BERNARD CHARLES

Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 217-227

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__217_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 217 à 227.

ÉTUDE SUR LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE ABÉLIEN

PAR

BERNARD CHARLES
(Montpellier).

Introduction. — Ce travail est consacré à l'étude des sous-groupes purs d'un groupe abélien G qui contiennent un sous-groupe donné H. Nous recherchons s'il existe des sous-groupes purs minimaux contenant H.

Dans la partie **A** nous montrons que le cas général se ramène à celui des groupes abéliens primaires.

Dans la partie **B** nous nous occupons du cas où G est primaire et nous démontrons le résultat suivant qui donne la solution d'un problème posé par L. FUCHS dans [2] : Si G est primaire et si H est un sous-groupe de G sans élément de hauteur infinie il existe un sous-groupe pur de G contenant H et sans élément de hauteur infinie.

Dans la partie **C** nous nous occupons du cas où G est primaire et sans élément de hauteur infinie. Nous commençons par étudier de façon systématique les sous-groupes purs minimaux de G contenant un élément donné u de G. Cette étude est basée sur la notion d'indicatrice d'un élément de G. La structure des sous-groupes purs minimaux contenant u est déterminée par la connaissance de l'indicatrice de u. Nous démontrons l'existence de sous-groupes purs minimaux contenant H dans les deux cas particuliers suivants :

1. H est contenu dans le socle de G.

2. H possède un sous-groupe qui est pur dans G et dense dans H pour la topologie définie par les $p^n G$.

Nous adoptons de façon générale la terminologie et les notations de [2]. En particulier $\{U, V, \ldots\}$ désigne le sous-groupe de G engendré par $U, V, \ldots \subset G$. Un sous-groupe $H \subset G$ est dit pur si $nH = H \cap nG$ pour tout entier n. Nous notons toujours les sommes directes de sous-groupes de G

avec le symbole $\oplus$. Des sous-groupes de G sont dits indépendants si l'on peut former leur somme directe dans G.

Soit maintenant G primaire associé à l'entier premier p c'est-à-dire tel que tout $u \in G$ ait pour ordre une puissance de p. On appelle hauteur de $u \in G$ la borne supérieure (finie ou infinie) de l'ensemble des entiers n tels que l'équation $p^n x = u$ soit résoluble en x dans G. La hauteur de u sera toujours notée $h(u)$. Quand nous disons que G est sans élément de hauteur infinie il est sous-entendu qu'il s'agit des éléments $\neq 0$. Le socle $S(G)$ de G est l'ensemble $G[p]$ des éléments de G annulés par p. Nous désignons toujours par P le socle $S(G)$ de G et nous considérons indifféremment P comme groupe abélien ou comme espace vectoriel sur $Z/(p)$ (Z désigne l'anneau des entiers). P_i désigne toujours le sous-espace de P formé des $u \in G$ tels que $h(u) \geqq i$. Nous désignons par $G_n = G[p^n]$ l'ensemble des éléments de G qui sont annulés par p^n.

Un groupe primaire G est dit réduit s'il ne contient pas de sous-groupe du type p^∞ c'est-à-dire isomorphe à Q_p/Z où Q_p est l'ensemble des fractions dont le dénominateur est une puissance de p.

A. — Étude du cas général.

Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G. La méthode suivante de T. Szele permet de construire un sous-groupe pur de G contenant H. Pour chaque équation $nx = u$ (n entier, $u \in H$) résoluble en x dans G on choisit une solution et l'on forme le sous-groupe H_1 engendré par ces solutions. On construit ensuite H_2 à partir de H_1 de façon analogue, etc. La réunion des H_i est un sous-groupe pur, contenant H, et qui a même puissance que H si H est infini.

Si G est un groupe sans torsion, le sous-groupe H_1 construit précédemment est pur et a le même rang que H. On voit facilement que H_1 est le plus petit sous-groupe pur contenant H.

