

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Sur les C^* -algèbres

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 95-112

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__95_0

© Bulletin de la S. M. F., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES C^* -ALGÈBRES

par

JACQUES DIXMIER

(Paris).

Introduction.

Soit A une C^* -algèbre (c'est-à-dire une algèbre de Banach involutive dans laquelle la norme vérifie l'axiome $\|x^*x\| = \|x\|^2$). Nous noterons A^i l'ensemble des idéaux primitifs de A , muni de la topologie de Jacobson : rappelons que, dans cette topologie, l'adhérence d'un ensemble d'idéaux primitifs (P_i) est l'ensemble des idéaux primitifs contenant $\cap P_i$.

Par définition, une CCR -algèbre est une C^* -algèbre A satisfaisant à la condition suivante : pour toute représentation irréductible π de A dans un espace hilbertien, les opérateurs $\pi(x)$ ($x \in A$) sont compacts. Pour une CCR -algèbre A , KAPLANSKY a établi les propriétés suivantes :

1. A^i est un espace de Baire ([1]; autrement dit, toute réunion dénombrable d'ensembles fermés sans points intérieurs est sans point intérieur). Ceci résulte de [7], théorème 5.1, du fait qu'une partie ouverte de A^i s'identifie à I , où I est un idéal bilatère fermé de A ([7], lemme 4.1), et du fait que I est une CCR -algèbre (*cf.*, par exemple, [7], théorème 7.4).

2. Si A n'est pas primitive, il existe dans A^i au moins deux parties ouvertes non vides disjointes. (Ceci résulte par exemple de [7], lemme 7.4, et du fait que, si deux idéaux bilatères I et J de A ont un produit nul, tout idéal primitif de A contient, soit I , soit J .)

3. Il existe dans A^i une partie ouverte localement compacte partout dense. (Ceci résulte de [7], théorème 6.2, en considérant dans A^i une partie ouverte séparée maximale.)

Bien entendu, les propriétés 1 et 2 sont des conséquences de 3. (En fait, dans [7], on doit établir la propriété 1 d'abord.)

Dans la première partie de cet article, nous montrerons que, pour toute C^* -algèbre A , la propriété 1 est vraie; de même pour la propriété 2, du moins si A est séparable (le problème reste ouvert dans le cas général).

Dans la deuxième partie, nous construirons un exemple de C^* -algèbre A mettant la propriété 3 en défaut : plus précisément, dans A' , toute partie ouverte non vide est non séparable.

Une GCR -algèbre est une C^* -algèbre admettant une suite de composition (éventuellement transfinie) à quotients CCR (cf. [7]). (Alors que les groupes de Lie semi-simples ou nilpotents ont pour C^* -algèbres des CCR -algèbres, beaucoup de groupes de Lie résolubles ont pour C^* -algèbres des GCR -algèbres.) On sait [3] que deux représentations irréductibles de même noyau d'une GCR -algèbre sont équivalentes. Dans la troisième partie de cet article, nous démontrerons la réciproque, du moins pour les C^* -algèbres séparables.

Notations et rappels.

Par « homomorphisme » de C^* -algèbres, on entend toujours \star -homomorphisme; par « représentation » d'une C^* -algèbre dans un espace hilbertien, on entend toujours \star -représentation. Si A est une C^* -algèbre et I un idéal bilatère fermé de A , I est auto-adjoint, et A/I est une C^* -algèbre; si φ est un homomorphisme de noyau I de A dans un C^* -algèbre B , $\varphi(A)$ est une sous- C^* -algèbre de B , et l'isomorphisme de A/I sur $\varphi(A)$ déduit de φ par passage au quotient est isométrique. Si π est une représentation de A dans un espace hilbertien, l'irréductibilité topologique de π équivaut à son irréductibilité algébrique. Toute représentation algébriquement irréductible de A dans un espace vectoriel complexe est algébriquement équivalente à une représentation de A dans un espace hilbertien. Si deux représentations irréductibles de A dans des espaces hilbertiens sont algébriquement équivalentes, elles sont unitairement équivalentes. Pour tout espace hilbertien H , nous noterons $\mathcal{L}(H)$ la C^* -algèbre des opérateurs linéaires continus dans H .

1.

LEMME 1. — Soient H un espace hilbertien, A une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(H)$, telle que la représentation identique de A dans H soit topologiquement irréductible. Soient ξ et η des vecteurs de H tels que $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| < \varepsilon$, et tels qu'il existe un opérateur hermitien de $\mathcal{L}(H)$ transformant ξ en η [autrement dit, tels que $(\xi | \eta)$ soit réel]. Alors, il existe un élément hermitien x de A tel que $x\xi = \eta$ et $\|x\| < 2\varepsilon$.

Cf. [6], p. 274. Le lemme n'est pas explicitement énoncé dans [6] (avec la majoration $\|x\| < 2\varepsilon$), mais le raisonnement de [6] donne en fait ce résultat.

Du lemme 1, KADISON déduit que, pour les représentations des C^* -algèbres dans un espace hilbertien, l'irréductibilité topologique équivaut à l'irréductibilité algébrique.

LEMME 2. — Soient A une C^* -algèbre, I un idéal bilatère fermé de A , P un idéal primitif de A , ρ une représentation de A de noyau P dans un espace hilbertien H , ξ et η des vecteurs de H tels que $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| < \varepsilon$. On suppose $P \not\supset I$. S'il existe un opérateur hermitien de $\mathcal{L}(H)$ transformant ξ en η , il existe un élément hermitien a de I tel que $\rho(a)\xi = \eta$ et $\|a\| < 2\varepsilon$.

Puisque ρ est algébriquement irréductible et que $\rho(I) \neq \{0\}$, la restriction de ρ à I est algébriquement irréductible [5]. D'après le lemme 1, il existe un élément hermitien h de $\rho(I)$, de norme $< 2\varepsilon$, tel que $h\xi = \eta$. Or, l'application de $I/(I \cap P)$ sur $\rho(I)$ déduite de ρ est isométrique. Donc il existe un élément b de I tel que $\|b\| < 2\varepsilon$ et $h = \rho(b)$. Soit $a = \frac{1}{2}(b + b^*) \in I$. On a

$$\|a\| < 2\varepsilon, \rho(a) = \frac{1}{2}(h + h^*) = h, \text{ et } a \text{ est hermitien.}$$

LEMME 3. — Soient A une C^* -algèbre à élément unité, a un élément hermitien de A , et E un ensemble fermé de nombres réels. L'ensemble des $I \in A^i$, tels que l'image canonique de a dans A/I ait un spectre contenu dans E , est une partie fermée de A^i .

