CIPRIAN FOIAS

Une remarque sur l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension *n*

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__1_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 1 à 8.

UNE REMARQUE SUR L'UNICITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN DIMENSION n,

PAR

CIPRIAN FOIAS.

(Bucarest).

Le but de cette note est de donner des classes intermédiaires de solutions (dans tout l'espace) des équations de Navier-Stokes en dimension n, classes dans lesquelles l'unicité soit assurée. Pour les cas $n = 2$ et $n = 3$ nos résultats sont voisins à ceux correspondants de J.-L. LIONS-G. PRODI (1) et G. PRODI (2), résultats qui d'ailleurs nous ont inspiré.

1. Soit $\mathbf{L}^p = \overset{n}{\underset{1}{X}} L^p(R^n)$, soit $\mathbf{L}_1^p$ l'espace de $u \in \mathbf{L}^p$ tels que $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \in \mathbf{L}^p$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ muni par la norme usuelle (3), et soient $\mathbf{S}^2$, resp. $\mathbf{S}_1^2$ l'adhérence dans $\mathbf{L}^2$, resp. $\mathbf{L}_1^2$, de l'ensemble $\mathbf{S}_0^\infty$ des $\mathbf{u} = (u_j)$ de $\mathbf{C}_0^\infty = \overset{n}{\underset{1}{X}} C_0^\infty(R^n)$, tels que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

(1) LIONS (J.-L.) et PRODI (Giovanni). — Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3519-3521.

(2) PRODI (Giovanni). — Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes, *Annali di Mat. pura ed appl.*, t. 48, 1959, p. 173-182; quant aux théorèmes d'unicité donnés, dans ce cas ($n = 3$), dans : KICELEV (A. A.) et LADYZENSKAJA (O. A.). — Sur l'existence et l'unicité de la solution du problème non stationnaire pour un liquide visqueux incompressible, *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, t. 21, 1957, p. 655-680, ils sont contenus dans les nôtres.

(3) Sauf mention spéciale, tous les espaces considérés sont des espaces réels; leurs topologies et les normes correspondantes sont celles usuelles; la norme dans L^p, resp. L_1^p, sera désignée par $|\ \ |_p$, resp. $\|\ \ \|_p$.

Par définition, *une solution, resp. solution forte, des équations de Navier-Stokes sera une fonction* $\mathbf{u}(t) \in L^2((-\infty, T); \mathbf{S}^2)$, *resp.* $L^2((-\infty, T); \mathbf{S}_1^2)$ (⁴), *nulle pour* $t < 0$ *et vérifiant au sens de la théorie des distributions, le système*

$$(1) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} - \nu \Delta u_j + \frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k} = f_j + u_j^0 \otimes \delta + \frac{\partial p}{\partial x_j}, \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, n), \quad (^5)$$

où ν, $T > 0$, $\quad \mathbf{f}(t) \in L^2((-\infty, T); \mathbf{L}^2)$, $\mathbf{f}(t) = 0$ *pour* $t < 0$, $\quad u^0 \in \mathbf{S}^2$ *sont donnés d'avance (et fixés!), p est une distribution sur* $(-\infty, T) \times R^n$ *et* $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j . \partial x_j}$.

Soit $\mathfrak{S} = \overset{n}{\underset{1}{X}} \mathcal{S}_n$, où $\mathcal{S}_n$ est l'espace de L. Schwartz des fonctions numériques (réelles), définies sur R^n indéfiniment différentiables et rapidement décroissantes (vers l'infini), et soit, par définition,

$$(2) \qquad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{\Phi}) = \int_{R^n} u_k v_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} dx,$$

où $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2$ et $\mathbf{\Phi} \in \mathfrak{S}$. Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble des $\mathbf{u} \in \mathfrak{S}$ tels que div $\mathbf{u} = 0$.