Rappelons le résultat suivant qui est élémentaire : Soient G', G'' deux sous-groupes de G tels que $G'' \subset G'$. Si G'' est pur, et si G'/G'' est pur dans G/G'', alors G' est pur dans G.

Application. — Soient T le sous-groupe de torsion de G, H un sous-groupe de G, et T' le sous-groupe de torsion de H. Supposons qu'on ait trouvé G'', contenant T', et pur dans T. Comme T est pur dans G, G'' est pur dans G. Posons $H' = \{H, G''\}$, et soit $\overline{G} = G/G''$, $\overline{H'} = H'/G''$. On sait, par la méthode de T. Szele, construire $\overline{G'}$ de même rang que $\overline{H'}$ et pur dans $\overline{G}$. Si G' est l'image réciproque de $\overline{G'}$ dans G, on voit que G' est pur dans G.

La recherche de sous-groupes purs, contenant un sous-groupe donné, se ramène donc essentiellement au cas où G est un groupe de torsion. Il en est de même de la recherche des sous-groupes purs minimaux. Si l'on a trouvé G'' pur minimal contenant T', le sous-groupe G' considéré plus haut est un sous-groupe pur minimal contenant H, et c'est le plus petit sous-groupe pur contenant H et G''.

Le cas général se ramène donc au cas où G est un groupe de torsion, et ce cas se ramène de façon immédiate à celui des groupes primaires.

Terminons par le théorème suivant qui généralise le fait que la propriété d'être pur est inductive :

THÉORÈME 1. — *Soient Ω un ensemble ordonné filtrant à droite, $H_i\,(i\in\Omega)$, $G_i\,(i\in\Omega)$ deux familles croissantes de sous-groupes de G telles que H_i soit pur dans G_i, et $\bigcup_{i\in\Omega} G_i = G$. Alors $H=\bigcup_{i\in\Omega} H_i$ est pur dans G.*

Soient $h\in H$, et $nx=h$ une équation résoluble en x dans G. Soient $g\in G$ tel que $ng=h$, et $i, j\in\Omega$ tels que $h\in H_i$, $g\in G_j$, enfin $k\in\Omega$ tel que $k\geqq i$, $k\geqq j$. Comme $H_k\supset H_i$, $G_k\supset G_j$, et H_k pur dans G_k, l'égalité $ng=h$ entraîne qu'on peut résoudre $nx=h$ dans H_k, ce qui démontre le théorème.

B. — Étude du cas où G est primaire.

Soient G primaire associé à l'entier premier p et H un sous-groupe de G. Nous nous proposons de rechercher s'il existe des sous-groupes purs minimaux contenant H. Si H contient des éléments de hauteur infinie, il n'existera pas en général de sous-groupes purs minimaux contenant H, comme le montre l'exemple $H=\{u\}$ avec u de hauteur infinie, dans le cas où G est réduit.

Nous nous occuperons donc exclusivement du cas où H ne possède pas d'élément de hauteur infinie. Le théorème suivant, qui résout un problème posé par L. FUCHS dans [2] (problème 4) montre qu'on peut se ramener au cas où G n'a pas d'élément de hauteur infinie.

THÉORÈME 2. — *Soient G un groupe abélien primaire et H un sous-groupe de G sans élément de hauteur infinie. Il existe un sous-groupe pur de G contenant H et sans élément de hauteur infinie.*

Plusieurs lemmes sont nécessaires à la démonstration de ce théorème.

LEMME 1. — *Si H et K sont deux sous-groupes de G tels que $u\in H$, $u\notin K$ entraîne $pu\in K$ et pu de hauteur nulle dans K, alors $S(\{H, K\})=S(K)$.*

Supposons qu'on ait $p(u+v)=0$ avec $u\in H$, $u\notin K$, $v\in K$. Cela signifie que $pu=-pv$ est de hauteur $\geqq 1$ dans K, en contradiction avec l'hypothèse du lemme.