Ceci est l'adaptation évidente du lemme 4.2 de [7] au cas d'une C^* -algèbre à élément unité.

THÉORÈME 1. — Soient A une C^* -algèbre. Alors A^i est un espace de Baire.

Comme toute partie ouverte de A^i est l'espace des idéaux primitifs d'un idéal bilatère fermé de A , on est ramené à prouver ceci :

Soit (C_1, C_2, \dots) une suite croissante de parties fermées rares (= sans points intérieurs) de A^i . Alors $A^i \neq C_1 \cup C_2 \cup \dots$ (si $A^i \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $A \neq \{0\}$).

La démonstration consiste pour les trois quarts à recopier celle de [7], théorème 3.1. Nous considérerons d'abord le cas où A possède un élément unité. Supposons que $A^i = C_1 \cup C_2 \cup \dots$. Nous allons définir par récurrence les objets suivants :

- a. Une suite strictement croissante d'entiers $k(1), k(2), \dots$;
- b. Des idéaux primitifs P_1, P_2, \dots de A ; soit ρ_j une représentation de A de noyau P_j dans un espace hilbertien H_j ;
- c. Un vecteur ξ_j de norme 1 dans H_j ;

d. Des éléments hermitiens a_{ij} de A , définis pour $j = 1, 2, \dots$ et $1 \leq i \leq j$ satisfaisant aux propriétés que voici :

- 1° Si I_j désigne l'intersection des noyaux des représentations de $C_{k(j)}$, on a $P_j \not\supset I_j$, $P_j \supset I_{j+1}$;
- 2° $\rho_j(a_{ij})\xi_j = -\xi_j$;
- 3° $a_{ij} \in I_i$;
- 4° $a_{ij} - a_{i, j-1} \in I_j$;
- 5° $\|a_{ij} - a_{i, j-1}\| \leq 2^{-j}$.

On pose $k(1) = 1$. Puisque $C_1 \neq A^i$, il existe un idéal primitif P_1 tel que $P_1 \not\supset I_1$, ce qui permet de choisir ρ_1 et H_1 . D'après le lemme 2, il existe un élément hermitien a_{11} dans I_1 et un vecteur ξ_1 de norme 1 dans H_1 tels que $\rho_1(a_{11})\xi_1 = -\xi_1$. Supposons définis les $k(j)$, les P_j , les ξ_j et les a_{ij} pour $1 \leq i \leq j \leq n$, de façon à satisfaire aux propriétés précédentes. Nous allons définir $k(n+1)$, P_{n+1} , ξ_{n+1} et les $a_{i, n+1}$.

Puisque $A^j = C_1 \cup C_2 \cup \dots$, il existe un $k(n+1) > k(n)$ tel que $P_n \in C_{k(n+1)}$. On a alors $I_{n+1} \subset P_n$. Posons

$$b_n = (1 + a_{1n})^2 + \dots + (1 + a_{nn})^2.$$

On a $\rho_n(b_n)\xi_n = 0$, donc 0 appartient au spectre de l'image canonique de b_n dans A/P_n . Il existe un idéal primitif P_{n+1} ne contenant pas I_{n+1} tel que le spectre de l'image canonique de b_n dans A/P_{n+1} rencontre l'intervalle $] -2^{-2n-4}, 2^{-2n-4} [$ (sinon, le spectre de b_n modulo I serait contenu dans le fermé complémentaire pour tout $I \in A^i - C_{k(n+1)}$, donc, compte tenu du lemme 3 et du fait que $C_{k(n+1)}$ est rare, pour tout $I \in A^i$). Nous venons donc de choisir P_{n+1} ; choisissons ρ_{n+1} et H_{n+1} . Il existe un vecteur ξ_{n+1} de norme 1 dans H_{n+1} tel que $\|\rho_{n+1}(b_n)\xi_{n+1}\| < 2^{-2n-4}$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|(1 + \rho_{n+1}(a_{in}))\xi_{n+1}\|^2 &= \sum_{i=1}^n ((1 + \rho_{n+1}(a_{in}))^2 \xi_{n+1} | \xi_{n+1}) \\ &= (\rho_{n+1}(b_n)\xi_{n+1} | \xi_{n+1}) < 2^{-2n-4}, \end{aligned}$$

donc

$$\|\rho_{n+1}(1 + a_{in})\xi_{n+1}\| < 2^{-n-2} \quad \text{pour tout } i.$$

D'après le lemme 2, il existe un élément hermitien g_i de I_{n+1} , de norme $< 2^{-n-1}$, tel que

$$\rho_{n+1}(g_i)\xi_{n+1} = \rho_{n+1}(1 + a_{in})\xi_{n+1}.$$

Posons alors

$$a_{i, n+1} = a_{in} - g_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

On a

$$a_{i, n+1} - a_{in} \in I_{n+1}, \quad \text{donc } a_{i, n+1} \in I_i + I_{n+1} = I_i,$$

et

$$\|a_{i, n+1} - a_{in}\| < 2^{-n-1}.$$

D'autre part, $\rho_{n+1}(a_{i,n+1})\zeta_{n+1} = -\zeta_{n+1}$. Pour achever la construction par récurrence, il suffit de définir $a_{n+1,n+1} \in I_{n+1}$ tel que $\rho_{n+1}(a_{n+1,n+1})\zeta_{n+1} = -\zeta_{n+1}$, ce qui est possible par un nouvel emploi du lemme 2.

