h_2^*$, où $h_1^*, k_1^* \in \mathfrak{R}'_1$, $t > 0$, $h_2^* \in \mathfrak{R}'_2$. L'application $(k_1^*, t, h_1^*, h_2^*) \rightarrow k_1^* r_i^* h_1^* h_2^*$ de $\mathfrak{R}'_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{R}'_1 \times \mathfrak{R}'_2$ dans \mathfrak{G}' est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{R}'_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{R}'_1 \times \mathfrak{R}'_2$ sur la variété analytique $\mathfrak{G}' - \mathfrak{R}'$.*

Soient $s' \in \mathfrak{G}'$ et s son image canonique dans \mathfrak{G} . Si $s' \notin \mathfrak{R}'$, il existe $k_1 \in \mathfrak{R}'_1$, $k \in \mathfrak{R}$, $t > 0$ tels que $s = k_1 r_i k$. Donc il existe $h_1^* \in \mathfrak{R}'_1$, $k_1^* \in \mathfrak{R}'_1$, $h_2^* \in \mathfrak{R}'_2$ tels que s' et $k_1^* r_i^* h_1^* h_2^*$ soient congrus modulo le centre (à deux éléments) de \mathfrak{G}' . Comme ce centre est contenu dans \mathfrak{R}' , on peut, en modifiant h_1^* et h_2^* , faire en sorte que $s' = k_1^* r_i^* h_1^* h_2^*$. Si maintenant $k_1'^*, t', h_1'^*, h_2'^*$ sont tels que $s' = k_1'^* r_i'^* h_1'^* h_2'^*$, le lemme 5 entraîne que k_1^* et $k_1'^*$, r_i^* et $r_i'^*$, $h_1^* h_2^*$ et $h_1'^* h_2'^*$ ont même image canonique dans \mathfrak{G} . Ceci entraîne d'abord $t = t'$ et $k_1^* = k_1'^*$ (car l'élément $\neq e$ du centre de \mathfrak{G}' n'appartient pas à \mathfrak{R}'_1), donc $h_1^* h_2^* = h_1'^* h_2'^*$ et par suite $h_1^* = h_1'^*$, $h_2^* = h_2'^*$. Enfin, l'application bijective

$$(k_1^*, t, h_1^*, h_2^*) \rightarrow k_1^* r_i^* h_1^* h_2^* \text{ de } \mathfrak{R}'_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{R}'_1 \times \mathfrak{R}'_2$$

sur $\mathfrak{G}' - \mathfrak{R}'$ est en chaque point un isomorphisme local d'après le lemme 5. D'où la dernière assertion du lemme 7.

LEMME 8. — *Identifions $\mathfrak{G}' - \mathfrak{R}'$ à $\mathfrak{R}'_1 \times]0, +\infty[\times \mathfrak{R}'_1 \times \mathfrak{R}'_2$ grâce au lemme 7. Alors la mesure $sh^3 t dk_1^* dt dh_1^* dh_2^*$ est la restriction à $\mathfrak{G}' - \mathfrak{R}'$ d'une mesure de Haar de \mathfrak{G}' (dk_1^*, dh_1^*, dh_2^* désignant des mesures de Haar de $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2$).*

Ceci s'établit exactement comme le lemme 6, compte tenu du fait que le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 s'identifie à \mathfrak{R}'_1 .

8. Équations différentielles vérifiées par certains coefficients des représentations.

Nous utilisons les notations antérieures, et notamment celles du paragraphe 5.

LEMME 9. — *Soit ρ une représentation unitaire irréductible de \mathfrak{G}' dans \mathfrak{X} . Supposons qu'il existe dans \mathfrak{X} un sous-espace $\mathfrak{X}_{0,p}$ (ce qui est le cas pour $\rho = \pi_{p,q}^+$ et pour $\rho = \nu_{p,\sigma}$).*

a. *Pour $s = k_1^* r_i^* h_1^* h_2^*$ ($h_1^*, k_1^* \in \mathfrak{R}'_1$, $t > 0$, $h_2^* \in \mathfrak{R}'_2$), on a*

$$(\rho(s) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) = (\rho(r_i^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) (\rho(h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}).$$

b. *La fonction $t \rightarrow (\rho(r_i^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p})$ est paire.*