Lemme 2. — *Soient G un groupe primaire dont tous les éléments sont d'ordre p^n au plus, H un sous-groupe de G somme directe de groupes cycliques d'ordre p^n et K un sous-groupe de G tel que $H \cap K = 0$. Il existe une décomposition $G = H \oplus H'$ avec $H' \supset K$.*

Soit en effet H' un sous-groupe maximal parmi ceux qui vérifient $H' \supset K$, $H' \cap H = 0$. Nous allons montrer que $G = H \oplus H'$. Supposons qu'il existe $u \in G$ tel que $u \notin H \oplus H'$ et $pu \in H \oplus H'$. On a $pu = h + h'$ avec $h \in H$, $h' \in H'$ et comme pu est d'ordre p^{n-1} au plus, il en est de même de h et h' donc on a $h = ph_1$ avec $h_1 \in H$. Quitte à remplacer u par $u - h_1$ on peut donc supposer que $u \notin H \oplus H'$, $pu \in H'$. Si l'on pose $H'' = \{H', u\}$ on a $H'' \supset K$ et $H \cap H'' = 0$, en contradiction avec la maximalité de H'. Le lemme est démontré.

Lemme 3. — *Tout sous-groupe de G qui est terme direct d'une décomposition de G est pur dans G.*

Cette propriété est classique.

Démonstration du théorème. — Soient $P = S(G)$ le socle de G et P_ω l'ensemble des éléments de P qui sont de hauteur infinie. Pour chaque entier $i \geqq 0$ on peut trouver un sous-espace Q'_i de P_i tel que

$$P_i \cap S(H) = Q'_i \oplus [P_{i+1} \cap S(H)].$$

On peut trouver des sous-espaces Q_i tels que

$$P_i = Q_i \oplus P_{i+1}, \qquad Q_i \supset Q'_i.$$

Nous posons

$$P'_i = \{S(H), Q_0, \ldots, Q_{i-1}\}, \qquad P' = \bigcup_i P'_i.$$

Nous aurons encore à utiliser une suite de sous-espaces P''_n vérifiant les conditions

$$P'_i \oplus P''_i = P, \qquad P''_i \subset P_i.$$

Il est facile de vérifier que $P' \cap P_\omega = 0$. Pour démontrer le théorème il suffit donc de construire un sous-groupe pur H' de socle P' et contenant H. Posons $G_n = G[p^n]$ et $H_n = H[p^n]$. Nous allons construire une suite de sous-groupes H'_n vérifiant les conditions

(1) $H'_i \supset \{H'_{i-1}, H_i\}, \qquad S(H'_i) = P'_i$;
(2) H'_i est un sous-groupe pur dans G_i.

Partons de $H'_0 = S(H)$, et supposons construits $H'_0, \ldots, H'_{n-1}$ vérifiant les propriétés (1) et (2). Nous allons montrer qu'on peut construire H'_n de façon à satisfaire (1) et (2) pour $i=n$. Tous les éléments de P''_n sont de hauteur $\geqq n$ dans G, donc de hauteur $n-1$ dans G_n. On peut donc former un sous-groupe $G''_n \subset G_n$ de socle P''_n et qui est somme directe de groupes cycliques d'ordre p^n.

Considérons le sous-groupe $G'_n = \{H'_{n-1}, H_n\}$. On a $pH_n \subset H_{n-1} \subset H'_{n-1}$. Si $u \in H_n$, $u \notin H'_{n-1}$, $pu \in H'_{n-1}$ c'est que u est d'ordre p^n ce qui entraîne que pu est d'ordre p^{n-1} donc de hauteur nulle dans H'_{n-1}. D'après le lemme 1, G'_n a pour socle P'_{n-1} donc $G''_n \cap G'_n = 0$. On peut utiliser le lemme 2, ce qui donne H'_n tel que

$$G_n = G''_n \oplus H'_n, \qquad H'_n \supset \{H'_{n-1}, H_n\}.$$

Le sous-groupe H'_n est pur dans G_n en vertu du lemme 3.