Ceci posé, la suite $(a_{ii}, a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots)$ converge d'après la propriété 3 vers un élément c_i , qui appartient à I_i d'après la propriété 3. D'autre part, soit $j \geq i$; les éléments $a_{i,j+1} - a_{ij}$, $a_{i,j+2} - a_{i,j+1}$, ... appartiennent à I_{j+1} , donc à P_j , d'après les propriétés 4 et 1; donc

$$\rho_j(c_i)\zeta_j = \rho_j(a_{ij})\zeta_j = -\zeta_j \quad \text{d'après la propriété 2.}$$

Soit $I = A(1 + c_1) + A(1 + c_2) + \dots$. Si $I \neq A$, I est contenu dans un idéal à gauche maximal I' ; soient Q un idéal primitif de A contenu dans I' , et n un entier tel que $I_n \subset Q$; pour tout $x \in A$, on a

$$x = x(1 + c_n) - xc_n \in I + I_n \subset I',$$

ce qui est absurde. Donc $I = A$. Il existe donc $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que

$$x_1(1 + c_1) + \dots + x_n(1 + c_n) = 1.$$

Alors

$$\zeta_n = \rho_n(x_1)(1 + \rho_n(c_1))\zeta_n + \dots + \rho_n(x_n)(1 + \rho_n(c_n))\zeta_n = 0,$$

ce qui est absurde.

Enfin, si A n'a pas d'élément unité, A^j s'identifie au complémentaire d'un point fermé rare ω dans B^j , B étant la C^* -algèbre déduite de A par adjonction d'un élément unité. Alors $C_1 \cup \{\omega\}$, $C_2 \cup \{\omega\}$, ... sont fermés et rares, donc il existe un point de A^j qui n'appartient pas à leur réunion.

THÉORÈME 2. — *Soit A une C^* -algèbre séparable non primitive. Il existe dans A^j deux parties ouvertes non vides disjointes.*

Raisonnant par l'absurde, supposons que toute partie ouverte non vide de A^j soit partout dense. Soit $x \in A$. Pour tout $P \in A^j$, soit $x(P)$ l'image canonique de x dans A/P . Alors la fonction $P \rightarrow \|x(P)\|$ est semi-continue inférieurement ([2], lemme 2.1). Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble des $P \in A^j$ tels que $\|x(P)\| > \|x\| - \varepsilon$ est une partie ouverte de A^j , non vide (car $\|x\| = \sup_{P \in A^j} \|x(P)\|$), donc partout dense.

Soit (x_1, x_2, \dots) une suite partout dense dans A . Pour tout couple d'entiers $i > 0, j > 0$, soit U_{ij} l'ensemble des $P \in A^j$ tels que $\|x_i(P)\| > \|x_i\| - 1/j$. D'après ce qui précède, U_{ij} est une partie ouverte partout dense de A^j . Donc

(théorème 1) $V = \bigcap_{i,j} U_{ij}$ est partout dense dans A^j .

Soit $P \in V$. Pour tout i , on a

$$\|x_i\| - 1/j < \|x_i(P)\| \leq \|x_i\| \quad \text{quel que soit } j,$$

donc $\|x_i(P)\| = \|x_i\|$. On en conclut que

$$\|x(P)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Donc $P = \{0\}$ et A est primitive, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE 1. — *Soit A une C^* -algèbre séparable dans laquelle le produit de deux idéaux bilatères fermés non nuls est non nul. Alors A est primitive. Autrement dit, tout idéal bilatère premier fermé dans une C^* -algèbre séparable est primitif.*

Car si A est non primitive, il existe d'après le théorème 2 deux idéaux bilatères fermés I et J non nuls de A possédant la propriété suivante : tout idéal primitif de A contient, soit I , soit J . Alors $I \cap J = \{0\}$, donc $I \cdot J = \{0\}$.

COROLLAIRE 2. — *Soit A une C^* -algèbre séparable.*

(i) *Si (I_α) est une famille totalement ordonnée d'idéaux primitifs de A , alors $\bigcap I_\alpha$ est un idéal primitif de A .*

(ii) *Tout idéal primitif de A contient un idéal primitif minimal.*

Ce sont là des propriétés connues et faciles des idéaux bilatères premiers dans les algèbres quelconques.

COROLLAIRE 3. — *Soit A une C^* -algèbre séparable. Le noyau d'une représentation factorielle de A est un idéal primitif.*

Ceci se déduit du corollaire 1 de la même façon que, dans [7], le théorème 3 se déduit du lemme 7.4.

REMARQUE. — Le corollaire 3 peut s'obtenir directement par une autre méthode. Soit A une C^* -algèbre séparable, et soit π une représentation factorielle de A dans un espace hilbertien H . Soit $\pi = \int_S^\oplus \pi_t d\nu(t)$ une décomposition de π en intégrale hilbertienne de représentations irréductibles. Pour toute partie ν -mesurable S' de S , soit $E_{S'}$ le projecteur correspondant dans H , qui est permutable à $\pi(A)$. Si $E_{S'} \neq 0$, on a

$$\|\pi(x)\| = \|E_{S'}\pi(x)\| \quad \text{pour tout } x \in A,$$

puisque $\pi(A)$ engendre un facteur. Autrement dit, $\|\pi(x)\| = \operatorname{ess\,sup}_{t \in S'} \|\pi_t(x)\|$.

Il en résulte que $\|\pi_t(x)\| = \|\pi(x)\|$ sauf sur un ensemble ν -négligeable N_x .

Si D est un ensemble dénombrable partout dense dans A , soit $N = \bigcap_{x \in D} N_x$,

qui est négligeable. Pour $t \notin N$, on a $\|\pi_t(x)\| = \|\pi(x)\|$ pour tout $x \in D$,

donc pour tout $x \in A$. Donc le noyau de π_t est égal au noyau de π pour $t \notin N$. D'où le corollaire 3.

Comme l'a remarqué J. M. G. FELL (non publié), on déduit de ce raisonnement que, si deux représentations de même noyau de A sont équivalentes, les π_t sont deux à deux équivalentes pour $t \notin N$, donc π est de type I. Ce fait résulte aussi de [7], théorème 7.3, et du théorème 3 ci-dessous, mais le raisonnement de FELL est beaucoup plus simple.

II.

LEMME 4. — Soit A une C*-algèbre primitive. On suppose qu'il existe dans A^j une partie ouverte non vide séparée U . Alors :

- (i) U est réduite à un point, partout dense dans A^j ;
- (ii) Il existe dans A un plus petit idéal bilatère fermé non nul.