La restriction de ρ à \mathfrak{K}'_1 est triviale dans $\mathfrak{A}_{0,p}$. Donc

$$\begin{aligned} (\rho(k_1^* r_l^* h_1^* h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) &= (\rho(h_2^*) \rho(h_1^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | \rho(r_{-l}^*) \rho(k_1^{*-1}) f_{0,\nu'}^{0,p}) \\ &= (\rho(h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | \rho(r_l^*) f_{0,\nu'}^{0,p}). \end{aligned}$$

Désignons par P le projecteur orthogonal de \mathfrak{A} sur $\mathfrak{A}_{0,p}$. Comme $\rho(h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} \in \mathfrak{A}_{0,p}$, le produit scalaire précédent est encore égal à

$$(59) \quad (\rho(h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | P \rho(r_{-l}^*) f_{0,\nu'}^{0,p}) = \sum_{\mu'} (\rho(h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\mu'}^{0,p}) (f_{0,\mu'}^{0,p} | \rho(r_{-l}^*) f_{0,\nu'}^{0,p}).$$

Nous allons montrer que $(f_{0,\mu'}^{0,p} | \rho(r_{-l}^*) f_{0,\nu'}^{0,p}) = 0$ si $\mu' \neq \nu'$. Comme le produit scalaire envisagé est une fonction analytique de t (car $f_{0,\nu'}^{0,p} \in \mathfrak{A}_{0,p}$ est un vecteur analytique pour ρ), il suffit de prouver que les dérivées successives de cette fonction pour $t = 0$ sont nulles. Or ces dérivées sont fournies, à des facteurs constants près, par les produits scalaires $(f_{0,\mu'}^{0,p} | \rho(A^n) f_{0,\nu'}^{0,p})$. Par ailleurs

$$2^n \rho(A^n) f_{0,\nu'}^{0,p} = \rho((X_\gamma + X_{-\gamma})^n) f_{0,\nu'}^{0,p} = \sum_{(\varepsilon_i)} \rho(X_{\varepsilon_1 \gamma}) \rho(X_{\varepsilon_2 \gamma}) \dots \rho(X_{\varepsilon_n \gamma}) f_{0,\nu'}^{0,p},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$. Nous pouvons calculer chaque terme

$$\rho(X_{\varepsilon_1 \gamma}) \rho(X_{\varepsilon_2 \gamma}) \dots \rho(X_{\varepsilon_n \gamma}) f_{0,\nu'}^{0,p}$$

en utilisant les formules (15) et (16). Nous trouvons une combinaison linéaire de vecteurs $f_{\nu^*, \nu'^*}^{k, k'}$, où

$$\nu^* = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n), \quad \nu'^* = \nu' + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n).$$

Or $(f_{0,\mu'}^{0,p} | f_{\nu^*, \nu'^*}^{k, k'}) = 0$ si $(k, k') \neq (0, p)$. Si $k = 0$, on a $\nu^* = 0$, donc $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 0$, donc $\nu'^* = \nu'$, donc $(f_{0,\mu'}^{0,p} | f_{\nu^*, \nu'^*}^{k, k'}) = 0$ sauf si $\mu' = \nu'$. Donc la somme (59) se réduit au seul terme

$$(\rho(h_2^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) (f_{0,\nu'}^{0,p} | \rho(r_{-l}^*) f_{0,\nu'}^{0,p})$$

ce qui est le a . du lemme. Enfin, avec les notations précédentes, on a $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \neq 0$ si n est impair, donc $(\rho(A^n) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) = 0$ si n est impair, de sorte que toutes les dérivées d'ordre impair de la fonction $t \rightarrow (\rho(r_l^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p})$ sont nulles; ceci donne le b . du lemme.