Nous avons donc démontré qu'on peut construire une suite de sous-groupes H'_n vérifiant les conditions (1) et (2).

Le sous-groupe $H' = \bigcup_n H'_n$ est pur en vertu du théorème 2. On a $H' \supset H$ puisque $H'_n \supset H_n$. Enfin le socle de H' est $P' = \bigcup_n P'_n$, ce qui achève la démonstration.

C. — Étude du cas où G n'a pas d'élément de hauteur infinie.

Dans tout ce paragraphe on suppose que G n'a pas d'élément de hauteur infinie. Il est commode de munir G de la topologie $\mathfrak{T}$ définie par le système fondamental de voisinages de o formé par les $p^n G$. Cette topologie est séparée puisque $\bigcap_n p^n G = 0$. Un sous-groupe H discret de G est un sous-groupe tel qu'il existe un entier N avec $H \cap p^N G = 0$. Il revient au même de dire que les éléments $\neq 0$ de H ont une hauteur $< N$. On sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour que G soit une somme directe de groupes cycliques est que G soit la réunion d'une suite croissante de sous-groupes discrets (Kulikov).

Nous nous proposons de rechercher les sous-groupes purs minimaux de G qui contiennent un sous-groupe donné H.

Indicatrice d'un élément de G. — Soit $u \in G$ d'ordre p^n; nous notons sa hauteur $h(u)$ et son exposant $n = e(u)$. L'indicatrice de u est la fonction φ définie sur l'ensemble des entiers $r > 0$ par

$$\varphi(r) = \begin{cases} e(p^{n-r}u) + h(p^{n-r}u) = r + h(p^{n-r}u) & \text{si } r \leqq n, \\ 0 \quad \text{si } r > n. \end{cases}$$

La propriété $h(p^{s+1}u) \geqq 1 + h(p^s u)$ entraîne que φ est une fonction décroissante. Les points de discontinuité de φ sont par définition les r tels que $\varphi(r) > \varphi(r+1)$.

Il est commode d'introduire dans l'ensemble des indicatrices l'ordre lexicographique : On dit que $\varphi \succ \psi$ si $\varphi = \psi$ ou bien s'il existe un entier s tel que $\varphi(r) = \psi(r)$ pour $r < s$ et $\varphi(s) > \psi(s)$.

Soit φ une indicatrice telle que $\varphi(r) = 0$ pour $r > n$. Il n'existe qu'un nombre fini d'indicatrices ψ distinctes vérifiant les conditions $\psi \prec \varphi$ et $\psi(r) = 0$ pour $r > n$.

Étude du cas où H est cyclique.

THÉORÈME 3. — *Soient $u \in G$ d'indicatrice φ et $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les points de discontinuité de φ. Il existe des sous-groupes purs minimaux de G contenant $H = \{u\}$. Tout sous-groupe pur minimal H' contenant H est de la forme $H' = \bigoplus_{i=1}^{k} \{u_i\}$ où $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ont respectivement pour exposants $\varphi(r_1), \varphi(r_2) - r_1, \ldots, \varphi(r_k) - r_{k-1}$.*

Soit n l'exposant de u et $m = \varphi(1) = 1 + h(p^{n-1}u) \geqq n$. Nous ferons la démonstration en distinguant deux cas.

Cas 1. — φ possède la seule discontinuité $r_1 = n$. Pour avoir un sous-groupe pur minimal contenant u il suffit de choisir un élément $u_1 \in G$ tel que $p^{m-n}u_1 = u$. Le sous-groupe $H' = \{u_1\}$ est pur et évidemment minimal. Soit maintenant H'' minimal pur contenant u. Comme u a même hauteur dans H'' que dans G on peut trouver $u'_1 \in H''$ tel que $p^{m-n}u'_1 = u$. Comme H'' est minimal on aura $H'' = \{u'_1\}$.

Notons que l'exposant de u_1 ou u'_1 a la valeur $m = \varphi(r_1)$ indiquée dans le théorème.