Dans ce qui suit, un rôle important sera joué par la proposition suivante :

Proposition préliminaire. — *Soit* $\mathbf{u}$ *une solution des équations de Navier-Stokes. Il existe alors un ensemble de mesure nulle* $N(\mathbf{u}) \subset [0, T[$ *dépendant seulement de* $\mathbf{u}$, *tel que pour tout* $t_0 \notin N(\mathbf{u})$, $t_0 \in [0, T[$ *on ait* (⁶)

$$(3) \quad (\mathbf{u}(t_0), \mathbf{\Phi}_0(t_0)) = (\mathbf{u}^0, \mathbf{\Phi}_0(0)) + \int_0^{t_0} (\mathbf{f}(t), \mathbf{\Phi}_0(t))\, dt + \int_0^{t_0} [(\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}'_0(t)) + \nu(\mathbf{u}(t), \Delta \mathbf{\Phi}_0(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}_0(t))]\, dt$$

quelle que soit $\mathbf{\Phi}_0(t) \in C^1([0, t_0]; \mathbf{S})$ (⁷).

(⁴) Pour un espace de Banach X et un intervalle $I \subset R^1$, $L^p(I; X)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, désigne l'espace des fonctions de puissance p-ième sommable à valeurs dans dans X. Évidemment on a $L^p(I; \mathbf{L}^p) = \overset{n}{\underset{1}{X}} L^p(I \times R^n)$.

(⁵) Évidemment toute solution forte est aussi une solution (tout simplement), et comme $u_j u_k \in L^1(R^n)$ il résulte que $u_j u_k$ est une distribution (tempérée), donc $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_k)$ a un sens.

(⁶) (,) désigne le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2$.

(⁷) Pour un espace vectoriel topologique X, $C^1([0, t_0]; X)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans X, définies et continûment dérivables sur $[0, t_0]$. La topologie dans $C^1([0, t_0]; X)$ étant celle de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées.

Nous allons démontrer cette proposition par plusieurs étapes, en utilisant quelques idées de G. PRODI [voir la note (2)].

LEMME. — $\mathbf{S}_0^\infty$ *est dense dans* $\mathbf{S}$ (par rapport à la topologie de $\mathfrak{S}$).

En effet, dans le cas contraire il existerait un vecteur $\mathbf{T} = (T_j)$ tel que T_j soient des distributions tempérées, $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \rangle = 0$ (8) pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_0^\infty$ (donc $\mathbf{T} = \operatorname{grad} T_0$) et $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u}^0 \rangle \neq 0$ pour un certain $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{S}$. Comme $\Delta T_0 = \operatorname{div} \mathbf{T}$ est tempérée, T_0 l'est aussi, donc $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u}^0 \rangle = \langle \operatorname{grad} T_0, \mathbf{u}^0 \rangle = \langle T_0, \operatorname{div} \mathbf{u}^0 \rangle = 0$,

C. Q. F. D.

En vertu de ce lemme, $C^1([0, t_0]; \mathbf{S}_0^\infty)$ est dense dans $C^1([0, t_0]; \mathbf{S})$ et par conséquent il suffit de démontrer la relation (3) en supposant que $\mathbf{\Phi}_0(t) \in C^1([0, t_0]; \mathbf{S}_0^\infty)$. Pour cela remarquons d'abord que si $\mathbf{\Phi}(t) \in C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{S}_0^\infty)$ (9) alors, en vertu de (1), on a

$$\begin{aligned}(4)\qquad \int_0^T [-(\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}'(t)) - \nu(\mathbf{u}(t), \Delta \mathbf{\Phi}(t)) - b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}(t))]\, dt \\ = (\mathbf{u}^0, \mathbf{\Phi}(0)) + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{\Phi}(t))\, dt.\end{aligned}$$

Soit $e(t) \in C_0^\infty(R^1)$ telle que $e(t) \geqq 0$, $e(t) = e(-t)$ pour tout t, $e(t) = 0$ pour $|t| \geqq 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\, dt = 1$, et soit $e_\delta(t) = \delta^{-1} e(\delta^{-1} t)$, $\delta > 0$.