Si $X \in \mathfrak{g}$ et $s \in \mathfrak{G}'$ nous noterons X^s l'élément Ads. $X = s X s^{-1}$. Avec cette notation :

LEMME 10. — Soit $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. Dans \mathfrak{U} , on a, modulo $\mathfrak{U}\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_1^{\exp tA} \mathfrak{U}$,

$$\Omega \equiv -A^2 + 3(\coth t)A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)(L'^2 + M'^2 + N'^2).$$

On a

$$\begin{aligned}
 & (lL + mM + nN)^{\exp tA} \\
 &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & -m & -n \\ 0 & l & 0 & -n & m \\ 0 & m & n & 0 & -l \\ 0 & n & -m & l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l \operatorname{sh} t & -m \operatorname{sh} t & -n \operatorname{sh} t \\ 0 & 0 & -l \operatorname{ch} t & -m \operatorname{ch} t & -n \operatorname{ch} t \\ -l \operatorname{sh} t & l \operatorname{ch} t & 0 & -n & m \\ -m \operatorname{sh} t & m \operatorname{ch} t & n & 0 & -l \\ -n \operatorname{sh} t & n \operatorname{ch} t & -m & l & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\operatorname{sh} t (lB + mC + nD) + \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t + 1) (lL + mM + nN) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - 1) (lL' + mM' + nN').
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 lB + mC + nD &= -\frac{1}{\operatorname{sh} t} (lL + mM + nN)^{\exp tA} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \coth \frac{t}{2} (lL + mM + nN) + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{t}{2} (lL' + mM' + nN').
 \end{aligned}$$

Modulo $\mathfrak{U}\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_1^{\exp tA} \cdot \mathfrak{U}$, on a donc

$$\begin{aligned}
 B^2 &\equiv \frac{1}{2} \left(\coth \frac{t}{2} L + \operatorname{th} \frac{t}{2} L' \right) B \\
 &= \frac{1}{2} \coth \frac{t}{2} [L, B] + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{t}{2} [L', B] + \frac{1}{2} B \left(\coth \frac{t}{2} L + \operatorname{th} \frac{t}{2} L' \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \coth \frac{t}{2} A - \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{t}{2} A \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\operatorname{sh} t} L^{\exp tA} + \frac{1}{2} \coth \frac{t}{2} L + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{t}{2} L' \right) \left(\coth \frac{t}{2} L + \operatorname{th} \frac{t}{2} L' \right) \\
 &\equiv -\coth t A + \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} L'^2.
 \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned}
 C^2 &\equiv -\coth t A + \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} M'^2, \\
 D^2 &\equiv -\coth t A + \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} N'^2,
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2) - A^2 - B^2 - C^2 - D^2 \\ &\equiv \frac{1}{2}(L'^2 + M'^2 + N'^2) - A^2 + 3 \coth t A - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} (L'^2 + M'^2 + N'^2) \\ &= -A^2 + 3 \coth t A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right) (L'^2 + M'^2 + N'^2).\end{aligned}$$

LEMME 11. — Soit f une fonction indéfiniment différentiable sur \mathfrak{G}' , telle que $f(sk_1) = f(k_1s) = f(s)$ pour tout $s \in \mathfrak{G}'$ et tout $k_1 \in \mathfrak{R}'_1$. Soit g la fonction $t \rightarrow f(\exp tA)$ ($t \in \mathbb{R}$). Pour $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}(\Omega f)(\exp tA) &= -\frac{d^2 g}{dt^2}(t) - 3 \coth t \frac{dg}{dt}(t) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right) ((L'^2 + M'^2 + N'^2)f(\exp tA)).\end{aligned}$$

Nous interprétons tout élément X de \mathfrak{U} à la fois comme une distribution sur \mathfrak{G}' (de support $\{e\}$), et comme un opérateur différentiel invariant à droite sur \mathfrak{G}' , par $Xf = X \star f$. L'hypothèse que f est invariante à gauche par \mathfrak{R}'_1 entraîne d'abord que $X \star f = 0$ pour $X \in \mathfrak{k}_1$, donc pour $X \in \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{k}_1$. D'autre part, toute translatée à gauche de f est encore invariante à droite par \mathfrak{R}'_1 ; donc, pour tout $Y \in \mathfrak{U}$, $Y \star f$ est encore invariante à droite par \mathfrak{R}'_1 , ce qui peut s'exprimer sous la forme

$$(Y \star f)((sk_1s^{-1})s) = (Y \star f)(s) \quad (s \in \mathfrak{G}', k_1 \in \mathfrak{R}'_1).$$