Cas 2. — φ possède au moins deux points de discontinuité $r_1 < \ldots < r_k$. Nous allons d'abord construire un sous-groupe pur $H' \supset H$ ayant la structure indiquée dans le théorème.

Pour le sous-groupe $\{p^{n-r_1}u\}$ on se trouve dans le cas 1 donc it existe u_1 tel que $p^{m-r_1}u_1 = p^{n-r_1}u$. Il est facile de vérifier qu'on a pour $\{u, u_1\}$ la décomposition

$$\{u, u_1\} = \{u_1\} \oplus \{v\}, \qquad \text{avec} \quad v = u - p^{m-n}u_1.$$

LEMME 4. — *L'indicatrice de v est donnée par la formule*

$$\psi(r) = \varphi(r + r_1) - r_1.$$

Montrons d'abord que l'exposant de v est $n - r_1$. On a $p^{n-r_1}v = 0$ donc il suffit de montrer que $p^{n-r_1-1}v \neq 0$. Si l'on avait $p^{n-r_1-1}v = 0$ on en déduirait $h(p^{n-r_1-1}u) = m - r_1 - 1$ d'où l'égalité suivante en contradiction avec la définition de r_1 :

$$\varphi(r_1+1) = (r_1+1) + (m - r_1 - 1) = m = \varphi(1) = \varphi(r_1).$$

On a donc $e(v) = n - r_1$ et il reste à vérifier que pour $r \leqq n - r_1$, on a

$$h(p^{n-r_1-r}v) = h(p^{n-r-r_1}u).$$

Comme $p^{n-r_1-r}v = p^{n-r-r_1}u + p^{m-r-r_1}u_1$ il suffit de montrer qu'on a l'inégalité

$$h(p^{n-r_1-r}u) < h(p^{m-r_1-r}u_1) = m - r - r_1.$$

Or cette inégalité résulte de

$$h(p^{n-r_1-r}u) = \varphi(r+r_1) - (r+r_1) < \varphi(1) - (r+r_1) = m - r - r_1.$$

La construction de H' peut maintenant s'achever par récurrence. On a $\psi < \varphi$ et d'autre part les discontinuités de ψ sont $r_2 - r_1, \ldots, r_k - r_1$, donc

$$\psi(r_2 - r_1) = \varphi(r_2) - r_1, \qquad \psi(r_3 - r_1) - (r_2 - r_1) = \varphi(r_3) - r_2, \ldots.$$

En poursuivant jusqu'au bout on obtiendra un sous-groupe $H' = \bigoplus_{i=1}^{k} \{u_i\}$. Il faut démontrer que ce sous-groupe est pur et minimal. La pureté de H' résulte de ce que les hauteurs des socles de $\{u_1\}, \ldots, \{u_k\}$ forment une suite strictement décroissante. Soit H'' un sous-groupe pur minimal de H' contenant $H = \{u\}$. Comme u a même indicatrice dans H'' que dans G on peut construire dans H'' un sous-groupe pur contenant H et de la forme indiquée dans le théorème. Il en résulte que H'' a un ordre au moins égal à l'ordre de H' donc $H'' = H'$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 4. — *Entre deux sous-groupes purs minimaux H', H'' contenant $H = \{u\}$ il existe un isomorphisme θ qui prolonge l'identité dans H.*

Supposons H' et H'' construits suivant la méthode de la démonstration du théorème 3 :

$$\begin{aligned} H' &= \{u_1\} \oplus \ldots \oplus \{u_k\} = \{u_1\} \oplus \{v\}, & v &= u - p^{m-n}u_1, \\ H'' &= \{u'_1\} \oplus \ldots \oplus \{u'_k\} = \{u'_1\} \oplus \{v'\}, & v' &= u - p^{m-n}u'_1. \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'on a pour u la décomposition

$$u = p^{n_1}u_1 + \ldots + p^{n_k}u_k, \qquad n_i = \varphi(r_i) - r_k.$$

Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{gathered} n_1 = m - n = \varphi(r_1) - r_k, \\ n_2 = \psi(r_2 - r_1) - (r_k - r_1) = \varphi(r_2) - r_k \ldots. \end{gathered}$$

Comme n_1, n_2, ..., s'expriment à partir de φ on aura aussi

$$u = p^{n_1} u'_1 + \ldots + p^{n_k} u'_k,$$

donc en posant $\theta(u_i) = u'_i$ on détermine un isomorphisme de H' sur H'' tel que $\theta(u) = u$.