LEMME. — *Pour tout* $\mathbf{\Phi} \in \mathbf{S}_0^\infty$, *on a*

$$(5)\qquad \lim_{\delta \to 0} \int_0^T e_\delta(t)\, (\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi})\, dt = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^0, \mathbf{\Phi}).$$

En effet, soit $I_\delta(t) \in C_0^\infty((-\infty, T))$ égale à $\frac{1}{2} - \int_0^t e_\delta(\tau)\, d\tau$ pour $t \geqq -1$ et soit $\mathbf{\Phi}(t) = I_\delta(t) \mathbf{\Phi}$, $\delta < T$. Alors $\mathbf{\Phi}(t) \in C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{S}_0^\infty)$ et par conséquent on déduit de (4)

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T e_\delta(t)\, (\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi})\, dt - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^0, \mathbf{\Phi}) \right| \leqq \frac{1}{2} \int_0^\delta |(\mathbf{f}(t), \mathbf{\Phi})|\, dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^\delta |\nu(\mathbf{u}(t), \Delta \mathbf{\Phi}) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi})|\, dt \to 0,\end{aligned}$$

pour $\delta \to 0$, C. Q. F. D.

---

(8) $\langle\,,\rangle$ désigne la dualité entre $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}' = \overset{n}{\underset{1}{X}} \mathfrak{S}'_n$.

(9) Pour un espace vectoriel topologique X, $C_0^\infty((-\infty, T); X)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans X, définies et indéfiniment dérivables dans $(-\infty, T)$ ayant le support compact. Sa topologie se définit d'une manière évidente. Notons que

$$C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{C}_0^\infty) = \overset{n}{\underset{1}{X}} C_0^\infty((-\infty, T) \times R^n).$$

Reprenons maintenant la démonstration proprement dite de la proposition. Pour $\delta < T - t_0$, nous avons ([10])

$$e_\delta \star \mathbf{\Phi}_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\delta(t-\tau)\overline{\mathbf{\Phi}}_0(\tau)\,d\tau \in C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{S}_0^\infty)$$

et par conséquent, en vertu de (4) nous obtenons

$$(6)\quad \int_0^T e_\delta(t-t_0)(\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}_0(t_0))\,dt - \int_0^T e_\delta(t)(\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}_0(\mathrm{o}))\,dt$$
$$- \int_0^T [(\mathbf{u}(t), e_\delta \star \overline{\mathbf{\Phi}'_0}(t)) + \nu(\mathbf{u}(t), e_\delta \star \overline{\Delta\mathbf{\Phi}_0}(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), e_\delta \star \mathbf{\Phi}_0(t))]\,dt$$
$$= \int_0^T (\mathbf{f}(t), e_\delta \star \overline{\mathbf{\Phi}_0}(t))\,dt + (\mathbf{u}^0, e_\delta \star \overline{\mathbf{\Phi}_0}(\mathrm{o})).$$

Or, on vérifie sans peine que pour $\delta \to \mathrm{o}$

$$(6^{\mathrm{I}})\quad \begin{cases} e_\delta \star \overline{\mathbf{\Phi}'_0}(t) \to \overline{\mathbf{\Phi}'_0}(t), & e_\delta \star \overline{\Delta\mathbf{\Phi}_0}(t) \to \overline{\Delta\mathbf{\Phi}}(t), \\ e_\delta \star \overline{\mathbf{\Phi}_0}(t) \to \overline{\mathbf{\Phi}_0}(t) & \text{dans } L^2((\mathrm{o}, T); \mathbf{L}^2) \end{cases}$$

$$(6^{\mathrm{II}})\quad e_\delta \star \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{\Phi}_0}(t) \to \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{\Phi}_0}(t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{dans } L^\infty((\mathrm{o}, T)\,\mathbf{L}^\infty)$$

et

$$(6^{\mathrm{III}})\quad (\mathbf{u}^0, e_\delta \star \overline{\mathbf{\Phi}_0}(t)) \to \frac{1}{2}(\mathbf{u}^0, \mathbf{\Phi}_0(\mathrm{o})),$$

donc en faisant dans (6) $\delta \to \mathrm{o}$ et en tenant compte des convergences (5), (6^{I})-(6^{III}) on obtient

$$(6^{\mathrm{IV}})\quad \lim_{\delta \to 0} \int_0^T e_\delta(t-t_0)(\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}_0(t))\,dt$$
$$= \int_0^{t_0} [(\mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}'_0(t)) + \nu(\mathbf{u}(t), \Delta\mathbf{\Phi}_0(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{\Phi}_0(t))]\,dt$$
$$+ \int_0^{t_0} (\mathbf{f}(t), \mathbf{\Phi}_0(t))\,dt + (\mathbf{u}^0, \mathbf{\Phi}_0(\mathrm{o})).$$