Il en résulte que, pour tout $Z \in \mathfrak{k}_1$, $Z^s \star (Y \star f)$ s'annule en s . Donc $X \star f$ s'annule en s pour tout $X \in \mathfrak{k}_1^s \cdot \mathfrak{U}$. Compte tenu du lemme 10, la valeur en $\exp tA$ de Ωf est la même que la valeur en $\exp tA$ de

$$-A^2 f + 3 \coth t A f + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right) (L'^2 + M'^2 + N'^2) f.$$

D'autre part, désignant par ε_s la mesure de Dirac en $s \in \mathfrak{G}'$,

$$\begin{aligned}(Af)(\exp tA) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\varepsilon_{\exp \tau A} \star f - f)(\exp tA) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f(\exp(-\tau A) \exp(tA)) - f(\exp tA)] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (g(t - \tau) - g(t)) = -\frac{dg}{dt}(t)\end{aligned}$$

et de même $(A^2 f)(\exp tA) = \frac{d^2 g}{dt^2}(t)$. D'où le lemme.

LEMME 12. — Soient ρ une représentation unitaire irréductible de \mathfrak{G}' dans \mathfrak{X} , et $\omega. 1 = \rho(\Omega)$. Supposons qu'il existe dans \mathfrak{X} un sous-espace $\mathfrak{X}_{0,p}$. Soit $\zeta \in \mathfrak{X}_{0,p}$. Alors la fonction $t \rightarrow (\rho(r_t^*) \zeta | \zeta) = g(t)$ ($t > 0$) vérifie l'équation

$$(60) \quad \frac{d^2 g}{dt^2} + 3 \coth t \frac{dg}{dt} + \left(\omega + 2p^2 + 2p - (p^2 + p) \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right) g = 0.$$

En effet, la fonction $s \rightarrow f(s) = (\rho(s) \zeta | \zeta)$ est invariante à gauche et à droite par \mathfrak{K}' , et vérifie $(\Omega f)(s) = (\rho(\Omega) \rho(s) \zeta | \zeta) = \omega f(s)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} (L'^2 + M'^2 + N'^2) f(s) &= (\rho(s) \zeta | \rho(L'^2 + M'^2 + N'^2) \zeta) \\ &= -4p(p+1) f(s). \end{aligned}$$

Alors, le lemme 11 donne

$$(\Omega f)(\exp t A) = -\frac{d^2 g}{dt^2}(t) - 3 \coth t \frac{dg}{dt}(t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right) 4p(p+1) g(t).$$

D'où le lemme 12.

LEMME 13. — Définissons ρ , ω , p comme au lemme 12. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$(61) \quad (\rho(r_t^*) f_{0; \nu'}^{0; p} | f_{0; \nu'}^{0; p}) = \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right)^{\theta} F \left(\theta + p, \theta - p - 1, 2, \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right)$$

où F est la notation classique pour les fonctions hypergéométriques, où θ est une racine quelconque de

$$(62) \quad \theta^2 - 3\theta + \omega + p^2 + p = 0,$$

et où l'on prend la détermination principale de $\left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right)^{\theta}$.

Soit $g(t) = (\rho(r_t^*) f_{0; \nu'}^{0; p} | f_{0; \nu'}^{0; p})$. La fonction g est analytique pour tout $t \in \mathbf{R}$, égale à 1 en 0, et paire (lemme 9). Donc, si nous faisons le changement de variable $\operatorname{th}^2 \frac{t}{2} = x$, il existe une fonction $\gamma(x)$, analytique pour $0 < x < 1$ et pour $x = 0$, égale à 1 pour $x = 0$, telle que

$$(63) \quad g(t) = \gamma \left(\operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right).$$

Un calcul facile donne

$$\begin{aligned} \coth t \frac{dg}{dt} &= \frac{1}{2} (1 - x^2) \frac{d\gamma}{dx}, \\ \frac{d^2 g}{dt^2} &= \frac{1}{2} (1 - x) (1 - 3x) \frac{d\gamma}{dx} + x(1 - x)^2 \frac{d^2 \gamma}{dx^2}. \end{aligned}$$