REMARQUE. — On a $n_1 > n_2 > \ldots > n_k$, donc tous les n_i sont > 0 sauf peut-être n_k.

THÉORÈME 5. — *Si H' et H'' sont deux sous-groupes purs minimaux contenant $H = \{u\}$, on a pour tout $i \geqq 0$ la propriété*

$$S(H') \cap P_i = S(H'') \cap P_i \qquad (\operatorname{mod} P_{i+1}).$$

Les notations étant celles du théorème précédent, on a

$$S(H') = \bigoplus_{i=1}^{k} S(\{u_i\}), \qquad S(H'') = \bigoplus_{i=1}^{k} S(\{u'_i\}).$$

Nous désignerons par m_i l'exposant commun de u_i et de u'_i et nous poserons $w_j = p^{m_j-1} u_j$, $w'_j = p^{m_j-1} u'_j$. Étant donné $i \geqq 0$, il existe au plus un entier j tel que $w_j \in P_i$, $w_j \notin P_{i+1}$. Pour démontrer le théorème il suffit donc de démontrer que, lorsqu'un tel entier j existe, on a $w_j - w'_j \in P_{i+1}$. Comme $h(w_j) = i$, cela revient à démontrer que

$$h(w_j - w'_j) > h(w_j).$$

D'après la démonstration du théorème précédent nous avons

$$u = \sum_{i=1}^{k} p^{n_i} u_i, \qquad u = \sum_{i=1}^{k} p^{n_i} u'_i.$$

En multipliant ces deux égalités par p^{m_j-1} et en faisant la différence, on obtient

$$w_j - w'_j = \sum_{i=1}^{j-1} p^{n_i+m_j-1} (u_i - u'_i).$$

Tous les n_i sauf peut-être n_k étant > 0, il en résulte

$$h(w_j - w'_j) \geqq n_{j-1} + m_j - 1 > m_j - 1 = h(w_j).$$

Étude au cas où H est quelconque. — Lorsque H est fini il est clair qu'il existe des sous-groupes purs minimaux contenant H. Entre deux sous-groupes purs minimaux contenant H il existe un isomorphisme prolongeant l'identité dans H (on peut le voir par les méthodes utilisées dans la théorie d'Ulm). Nous pensons que ce résultat s'étend au moins au cas où H est réunion d'une suite croissante de sous-groupes discrets de G, mais nous ne savons pas le démontrer.

THÉORÈME 6. — *Il existe des sous-groupes purs minimaux de G contenant un sous-groupe donné H dans les cas suivants :*

1. *H est contenu dans le socle G.*

2. *H contient un sous-groupe K qui est pur dans G et dense dans H pour la topologie $\mathcal{T}$.*

DÉMONSTRATION DANS LE CAS 2. — Soit Q_i une suite de sous-groupes de $S(K)$ tels que

$$S(K)\cap P_i = Q_i \oplus (S(K)\cap P_{i+1}).$$

On peut construire dans K un sous-groupe pur K_i de socle Q_i (K_i s'obtient comme sous-groupe maximal parmi l'ensemble des sous-groupes purs de K qui ont leur socle contenu dans Q_i). Le sous-groupe $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i$ est pur comme il est facile de le vérifier.