Soit P l'idéal $\{0\}$, qui est un élément de A^j . Tout idéal primitif de A contient $\{0\}$, donc est adhérent à P . Donc $\{P\}$ est partout dense dans A^j . Donc $P \in U$, et $\{P\}$ est partout dense dans U . Puisque U est séparée, $U = \{P\}$. D'où (i).

Soit Q l'intersection des idéaux primitifs non nuls de A , c'est-à-dire l'intersection des idéaux appartenant à $A^j - \{P\}$. Puisque $\{P\}$ est ouvert, P n'est pas adhérent à $A^j - \{P\}$, donc $\{0\}$ ne contient pas Q , donc $Q \neq \{0\}$. Comme tout idéal bilatère fermé de A est l'intersection des idéaux primitifs le contenant, Q est aussi l'intersection des idéaux bilatères fermés non nuls de A . D'où (ii). Le lemme est démontré.

Soit (H_1, H_2, \dots) une suite d'espaces hilbertiens de dimension \aleph_0 . Soit $(\xi_i^1, \xi_i^2, \dots)$ une base orthonormale de H_i . Dans le produit tensoriel hilbertien $H_1 \otimes H_2 \otimes \dots$ au sens de [9], nous considérons le produit incomplet H correspondant à la C_0 -suite $(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, \dots)$ ([9], déf. 3.3.1 et 4.1.1). Rappelons quelques propriétés de l'espace hilbertien H . Pour toute suite de vecteurs $x_i \in H_1, x_2 \in H_2, \dots$ tels que

$$\sum_i \left| \|x_i\| - 1 \right| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_i \left| (x_i | \xi_i^1) - 1 \right| < +\infty,$$

il existe un élément $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots$ de H qui dépend linéairement de chaque x_i . Si $y_1 \in H_1, y_2 \in H_2, \dots$ est une autre suite de vecteurs tels que

$$\sum_i \left| \|y_i\| - 1 \right| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_i \left| (y_i | \xi_i^1) - 1 \right| < +\infty,$$

le produit des $(x_i | y_i)$ est absolument convergent et

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots | y_1 \otimes y_2 \otimes \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} (x_i | y_i).$$

Les $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots$ forment un ensemble total dans H . Les $\zeta_1^{i_1} \otimes \zeta_2^{i_2} \otimes \dots$ tels que $i_n \neq 1$ seulement pour un nombre fini d'indices n forment une base orthonormale de H , qui est donc séparable.

Pour tout entier $i \geq 0$, on peut de même former le produit tensoriel hilbertien incomplet $H_{i+1} \otimes H_{i+2} \otimes \dots$ correspondant à la suite $(\zeta_{i+1}^1, \zeta_{i+2}^1, \dots)$, et H s'identifie canoniquement à

$$(H_1 \otimes \dots \otimes H_i) \otimes (H_{i+1} \otimes H_{i+2} \otimes \dots).$$

Ceci posé, soit A_i l'ensemble des opérateurs dans H de la forme $T \otimes 1$, où T est un opérateur compact dans $H_1 \otimes \dots \otimes H_i$ et où 1 est l'opérateur identique dans $H_{i+1} \otimes H_{i+2} \otimes \dots$.

LEMME 5. — (i) A_i est une sous- C^* -algèbre séparable de $\mathcal{L}(H)$.

(ii) Pour $i \leq j$, on a $A_i A_j \subset A_j$, $A_j A_i \subset A_j$.

L'application $T \rightarrow T \otimes 1$ de $\mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_i)$ dans $\mathcal{L}(H)$ est un homomorphisme de C^* -algèbres, d'où (i). Soit $i \leq j$. Si $S \in A_i$ et $S' \in A_j$, on a $S = T \otimes 1$, $S' = T' \otimes 1$ avec $T, T' \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_j)$, T' compact. Alors $SS' = (TT') \otimes 1$, $S'S = (T'T) \otimes 1$, et $TT', T'T$ sont compacts, d'où $SS' \in A_j$, $S'S \in A_j$.

LEMME 6. — Soient $B_i = A_i + A_{i+1} + \dots$, et C_i l'adhérence uniforme de B_i dans $\mathcal{L}(H)$. Alors C_i est une C^* -algèbre séparable, et C_1, C_2, C_3, \dots sont des idéaux bilatères fermés décroissants de C_1 .

D'après le lemme 5 (ii), B_i est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$, et B_i est un idéal bilatère de B_1 . D'où le lemme.

LEMME 7. — La somme des A_i est directe.

Soient $i < j$, et montrons que $(A_1 + \dots + A_i) \cap (A_{i+1} + \dots + A_j) = \{0\}$. Un élément de cette intersection est, d'une part de la forme $T \otimes 1$, avec $T \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_i)$, et d'autre part de la forme $T_{i+1} \otimes 1 + \dots + T_j \otimes 1$, où

$$T_{i+1} \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_{i+1}), \quad \dots, \quad T_j \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_j),$$

T_{i+1}, \dots, T_j étant compacts. Soit $a \in H_1 \otimes \dots \otimes H_i$. Quand $n \rightarrow +\infty$, les vecteurs

$$a \otimes \zeta_{i+1}^n \in H_1 \otimes \dots \otimes H_{i+1}, \quad a \otimes \zeta_{i+1}^n \otimes \zeta_{i+2}^1 \in H_1 \otimes \dots \otimes H_{i+2}, \quad \dots, \\ a \otimes \zeta_{i+1}^n \otimes \zeta_{i+2}^1 \otimes \dots \otimes \zeta_j^1 \in H_1 \otimes \dots \otimes H_j$$

tendent faiblement vers zéro. Donc les transformés de ces vecteurs respectivement par T_{i+1}, \dots, T_j tendent fortement vers zéro. Donc

$$(T_{i+1} \otimes 1 + \dots + T_j \otimes 1) (a \otimes \zeta_{i+1}^n \otimes \zeta_{i+2}^1 \otimes \zeta_{i+3}^1 \otimes \dots \otimes \zeta_j^1 \otimes \zeta_{j+1}^1 \otimes \dots)$$

tend fortement vers zéro. Donc

$$\| (T \otimes 1) (a \otimes \xi_{i+1}^n \otimes \xi_{i+2}^1 \otimes \xi_{i+3}^1 \otimes \dots) \| = \| Ta \|$$

tend vers zéro. Donc $Ta = 0$ et finalement $T = 0$. Ceci montre que

$$(A_1 + \dots + A_i) \cap (A_{i+1} + A_{i+2} + \dots) = \{0\}.$$

On a, de même, $(A_1 + \dots + A_{i-1}) \cap A_i = \{0\}$. Donc

$$A_i \cap (A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + A_{i+2} + \dots) = \{0\}.$$

LEMME 8. — Si $i \leq j$, $A_i + \dots + A_j$ est fermé.