L'équation (60) se transforme en

$$(64) \quad x(1-x)^2 \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + 2(1-x) \frac{d\gamma}{dx} + (\omega + 2p^2 + 2p - (p^2 + p)x) \gamma = 0.$$

Pour $0 \leq x < 1$, posons $\gamma(x) = (1-x)^{\theta} \eta(x)$, θ étant un exposant réel ou complexe (on prend la détermination principale de $(1-x)^{\theta}$). Alors, η est encore une fonction analytique pour $0 < x < 1$ et pour $x=0$, égale à 1 pour $x=0$. L'équation transformée de (64) est

$$(65) \quad x(1-x)^{\theta+2} \frac{d^2 \eta}{dx^2} + 2(1-x)^{\theta+1} (1-\theta x) \frac{d\eta}{dx} \\ + (1-x)^{\theta} [\theta(\theta-1)x - 2\theta + \omega + 2p^2 + 2p - (p^2+p)x] \eta = 0.$$

Prenons θ racine de (62). Alors, le crochet est divisible par $1-x$ et (65) devient

$$(66) \quad x(1-x) \frac{d^2 \eta}{dx^2} + 2(1-\theta x) \frac{d\eta}{dx} + (\omega + 2p^2 + 2p - 2\theta) \eta = 0,$$

qui est une équation hypergéométrique. Comme η est holomorphe et égale à 1 pour $x=0$, on trouve, avec les notations classiques

$$(67) \quad \eta(x) = F(\alpha, \beta, 2, x),$$

où α et β sont les solutions de

$$\alpha + \beta + 1 = 2\theta, \quad \alpha\beta = 2\theta - 2p^2 - 2p - \omega,$$

soit $\alpha = \theta + p$, $\beta = \theta - p - 1$.

9. Comportement asymptotique de certains coefficients des représentations.

Envisageons d'abord le cas des représentations $\pi_{p,q}^+$. On a dans ce cas $\omega = -p^2 - p + 2 - q^2 + q$. Les racines de (62) sont $q+1$ et $-q+2$. Prenons $\theta = q+1$. Alors

$$(\pi_{p,q}^+(r_i^*) f_{0;p'}^0 | f_{0;p'}^0) = \left(1 - \text{th}^2 \frac{t}{2}\right)^{q+1} F\left(p+q+1, q-p, 2, \text{th}^2 \frac{t}{2}\right).$$

Comme $p-q$ est entier, $F(p+q+1, q-p, 2, x)$ est un *polynome de Jacobi* de degré $p-q$:

$$F(p+q+1, q-p, 2, x) \\ = \mathfrak{F}_{p-q}(2q+1, 2, x) = 1 - \frac{(p+q+1)(p-q)}{2! 1!} x \\ + \frac{(p+q+1)(p+q+2)(p-q)(p-q-1)}{3! 2!} x^2 + \dots \\ + \frac{(p+q+1)(p+q+2)\dots(2p)(p-q)(p-q-1)\dots 1}{(p-q+1)!(p-q)!} x^{p-q} \\ = \frac{1}{(p-q+1)!} \frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}} [x^{p-q+1} (1-x)^{p+q-1}].$$

Ce polynôme n'admet pas 1 pour racine. D'autre part, $1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \sim 4e^{-t}$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc, quand $t \rightarrow +\infty$,

$$(68) \quad (\pi_{p,q}(r_i^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) \sim \lambda e^{-(q+1)t},$$

λ désignant une constante non nulle (qu'on peut calculer explicitement). De là, nous déduisons le résultat principal de cet article :

THÉORÈME 1. — *Pour $q \geq \frac{5}{2}$, les représentations $\pi_{p,q}^\pm$ sont intégrables.*

Pour $q = 1, \frac{3}{2}, 2$, $\pi_{p,q}^\pm$ est de carré intégrable, mais non intégrable.

Pour $q = \frac{1}{2}$, $\pi_{p,q}^\pm$ n'est pas de carré intégrable.