Posons $A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$, $B_n = \bigoplus_{i=n+1}^{\infty} K_i$ et désignons de façon générale par $\overline{U}$ la fermeture pour la topologie $\mathcal{T}$ d'un sous-ensemble U de G. Il est facile de vérifier que $\overline{A} = A_n \oplus \overline{B}_n$ et que $\overline{A}$, A_n, $\overline{B}_n$ sont purs dans G. Soit $H_n = H \cap G_n$ et supposons construits $H'_1, \ldots, H'_{n-1}$ vérifiant :

(1) $H'_i \supset \{H'_{i-1}, H_i\}$, $\qquad S(H'_i) = S(H)$, $\qquad H'_i \subset \overline{A}\cap G_i$,

(2) H'_i est pur dans G_i.

Nous allons en nous inspirant des méthodes de démonstration du théorème 2 construire, H'_n vérifiant (1) et (2). Le sous-groupe $H''_n = \{H_n, H'_{n-1}\}$ a pour socle $S(H)$ d'après le lemme 1. Si l'on pose $B'_n = \overline{B}_n \cap H''_n$ on a $H''_n = A_n \oplus B'_n$. On peut trouver un sous-espace R_n de $S(\overline{B}_n)$ tel que

$$S(\overline{B}_n) = S(B'_n)\oplus R_n.$$

On peut construire $C_n \subset \overline{B}_n \cap G_n$ de socle R_n et pur dans $\overline{B}_n \cap G_n$ donc somme directe de groupes cycliques d'ordre p^n. D'après le lemme 2, il existe $B''_n \supset B'_n$ tel que $\overline{B}_n = B''_n \oplus C_n$. En posant $H'_n = A_n \oplus B''_n$ les conditions (1) et (2) sont vérifiées pour $i = n$. Le sous-groupe $H' = \bigcup_n H'_n$ est pur dans G, contient H et a pour socle $S(H)$. Cette dernière propriété entraîne que H' est minimal car si H'' est pur et vérifie $H'' \subset H'$, $S(H'') = S(H')$, on a $H'' = H'$.

Démonstration dans le cas 1. — On peut trouver une suite de sous-espaces $Q_i \subset P = S(G)$ tels que

$$H \cap P_i = Q_i \oplus (H \cap P_{i+1})$$

On peut construire K_i pur dans G et de socle Q_i. Le sous-groupe $H^* = \{H, K_1, K_2, \ldots\}$ a pour socle H et vérifie les hypothèses du cas 2. On peut donc construire H' pur et de socle H. Un tel sous-groupe H' est un sous-groupe pur minimal contenant H.

Le problème de savoir si deux sous-groupes purs de G ayant le même socle sont isomorphes nous semble important, mais nous ne savons pas le résoudre. Une réponse positive à cette question aurait des conséquences intéressantes pour la structure des groupes abéliens sans élément de hauteur infinie. Pour une discussion plus détaillée sur cet aspect de la question, *voir* [1].

Nous terminons cette étude par le théorème suivant que nous considérons plutôt comme une curiosité :

Théorème 7. — *Soient K un sous-groupe de G, $\{u\}$ un sous-groupe de K tel que $S(\{v\}) = S(\{u\}$ entraîne $\varphi_v \prec \varphi_u$, K'' un sous-groupe de K tel que $K'' \cap \{u\} = 0$, K' un sous-groupe pur minimal de G contenant $\{u\}$. Alors $K'' \cap K' = 0$.*

L'indépendance de K'' et K' résulte de la relation $K' \cap K \subset \{u\}$. Supposons en effet cette condition réalisée et soit $w \in K' \cap K''$. Comme $K'' \subset K$ on a $w \in \{u\}$ donc $w = 0$ en vertu de l'indépendance de K'' et $\{u\}$.