Mais

$$(6^{\mathrm{V}})\quad \left| \int_0^T e_\delta(t-t_0)\mathbf{u}(t)\,dt - \mathbf{u}(t_0) \right|_2 \leq (2 \sup e(t)) \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)|_2\,dt$$

et comme $\mathbf{u}(t) \in L^2((-\infty, T); \mathbf{L}^2) \subset L^1((\mathrm{o}, T); \mathbf{L}^2)$, il existe (en vertu d'une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue sur la dérivation de

([10]) On fera la convention qu'une barre au-dessus d'une fonction définie dans un intervalle de R^1 signifie que cette fonction a été prolongée sur R^1 par la valeur o.

l'intégrale indéfinie d'une fonction numérique) un ensemble de mesure nulle $N(\mathbf{u}) \subset [0, T[$ tel que pour tout $t_0 \notin N(\mathbf{u})$ on ait

$$(6^{\text{VI}}) \qquad \frac{1}{2\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)|_2\, dt \to 0 \qquad \text{pour} \quad \delta \to 0.$$

La relation (3) s'ensuit maintenant de (6^{IV})-(6^{VI}), ce qui achève la démonstration de la proposition.

2. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$ et soit $E_t \bigstar \mathbf{v}$ (11) la solution usuelle du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}$. On vérifie sans peine (par exemple par l'intermédiaire de la transformation de Fourier) que $E_t \bigstar \mathbf{v} \in C^1([0, t_0]; \mathfrak{S})$ et comme

$$\operatorname{div} E_t \bigstar \mathbf{v} = E_t \bigstar \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

que de plus $E_t \bigstar \mathbf{v} \in C^1([0, t_0]; \mathbf{S})$. En prenant la fonction $\mathbf{\Phi}_0(t)$ (de la proposition préliminaire) égale à $E_{t_0 - t} \bigstar \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$, nous obtenons directement le

Théorème 1. — *Soit $\mathbf{u}$ une solution des équations de Navier-Stokes. Alors il existe un ensemble de mesure nulle $N(\mathbf{u}) \subset [0, T[$ dépendant seulement de $\mathbf{u}$, tel que pour tout $t_0 \notin N(\mathbf{u})$, $t_0 \in [0, T[$ on ait*

$$(7) \qquad (\mathbf{u}(t_0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^0, E_{t_0} \bigstar \mathbf{v}) + \int_0^{t_0} [b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), E_{t_0-t} \bigstar \mathbf{v}) + (\mathbf{f}(t), E_{t_0-t} \bigstar \mathbf{v})]\, dt,$$

quel que soit $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$.

La relation (6) permet d'étudier les solutions des équations de Navier-Stokes. Dans ce but donnons d'abord quelques lemmes.

Lemme. — *Pour tout $p \geq 2$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty$ nous avons* (12)

$$(8) \qquad \| E_t \bigstar \mathbf{v} \|_{\frac{2p}{p-2}} \leq C_0 |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{p}\right)}, \qquad (t \in [0, T_0], \ T_0 < \infty),$$

et

$$(9) \qquad |E_t \bigstar \mathbf{v}|_{\frac{2p}{p-2}} \leq C_1 |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\frac{n}{p}}, \qquad \left(t \in [0, \infty[\right)$$

(11) Où l'on a effectivement un produit de composition entre la solution élémentaire E de $\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta$ et v.

(12) Dans la suite $C_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ désigneront des constantes.