D'après la remarque 3° du paragraphe 6, il suffit d'envisager le cas de $\pi_{p,q}^+$. Pour que la fonction $t \rightarrow (\pi_{p,q}^+(r_i^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p})$ ($t > 0$) soit intégrable (resp. de carré intégrable) pour la mesure $\operatorname{sh}^3 t dt$, il faut et il suffit, d'après (68), que $q + 1 > 3$ (resp. $2q + 2 > 3$). Compte tenu des lemmes 8 et 9, pour que la fonction $s \rightarrow (\pi_{p,q}^+(s) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p})$ sur \mathfrak{G}' soit intégrable (resp. de carré intégrable), il faut et il suffit que $q > 2$ (resp. $q > \frac{1}{2}$). Donc $\pi_{p,q}^+$ est de carré intégrable si et seulement si $q > \frac{1}{2}$; et, compte tenu du lemme 4 de [4], $\pi_{p,q}^+$ est intégrable si et seulement si $q > 2$.

Envisageons maintenant le cas des représentations $\nu_{p,\sigma}$. L'équation (62) s'écrit dans ce cas

$$(69) \quad \theta^2 - 3\theta + 2 + \sigma = 0.$$

A. Supposons d'abord $\sigma < \frac{1}{4}$ (donc p entier). L'équation (69) admet deux racines réelles. Prenons $\theta = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}$. Ceci donne

$$\begin{aligned} & (\nu_{p,\sigma}(r_i^*) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) \\ &= \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}} \\ & \times F\left(\frac{3}{2} + p - \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}, \frac{1}{2} - p - \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}, 2, \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Puisque $2 - \alpha - \beta = 2 \left(\frac{1}{4} - \sigma \right)^{1/2} > 0$, on a, quand $x \rightarrow 1 - 0$ (cf. [10], p. 282) :

$$\begin{aligned}
 (70) \quad & F\left(\frac{3}{2} + p - \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}, \frac{1}{2} - p - \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}, 2, x\right) \\
 & \rightarrow \Gamma(2) \Gamma\left(2 \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}\right) \\
 & \quad \times \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} - p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2} + p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}\right) \\
 & = \Gamma((1 - 4\sigma)^{1/2}) \\
 & \quad \times \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} - p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2} + p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}\right).
 \end{aligned}$$

Or $(1 - 4\sigma)^{1/2} > 0$, $\frac{3}{2} + p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2} > 0$; pour p entier > 0 , on a $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{2} - p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2}$ n'est pas entier; pour $p = 0$,

$$\frac{1}{2} - p + \left(\frac{1}{4} - \sigma\right)^{1/2} > 0.$$

Bref, la valeur limite (70) est différente de 0. Donc, quand $t \rightarrow +\infty$,

$$(71) \quad (\nu_{p,\sigma}(r_i^*) f_{0,\nu}^0 | f_{0,\nu}^0) \sim \lambda e^{(-\frac{3}{2} + (\frac{1}{4} - \sigma)^{1/2})t},$$

λ désignant une constante non nulle.

B. Supposons $\sigma = \frac{1}{4}$ (donc p entier). L'équation (69) admet la racine double $\frac{3}{2}$. Donc

$$(\nu_{p,\frac{1}{4}}(r_i^*) f_{0,\nu}^0 | f_{0,\nu}^0) = \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{3}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 2, \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)$$

Or on a, quand $x \rightarrow 1 - 0$ (cf. [10], p. 299, exercice 18),

$$F\left(\frac{3}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 2, x\right) \sim - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + p\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)} \log(1 - x).$$

Donc, quand $t \rightarrow +\infty$,

$$(72) \quad (\nu_{p,\sigma}(r_i^*) f_{0,\nu}^0 | f_{0,\nu}^0) \sim \lambda t e^{-\frac{3}{2}t},$$

λ désignant une constante non nulle.

C. Supposons $\sigma > \frac{1}{4}$. L'équation (69) admet les racines $\frac{3}{2} \pm i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}$.