On procède par récurrence sur $j - i$. Le lemme est évident si $i = j$. Supposons prouvé que $A_{i+1} + \dots + A_j$ est fermé. Soit $A = \overline{A_i + \dots + A_j}$. Alors $A_{i+1} + \dots + A_j$ est un idéal bilatère fermé de A d'après le lemme 5(ii). Dans l'homomorphisme canonique $A \rightarrow A / (A_{i+1} + \dots + A_j)$, l'image canonique de A_i est, d'une part partout dense, d'autre part fermée d'après les propriétés générales des C^* -algèbres. Donc $A = A_i + \dots + A_j$.

LEMME 9. — Soit $x \in A_1 + \dots + A_i$. La distance de x à $A_{i+1} + \dots + A_j$ est égale à $\|x\|$.

D'après le lemme 8, $A_1 + \dots + A_j$ est une C^* -algèbre. D'après les lemmes 8 et 5(ii), $A_{i+1} + \dots + A_j$ est un idéal bilatère fermé dans cette C^* -algèbre. L'homomorphisme canonique

$$\varphi : A_1 + \dots + A_j \rightarrow (A_1 + \dots + A_j) / (A_{i+1} + \dots + A_j)$$

a une restriction à $A_1 + \dots + A_i$ qui est injective (lemme 7), donc isométrique. L'égalité $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ n'est autre que le lemme, si l'on se souvient de la définition de la norme dans $(A_1 + \dots + A_j) / (A_{i+1} + \dots + A_j)$.

LEMME 10. — $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots = \{0\}$.

Soit $x \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$. On va construire une suite croissante d'entiers $k(1) < k(2) < \dots$ et des $x_i \in A_{k(i)} + A_{k(i)+1} + \dots + A_{k(i+1)-1}$, tels que $\|x_i - x\| \leq 1/i$. On prend $k(1) = 1$. Il existe $x_1 \in B_{k(1)}$ tel que $\|x_1 - x\| \leq 1$. Par définition de $B_{k(1)}$, il existe $k(2) > k(1)$ tel que $x_1 \in A_{k(1)} + \dots + A_{k(2)-1}$. Puisque $x \in C_{k(2)}$, il existe $x_2 \in B_{k(2)}$ tel que $\|x_2 - x\| \leq 1/2$. Par définition de $B_{k(2)}$, il existe un entier $k(3) > k(2)$ tel que $x_2 \in A_{k(2)} + \dots + A_{k(3)-1}$, ... On a $x_i \rightarrow x$, donc $x_i - x_{i+1} \rightarrow 0$. Or, d'après le lemme 9, $\|x_i\| \leq \|x_i - x_{i+1}\|$. Donc $x_i \rightarrow 0$ et $x = 0$.

LEMME 11. — La C^* -algèbre C_1 est primitive.

On va voir en effet que la représentation identique de C_1 dans H est topologiquement irréductible. Soit C l'adhérence faible de C_1 dans $\mathcal{L}(H)$. On a

$T \otimes 1 \in C_1$ pour tout opérateur compact T de $\mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_i)$. Donc $S \otimes 1 \in C$ pour tout $S \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \dots \otimes H_i)$. Donc $C = \mathcal{L}(H)$, d'après le théorème X(II) de [9]. (On pourrait aussi utiliser le corollaire 2 du théorème 2).

Rapprochant les lemmes 4, 10 et 11, on voit que :

THÉORÈME 3. — *Il existe une C^* -algèbre primitive séparable non nulle A telle que, dans l'espace A^i , toute partie ouverte non vide soit non séparée.*

III.

LEMME 12. — *Soient H un espace hilbertien, A une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(H)$ ne contenant pas d'opérateur compact non nul, α un nombre > 0 , x un élément hermitien positif de A tel que $\|x\| > \alpha$, et K un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de H tel que $P_K x P_K = x$. Il existe alors des éléments hermitiens positifs y, z de A et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie K' de K tels que :*

- (i) $P_K y P_K = y, \|y\| = \alpha, y \tilde{z} = \alpha \tilde{z}$ pour $\tilde{z} \in K'$;
- (ii) $P_{K'} z P_{K'} = z, z \neq 0$;
- (iii) tout vecteur de H annulé par x est annulé par y et z .

La décomposition spectrale de x montre qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé K' de H tel que :

- 1° $x P_{K'} = P_{K'} x \geq \alpha P_{K'}$;
- 2° $x(1 - P_{K'}) = (1 - P_{K'})x \leq \alpha(1 - P_{K'})$;
- 3° α n'est pas valeur propre de $x(1 - P_{K'})$.

Comme $P_K x P_K = x$, on a $K' \subset K$. Soit S le spectre de x . Puisque $\|x\| > \alpha$, on a $S' = S \cap]\alpha, +\infty[\neq \emptyset$. Si S' était fini et composé de valeurs propres de multiplicités finies, une fonction continue convenable de x serait un opérateur non nul de rang fini, et appartiendrait à A , contrairement à l'hypothèse faite sur A . Donc, ou bien S' est infini, ou bien certains points de S' sont valeurs propres de multiplicité infinie. Dans les deux cas, on conclut que K' est de dimension infinie. Soit $t \rightarrow f(t)$ la fonction continue de variable réelle définie par

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ pour } t \leq 0; \\ f(t) &= t \text{ pour } 0 \leq t \leq \alpha; \\ f(t) &= \alpha \text{ pour } t \geq \alpha. \end{aligned}$$

Soient $g(t) = f(t - \alpha)$, $y = f(x)$, $z = g(x)$. Alors, y et z sont des éléments hermitiens positifs de A vérifiant la propriété (iii) de l'énoncé, donc aussi $P_K y P_K = y$. Par construction de f , on a $y \tilde{z} = \alpha \tilde{z}$ pour \tilde{z} orthogonal à K' et

$y\xi = \alpha\xi$ pour $\xi \in K'$; donc $\|y\| = \alpha$. Par construction de g , on a $z \neq 0$, et $z\xi = 0$ pour ξ orthogonal à K' , donc $P_{K'}zP_{K'} = z$.