En effet il suffit de démontrer ces inégalités pour une composante $v = v_{j_0}$ de $\mathbf{v} = (v_j)$. Mais dans ce cas nous avons ([13])

$$|E_t \star v|_{\frac{2p}{p-2}} \leqq C_2 \left|\widehat{E_t \star v}\right|_{\frac{2p}{p+2}} = C_2 \left| e^{-\nu t(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2)} \hat{v}(\lambda) \right|_{\frac{2p}{p+2}}$$

$$\leqq C_2 |\hat{v}|_2 \left| e^{-\nu t(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2)} \right|_p \leqq C_3 |v|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\frac{n}{p}},$$

[ce qui prouve (9)] et d'une manière analogue

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} E_t \star v\right|_{\frac{2p}{p-2}} \leqq C_2 \left|\lambda_j e^{-\nu t(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2)} \hat{v}(\lambda)\right|_{\frac{2p}{p+2}} \leqq C_4 |v|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{p}\right)}$$

où $j = 1, 2, \ldots, n$. La relation (8) s'ensuit maintenant de (9) et de la dernière suite d'inégalités.

Lemme. — *Pour* $\mathbf{u}$, $\mathbf{w} \in L^2$ *et* $\mathbf{v} \in C_0^\infty$ *on a*

$$\begin{matrix} |b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, E_t \star \mathbf{v})| \\ |b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v})| \end{matrix} \Bigg\} \leqq C_5 |\mathbf{w}|_2 |\mathbf{u}|_p |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{p}\right)} \tag{10}$$

où $0 < t \leqq T_0$, $T_0 < +\infty$ *et* $2 \leqq p \leqq +\infty$ ([14]).

Comme c'est une conséquence immédiate de la définition (2), de l'inégalité de Hölder et de (8), passons au dernier

Lemme. — *Pour* $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_1^2$ *et* $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$ *on a*

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v})| \leqq C_6 \|\mathbf{u}\|_2 |\mathbf{u}|_p |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\frac{n}{p}} \tag{11}$$

où $0 < t < \infty$ et $2 \leqq p \leqq \infty$.

Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_0^\infty$; alors

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v}) = -b(\mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

d'où (11) s'ensuit, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (9). La validité de (11), pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_1^2$, en résulte par continuité. C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant donner nos deux théorèmes qui constituent le but de cette note. Pour cela soit

$$\mathcal{J}_n((0, T)) = \bigcup_{p>n} \bigcup_{q>\frac{2p}{p-n}} L^q((0, T); \mathbf{L}^p). \tag{12}$$

([13]) Où l'accent désigne la transformée de Fourier.

([14]) Où $|\mathbf{u}|_p = +\infty$ si $\mathbf{u} \notin \mathbf{L}^p$.

Premier théorème d'unicité. — *La solution des équations de Navier-Stokes est unique dans la classe* $\mathfrak{J}_n((0, T)) \cap L^\infty((0, T); \mathbf{L}^2)$.

Démonstration. — Soit $\mathbf{u}_i (i = 1, 2)$ une solution des équations de Navier-Stokes appartenant à cette classe. Soient $t_0 < T_0$ tels que $T_0 < T$ et $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)$ soit presque partout nulle dans $[0, t_0]$. De (7) on déduit que pour tout $t \in [t_0, T[- N(\mathbf{u}_i)$ et $\mathbf{v} \in S_0^\infty$ on ait

$$(\mathbf{u}_i(t), \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t} [b(\mathbf{u}_i(\tau), \mathbf{u}_i(\tau), E_{t-\tau}\star\mathbf{v}) + (\mathbf{f}(\tau), E_{t-\tau}\star\mathbf{v})]\,d\tau + (\mathbf{u}_i(t_0), E_{t-t_0}\star\mathbf{v})$$

et par suite

$$(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t} [b(\mathbf{u}_1(\tau), \mathbf{w}(\tau), E_{t-\tau}\star\mathbf{v}) + b(\mathbf{w}(\tau), \mathbf{u}_2(\tau), E_{t-\tau}\star\mathbf{v})]\,d\tau$$

d'où, en tenant compte de (10) et du fait que presque partout $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{S}^2$ on obtient