Donc

$$\begin{aligned} & (\nu_{p,\sigma}(r_i^*) f_{0,\nu}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) \\ &= \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2} + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}} \\ & \quad \times F\left(\frac{3}{2} + p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \frac{1}{2} - p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}, 2, \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Utilisons la formule de [10], p. 291, 1.3-5 :

$$\begin{aligned} & \Gamma(c-a) \Gamma(c-b) \Gamma(a) \Gamma(b) F(a, b, c, z) \\ &= \Gamma(c) \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c-a-b) F(a, b, a+b-c+1, 1-z) \\ & \quad + \Gamma(c) \Gamma(c-a) \Gamma(c-b) \Gamma(a+b-c) \\ & \quad \times (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z). \end{aligned}$$

Ici $\Gamma(a) \Gamma(c-a) = \Gamma(a) \Gamma(2-a) = (1-a) \pi / \sin \pi a$. D'où

$$\begin{aligned} & \Gamma(c-a) \Gamma(c-b) \Gamma(a) \Gamma(b) \\ &= \frac{2\pi^2(1-a)(1-b)}{\cos \pi(a-b) - \cos \pi(a+b)} \\ &= \frac{-2\pi^2\left(\frac{1}{2} + p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right)\left(\frac{1}{2} + p - i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right)}{\cos \pi(1+2p) - \cos \pi\left(2 + 2i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right)} \\ &= \frac{2\pi^2(p^2 + p + \sigma)}{(-1)^{2p} + \operatorname{ch} 2\pi\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2(p^2 + p + \sigma)}{(-1)^{2p} + \operatorname{ch} 2\pi\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} (\nu_{p,\sigma}(r_i^*) f_{0,\nu}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) \\ &= \operatorname{Re} \left[\Gamma\left(\frac{3}{2} + p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right) \right. \\ & \quad \times \Gamma\left(-2i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right) \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}\right)^{i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}} \\ & \quad \left. \times \left\{ F\left(\frac{3}{2} + p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \frac{1}{2} - p + i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2i\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}, 1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \end{array} \right\} \right]. \end{aligned}$$

donc

$$(73) \quad (\nu_{p,\sigma}(r^t) f_{0,\nu'}^{0,p} | f_{0,\nu'}^{0,p}) \sim \operatorname{Re} \left[\lambda e^{\left(-\frac{3}{2} + i \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right)t} \right]$$

quand $t \rightarrow +\infty$.

En raisonnant comme pour le théorème 1, on déduit de ces évaluations asymptotiques le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Aucune représentation $\nu_{p,\sigma}$ n'est de carré intégrable.*

(Notre méthode ne donne rien concernant les $\pi_{p,0}$. R. Takahashi a récemment montré que les $\pi_{p,0}$ ne sont pas de carré intégrable).

On remarquera de nombreuses analogies entre les résultats précédents et ceux de Bargmann.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BARGMANN (V.). — Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Annals of Math.*, t. 48, 1947, p. 568-640.
- [2] DIXMIER (J.). — Sur les représentations de certains groupes orthogonaux, *C. R. Acad.Sc.*, Paris, t. 250, 1960, p. 3263-3265.
- [3] HARISH-CHANDRA. — Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 185-243.
- [4] HARISH-CHANDRA. — Representations of semi-simple Lie groups, VI., *Amer. J. Math.*, t. 78, 1956, p. 564-628.
- [5] HARISH-CHANDRA. — Spherical functions on a semi-simple Lie group, I., *Amer. J. Math.*, t. 80, 1958, p. 241-310.
- [6] NELSON (E.). — Analytic vectors, *Annals of Math.*, t. 70, 1959, p. 572-615.
- [7] NEUMARK (M. A.). — Linear representations of the Lorentz group, *Uspekhi Mat. Nauk*, N. S., t. 9, 1954, n° 4 (62), p. 19-93; *Amer. math. Soc. Transl.*, Series 2, t. 6, 1957.
- [8] NEWTON (T. D.). — A note on the representations of the De Sitter group, *Annals of Math.*, t. 51, 1950, p. 730-733.
- [9] THOMAS (L. H.). — On unitary representations of the group of De Sitter space, *Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 113-126.
- [10] WHITTAKER (E. T.) and WATSON (G. N.). — *A course of modern analysis*, 4^e éd. Cambridge, Cambridge University Press, 1935.

(Manuscrit reçu le 16 juin 1960.)

Jacques DIXMIER, Prof. Fac. Sc. Paris,
64, rue Gay-Lussac, Paris (5^e).