LEMME 13. — Soient H un espace hilbertien, A une sous-C*-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(H)$ ne contenant pas d'opérateur compact non nul, I un idéal bilatère fermé non nul de A , α un nombre > 0 , x et y des éléments hermitiens positifs de A , avec $y \neq 0$, et K un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de H tels que

$$P_K y P_K = y; \quad x\xi = \|x\|\xi \quad \text{pour } \xi \in K.$$

Soient, en outre, ξ_1, \dots, ξ_n des vecteurs de H .

Il existe alors des éléments hermitiens positifs x', y' de I et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie K' de K tels que

- (i) $P_K x' P_K = x', \quad \|x'\| = \alpha, \quad x'\xi = \alpha\xi$ pour $\xi \in K', \quad x'\xi_1 = \dots = x'\xi_n = 0$;
- (ii) $\|x + x'\| = \|x\| + \|x'\|$;
- (iii) $P_{K'} y' P_{K'} = y', y' \neq 0$.

Si $y^{1/2}(H)$ était de dimension finie, A contiendrait l'opérateur compact $y^{1/2}$, contrairement à l'hypothèse faite sur A . Donc $y^{1/2}(H)$ est de dimension infinie et contient, par suite, des éléments non nuls orthogonaux à $y^{1/2}\xi_1, \dots, y^{1/2}\xi_n$. Donc il existe $\eta \in H$ tel que $y^{1/2}\eta$ soit non nul et orthogonal à $y^{1/2}\xi_1, \dots, y^{1/2}\xi_n$. L'algèbre d'opérateurs I est irréductible ([5]). D'après [6], il existe un élément hermitien u de I tel que

$$uy^{1/2}\eta = y^{1/2}\eta, \quad uy^{1/2}\xi_1 = \dots = uy^{1/2}\xi_n = 0.$$

En remplaçant u par $|u|$, on peut en outre supposer u positif. Soit $v = y^{1/2}uy^{1/2}$, qui est un élément hermitien positif de I . On a

$$v\xi_1 = \dots = v\xi_n = 0, \quad v\eta = y\eta \neq 0, \quad \text{donc } v \neq 0;$$

en outre,

$$v \leq y^{1/2} \|u\| y^{1/2} = \|u\| y, \quad \text{donc } P_K v P_K = v.$$

En multipliant au besoin v par un scalaire, on voit qu'on a construit un élément hermitien positif v de I tel que

$$P_K v P_K = v, \quad v\xi_1 = \dots = v\xi_n = 0, \quad \|v\| > \alpha.$$

Appliquons le lemme 12 (dans lequel on remplace A par I et x par v). On obtient des éléments hermitiens positifs x', y' de I et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie K' de K tels que :

- (i) $P_K x' P_K = x', \quad \|x'\| = \alpha, \quad x'\xi = \alpha\xi$ pour $\xi \in K'$;
- (ii) $P_{K'} y' P_{K'} = y' \neq 0$;
- (iii) $x'\xi_1 = \dots = x'\xi_n = 0$.

Si $\zeta \in K' \subset K$, on a

$$(x + x')\zeta = \|x\|\zeta + \alpha\zeta = (\|x\| + \|x'\|)\zeta,$$

donc

$$\|x + x'\| \geq \|x\| + \|x'\|, \quad \text{donc} \quad \|x + x'\| = \|x\| + \|x'\|.$$

LEMME 14. — Soient H un espace hilbertien séparable, A une sous- C^* -algèbre irréductible de $\mathcal{L}(H)$ ne contenant pas d'opérateur compact non nul, $A = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ une suite d'idéaux bilatères fermés non nuls de A .

Il existe alors un élément hermitien positif x de A tel que :

- (i) $\|x\|$ n'est pas valeur propre de x ;
- (ii) $\|x \bmod I_n\| < \|x\|$ pour tout n .

(On note $x \bmod I_n$ l'image canonique de x dans A/I_n .)

Soit (ξ_1, ξ_2, \dots) une base orthonormale de H .

Il existe des éléments hermitiens positifs x_0, y_0 de I_0 et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie K_0 de H tels que $\|x_0\| = 1$, $x_0\xi = \xi$ pour $\xi \in K_0$, $P_{K_0}y_0P_{K_0} = y_0$ ($y_0 \neq 0$). (On le voit par exemple en appliquant le lemme 12 avec $\alpha = 1$, $K = H$, x hermitien positif dans A de norme > 1 .)

D'après le lemme 13 (appliqué à $H, I_0, I_1, 1/2, x_0, y_0, K_0, \xi_1$) il existe des éléments hermitiens positifs x_1, y_1 de I_1 , et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie K_1 de K_0 tels que :

- (i) $P_{K_0}x_1P_{K_0} = x_1$, $\|x_1\| = 1/2$, $(x_0 + x_1)\xi = [1 + (1/2)]\xi$ pour $\xi \in K_1$, $x_1\xi_1 = 0$;
- (ii) $\|x_0 + x_1\| = 1 + (1/2)$;
- (iii) $P_{K_1}y_1P_{K_1} = y_1$, $y_1 \neq 0$.

D'après le lemme 13 (appliqué à $H, I_0, I_2, 1/4, x_0 + x_1, y_1, K_1, \xi_1, \xi_2$), il existe des éléments hermitiens positifs x_2, y_2 de I_2 et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie K_2 de K_1 tels que :

- (i) $P_{K_1}x_2P_{K_1} = x_2$, $\|x_2\| = 1/4$, $(x_0 + x_1 + x_2)\xi = [1 + (1/2) + (1/4)]\xi$ pour $\xi \in K_2$, $x_2\xi_1 = x_2\xi_2 = 0$;
- (ii) $\|x_0 + x_1 + x_2\| = 1 + (1/2) + (1/4)$;
- (iii) $P_{K_2}y_2P_{K_2} = y_2$, $y_2 \neq 0$.