$$(13) \qquad |\mathbf{w}(t)|_2 \leq C_5 \sum_{i=1}^{2} \int_{t_0}^{t} |\mathbf{u}_i(\tau)|_{p_i} |\mathbf{w}(\tau)|_2 \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{p_i}\right)}},$$

où p_i sont choisis de la manière que

$$(13') \qquad \mathbf{u}_i \in L^{q_i}((0, T); \mathbf{L}^{p_i}) \qquad \text{avec} \quad q_i > \frac{2p_i}{p_i - n} \qquad (i = 1, 2),$$

et $t \notin N(\mathbf{u}_1) \cap N(\mathbf{u}_2)$. De (13)-(13') on déduit que pour tout $t_1 \in [t_0, T_0]$ on ait (presque partout)

$$|\mathbf{w}(t)|_2 \leq C_5 \left[\sum_{i=1}^{2} C_{6+i} \left(\int_0^T (|\mathbf{u}_i(t)|_{p_i})^{q_i} dt \right)^{\frac{1}{q_i}} (t - t_0)^{\frac{p_i - n}{2p_i} - \frac{1}{q_i}} \right] \operatorname*{vrai\,max}_{t_0 \leq t \leq t_1} |\mathbf{w}(t)|_2$$

où $t \in [t_0, t_1]$, donc

$$\left(\operatorname*{vrai\,max}_{t_0 \leq t \leq t_1} |\mathbf{w}(t)|_2\right) [1 - C_9(t_1 - t_0)^{r_1} - C_{10}(t_1 - t_0)^{r_2}] \leq 0$$

où $r_1, r_2 > 0$. Cette dernière relation entraîne que pour $t \leq t_0 + C_{11}$ (où C_{11} est indépendante de t_0 [15]) on a $|\mathbf{w}(t)|_2 = 0$ presque partout. De cette manière, en prenant $t_0 = 0$, on obtient $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ presque partout pour $t \leq C_{11}$ et par conséquent aussi pour $t \leq 2C_{11}$, puis pour $t \leq 3C_{11}$ etc., ce qui achève la démonstration du théorème.

([15]) Mais qui dépend de T_0 fixe mais arbitraire dans $[0, T[$.

DEUXIÈME THÉORÈME D'UNICITÉ. — *La solution forte des équations de Navier-Stokes est unique dans la classe* $\mathfrak{I}_n((0,\ T))$.

Ce fait est un corollaire immédiat du théorème antérieur et du suivant :

THÉORÈME 2. — *Toute solution forte* $\mathbf{u}$ *des équations de Navier-Stokes telle que* $\mathbf{u} \in \mathfrak{I}_n((0,\ T))$ *appartient à* $L^\infty((0,\ T_0);\ \mathbf{L}^2)$ *quel que soit* $T_0 \in [0,\ T[$.

DÉMONSTRATION. — Soit $p_0 > n$ et $q_0 > \dfrac{2p_0}{p_0 - n}$ tels que $u \in L^{q_0}((0,\ T),\ \mathbf{L}^{p_0})$. De (7) et (11) on déduit

$$|\mathbf{u}(t)|_2 \leqq C_6 \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_2 \,|\mathbf{u}(\tau)|_p \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}\frac{n}{p_0}}} + \left(\int_0^{T_0} (|\mathbf{f}(t)|_2)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{1}{2}} + |\mathbf{u}^0|_2$$

quelle que soit $0 \leqq t \leqq T_0$, $t \notin N(\mathbf{u})$, d'où

$$|\mathbf{u}(t)|_2 \leqq C_{12} \left(\int_0^T (\|\mathbf{u}(t)\|_2)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T (|u(t)|_{p_0})^{q_0}\, dt\right)^{\frac{1}{q_0}} T_0^{\frac{p_0-n}{2p_0} - \frac{1}{q_0}} + C_{13}\, T_0^{\frac{1}{2}} + C_{14},$$

donc $|\mathbf{u}(t)|_2 \leqq C(T_0)$ presque partout dans $[0,\ T_0]$, C. Q. F. D.

(Manuscrit reçu le 30 mai 1960.)