Nous pouvons supposer K' construit suivant la méthode du théorème 4. On a $K' = \bigoplus_{i=1}^{k} \{u_i\}$ et l'indicatrice de u est $\varphi_u = \varphi$. Pour simplifier l'écriture il sera commode de poser $u_0 = 0$ et $r_0 = 0$. Rappelons que

$$u = \sum_{i=1}^{k} p^{n_i} u_i, \qquad n_i = \varphi(r_i) - r_k, \qquad e(u_i) = \varphi(r_i) - r_{i-1}.$$

On en déduit facilement les propriétés suivantes :

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_j\} \cap \{u\} = \{p^{r_k - r_j} u\},$$
$$S(\{u_0, u_1, \ldots, u_{j+1}\}) = S(\{u_0, u_1, \ldots, u_j, u\}) \qquad (j \geqq 1).$$

Nous allons démontrer que $K \cap \{u_0, u_1, \ldots, u_j\} \subset \{u\}$ entraîne $K \cap \{u_0, u_1, \ldots, u_{j+1}\} \subset \{u\}$, ce qui démontrera le théorème puisque $K \cap \{u_0\} = 0$.

Supposons qu'il existe $w \in K \cap \{u_0, \ldots, u_{j+1}\}$ tel que $w \notin \{u\}$. Quitte à multiplier w par un entier convenable on peut supposer que $pw \in \{u\}$ et plus précisément que pw est de la forme

$$pw = p^\alpha u = p^\alpha \sum_{i=1}^{k} p^{n_i} u_i.$$

La composante $p^{\alpha+n_i} u_i$ de pw suivant u_i doit être nulle pour $i > j+1$, c'est-à-dire $\alpha + n_i \geqq e(u_i)$ pour $i > j+1$, ce qui donne $\alpha \geqq r_k - r_{j+1}$. Nous poserons $\alpha = \beta + r_k - r_{j+1}$:

$$pw = p^{\beta + r_k - r_{j+1}} u = p^\beta \sum_{i=1}^{j+1} p^{\varphi(r_i) - r_{j+1}} u_i.$$

Si $\beta > 0$ on a $p(w - \lambda u) = 0$ avec $\lambda = p^{\beta - 1 - r_k - r_{j+1}}$ donc

$$w - \lambda u \in S(\{u_0, u_1, \ldots, u_{j+1}\}) = S(\{u_0, u_1, \ldots, u_j, u\}).$$

On en conclut qu'il existe λ' tel que

$$w - \lambda u - \lambda' u \in \{u_0, u_1, \ldots, u_j\}.$$

Comme $w - \lambda u - \lambda' u \in K$ il en résulte $w \in \{u\}$ contrairement à l'hypothèse de départ. On a donc $\beta = 0$ et l'exposant de pw est

$$e(pw) = \sup_{i \leqq j+1} [\varphi(r_i) - r_{i-1} - (\varphi(r_i) - r_{j+1})] = r_{j+1}.$$

L'exposant de w est donc $1 + r_{j+1}$. Quitte à retrancher à w un élément du socle de $\{u_0, u_1, \ldots, u_{j+1}\}$, on peut supposer que

$$w = \sum_{i=1}^{j+1} p^{\varphi(r_i) - r_{j+1} - 1} u_i.$$

On voit alors que $h(w) = \varphi(r_{j+1}) - r_{j+1} - 1$, ce qui permet de calculer l'indicatrice de w :

$$\varphi_w(1 + r_{j+1}) = e(w) + h(w) = \varphi_u(r_{j+1}) > \varphi_u(1 + r_{j+1}),$$
$$\varphi_w(r) = \varphi_u(r) \qquad \text{si} \quad r \leqq r_{j+1}.$$

Le socle de $\{w\}$ coïncide avec le socle de $\{u\}$ comme on le voit en formant $p^{r_{j+1}} w = p^{\varphi(r_1) - 1} u_1$. On voit que φ_w est strictement $\succ \varphi_u$ en contradiction avec une hypothèse du théorème, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CHARLES (Bernard). — Étude des groupes abéliens primaires de type $\leqq \omega$, *Ann. Univ. Saraviensis*, Scientia, t. 4, 1955, p. 184-199.

[2] FUCHS (László). — *Abelian groups*. — Budapest, 1958.

(Manuscrit reçu le 3 février 1960.)

Bernard CHARLES,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences,
Montpellier (Hérault).