Par récurrence, on obtient ainsi deux suites (x_0, x_1, x_2, \dots) , (y_0, y_1, y_2, \dots) d'éléments hermitiens positifs de A , avec $x_n \in I_n$, $y_n \in I_n$, et une suite (K_0, K_1, K_2, \dots) de sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie de H tels que :

- (i) $P_{K_{n-1}}x_nP_{K_{n-1}} = x_n$, $\|x_n\| = 1/2^n$,
 $(x_0 + x_1 + \dots + x_n)\xi = [1 + (1/2) + \dots + 1/2^n]\xi$ pour $\xi \in K_n$,
 $x_n\xi_1 = x_n\xi_2 = \dots = x_n\xi_n = 0$;
- (ii) $\|x_0 + x_1 + \dots + x_n\| = 1 + (1/2) + \dots + 1/2^n$;
- (iii) $P_{K_n}y_nP_{K_n} = y_n$, $y_n \neq 0$.

Alors la série $x_0 + x_1 + \dots$ converge vers un élément hermitien positif x de A . On a $\|x\| = \lim \|x_0 + x_1 + \dots + x_n\| = 2$. D'autre part, $x_n + x_{n+1} + \dots \in I_n$, donc

$$\begin{aligned} \|x \bmod I_n\| &= \|(x_0 + \dots + x_{n-1}) \bmod I_n\| \\ &\leq \|x_0 + \dots + x_{n-1}\| = 1 + \dots + 1/2^{n-1} < \|x\|. \end{aligned}$$

Supposons enfin qu'il existe un

$$\xi = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots \in H, \quad \text{avec } |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots = 1,$$

tel que $x\xi = 2\xi$. On aurait

$$\begin{aligned} 2 &= (x\xi | \xi) = (x_0 \xi | \xi) + (x_1 \xi | \xi) + \dots \\ &= (x_0(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots) | \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots) \\ &\quad + (x_1(\lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3 + \dots) | \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3 + \dots) \\ &\quad + \dots \\ &\leq \|x_0\| + \|x_1\| (1 - |\lambda_1|^2) + \|x_2\| (1 - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2) + \dots \\ &= 2 - \|x_1\| \cdot |\lambda_1|^2 - \|x_2\| (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2) - \dots, \end{aligned}$$

d'où $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots$, ce qui est absurde puisque $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots \neq 0$.

LEMME 15. — Soit A une C*-algèbre primitive séparable. Il existe une suite I_1, I_2, \dots d'idéaux bilatères fermés non nuls décroissants de A tels que tout idéal primitif non nul de A contienne l'un des I_n .

Puisque A est séparable, la topologie de A^j admet une base dénombrable [3]. En particulier, l'idéal $\{0\}$ de A , qui est un élément de A^j , admet un système fondamental dénombrable (U_1, U_2, \dots) de voisinages ouverts. On peut supposer $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Soit I_n l'intersection des idéaux de $A^j - U_n$. Alors les I_n sont des idéaux bilatères fermés décroissants de A . Puisque $U_n \neq \emptyset$, on a $I_n \neq \{0\}$. Soit P un idéal primitif non nul de A . L'ensemble F des idéaux primitifs de A contenant P est une partie fermée de A^j ne contenant pas $\{0\}$. Donc il existe un entier n tel que $F \subset A^j - U_n$, et ceci entraîne $I_n \subset P$.

LEMME 16. — Soient A une C*-algèbre, π une représentation irréductible de A dans un espace hilbertien H , et I l'ensemble des opérateurs compacts de H . On a $\pi(A) \cap I = \{0\}$ ou $\pi(A) \supset I$. Ce dernier cas se présente toujours si A est GCR.

Si $\pi(A) \cap I \neq \{0\}$, $\pi(A) \cap I$ est un idéal bilatère non nul de $\pi(A)$. Donc la représentation identique de $\pi(A) \cap I$ est irréductible [5]. Comme $\pi(A) \cap I \subset I$, on en conclut que $\pi(A) \cap I = I$ (cf. par exemple [7], p. 222-223), c'est-à-dire que $I \subset \pi(A)$. Enfin, si A est GCR, il en est de même de $\pi(A)$ [7], donc $\pi(A)$ contient un idéal bilatère CCR non nul, soit J . L'application identique de J est irréductible, donc $J = I$.

THÉORÈME 4. — Soient H un espace hilbertien, A une sous- C^* -algèbre irréductible séparable de $\mathcal{L}(H)$. On suppose que toute représentation irréductible de A de noyau $\{0\}$ est équivalente à la représentation identique. Alors A contient l'ensemble I des opérateurs compacts de H .

D'après le lemme 15, il existe une suite I_1, I_2, \dots d'idéaux bilatères fermés non nuls décroissants de A tels que tout idéal primitif non nul de A contienne l'un des I_n . Puisque A est irréductible et séparable, H est séparable. Si $A \cap I = \{0\}$, nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme 14. D'après ce lemme, il existe un élément hermitien positif x de A tel que $\|x\|$ ne soit pas valeur propre de x et que $\|x \bmod I_n\| < \|x\|$ pour tout n . Il existe une représentation irréductible π de A telle que $\|x\|$ soit valeur propre de $\pi(x)$ [11]. Certainement, π est inéquivalente à la représentation identique de A . Soit P le noyau de π . Supposons $P \neq \{0\}$. Alors il existe un entier n tel que $I_n \subset P$. Donc $\|\pi(x)\| \leq \|x \bmod I_n\| < \|x\|$, ce qui est absurde puisque $\|x\|$ est valeur propre de $\pi(x)$. Donc $P = \{0\}$. Mais ceci contredit l'hypothèse faite sur A . Donc $A \cap I \neq \{0\}$, et par suite $A \supset I$ (lemme 16).

(Ce théorème redonne facilement le théorème 4 de [10].)

LEMME 17. — Soient A une C^* -algèbre, et I l'ensemble des $x \in A$ tel que $\pi(x)$ soit compact pour toute représentation irréductible π de A . Alors I est le plus grand idéal bilatère CCR de A .

Il est clair que I est un idéal bilatère fermé de A . Soit ρ une représentation irréductible de I . Alors, ρ se prolonge en une représentation irréductible π de A . Pour $x \in I$, $\pi(x) = \rho(x)$ est compact. Donc I est CCR. Enfin, soit J un idéal bilatère CCR de A . Soient σ une représentation irréductible de A , x un élément de J , et montrons que $\sigma(x)$ est compact. C'est clair si $\sigma(J) = \{0\}$. Sinon, la restriction de σ à J est irréductible, et $\sigma(x)$ est encore compact puisque J est CCR. Donc $J \subset I$.

LEMME 18. — Soient A une C^* -algèbre, U une partie ouverte de A^i , x un élément de A . On suppose que :

- (i) pour toute représentation irréductible π de A dans un espace hilbertien dont le noyau appartient à U , $\pi(x)$ est compact;
- (ii) il existe une représentation irréductible π_0 de A dont le noyau appartient à U et telle que $\pi_0(x) \neq 0$.

Alors A contient un idéal bilatère CCR non nul.

Soit I l'intersection des idéaux primitifs de A qui n'appartiennent pas à U . Puisque U est ouvert, le noyau de π_0 ne contient pas I . Donc la restriction de π_0 à I est irréductible non nulle. Donc il existe $y \in I$ tel que $\pi_0(x)\pi_0(y) \neq 0$. Alors xy est un élément non nul de I . Soit ρ une représen-

tation irréductible non nulle de I dans un espace hilbertien. Elle se prolonge en une représentation irréductible π de A dont le noyau appartient à U . Donc $\pi(x)$ est compact, et par suite $\rho(xy) = \pi(x)\pi(y)$ est compact. Donc le plus grand idéal J bilatère CCR de I est non nul (lemme 17). Or, J est un idéal bilatère de A comme il est bien connu (car $AJA = AJ^3A \subset IJI \subset J$).

THÉORÈME 5. — *Soit A une C*-algèbre séparable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une GCR-algèbre;

(ii) Pour toute représentation irréductible π de A dans un espace hilbertien H , $\pi(A)$ contient l'ensemble des opérateurs compacts de H ;

(iii) Deux représentations irréductibles de même noyau de A sont équivalentes.

(iii) \Rightarrow (ii) : ceci résulte aussitôt du théorème 4.

(ii) \Rightarrow (iii) : supposons satisfaite la condition (ii). Montrons que deux représentations irréductibles π_1, π_2 de A qui ont même noyau N sont équivalentes. On se ramène aussitôt au cas où $N = \{0\}$. Alors A contient un idéal bilatère fermé I isomorphe à l'algèbre des opérateurs compacts dans un espace hilbertien. Les restrictions de π_1 et π_2 à I sont équivalentes, donc π_1 et π_2 sont équivalentes.

(i) \Rightarrow (ii) : ceci résulte aussitôt du lemme 16.

(ii) \Rightarrow (i) : nous supposons satisfaite la condition (ii) et, par suite, la condition (iii).

Pour tout idéal primitif P de A , il existe une représentation irréductible π_P de A de noyau P dans un espace hilbertien H_P , bien déterminée à une équivalence près. Et $\pi_P(A)$ contient l'ensemble des opérateurs compacts de H_P . Autrement dit, il existe un idéal bilatère fermé bien déterminé de A contenant P , que nous noterons \tilde{P} , tel que π_P définisse un isomorphisme de \tilde{P}/P sur la C*-algèbre des opérateurs compacts de H_P . Choisissons un $x_P \in \tilde{P}$, hermitien positif, tel que $\|\pi_P(x_P)\| = 1$. Soit S_P l'ensemble des $Q \in A^j$ tels que

$$\|x_P \bmod Q\| \geq 2/3 \quad \text{et} \quad \|x_P \bmod \tilde{Q}\| \leq 1/3.$$

Si $P' \in A^j - S_P$, on a $\|x_{P'} - x_P\| > 1/3$. En effet, ou bien $\|x_{P'} \bmod P'\| < 2/3$, auquel cas

$$\|(x_{P'} - x_P) \bmod P'\| > 1 - (2/3) = 1/3;$$

ou bien $\|x_{P'} \bmod \tilde{P}'\| > 1/3$, auquel cas

$$\|(x_{P'} - x_P) \bmod \tilde{P}'\| = \|x_{P'} \bmod \tilde{P}'\| > 1/3.$$

Dans les deux cas, on en tire bien la conclusion annoncée.

Soit P_1 un point quelconque de A^j . Si $S_{P_1} = A^j$, nous ne définissons

pas P_2 . Si $S_{P_1} \neq A^i$, choisissons un $P_2 \in A^i - S_{P_1}$. Si $S_{P_1} \cup S_{P_2} = A^i$, nous ne définissons pas P_3 . Si $S_{P_1} \cup S_{P_2} \neq A^i$, soit $P_3 \in A^i - (S_{P_1} \cup S_{P_2})$. On continue par induction transfinie, en définissant $P_\alpha \in A^i - \left(\bigcup_{\beta < \alpha} S_{P_\beta} \right)$ si $\bigcup_{\beta < \alpha} S_{P_\beta} \neq A^i$.

D'après l'alinéa précédent, on a $\|x_{P_\alpha} - x_{P_\beta}\| > 1/3$ pour $\alpha \neq \beta$. Puisque A est séparable, la famille des P_α est dénombrable. Changeant de notations, nous avons donc construit une suite de points P_1, P_2, \dots de A^i tels que $A^i = S_{P_1} \cup S_{P_2} \cup \dots$.

Soit $t \rightarrow f(t)$ une fonction continue croissante de variable réelle telle que $f(t) = 0$ pour $t \leq 1/3$, $f(t) = 1$ pour $t \geq 2/3$. Soit $y_i = f(x_{P_i})$, qui est un élément hermitien positif de A . Pour $Q \in S_{P_i}$, on a

$$\|y_i \bmod Q\| = \|f(x_{P_i} \bmod Q)\| = 1$$

et

$$\|y_i \bmod \tilde{Q}\| = \|f(x_{P_i} \bmod \tilde{Q})\| = 0.$$

Donc $\pi_Q(y_i)$ est compact et de norme 1 pour $Q \in S_{P_i}$.

Nous utilisons maintenant le mode de raisonnement de [7], p. 242. Soit $t \rightarrow g(t)$ une fonction continue croissante de variable réelle, égale à 0 dans un voisinage de 0 et à 1 en 1. Soit $z_i = g(y_i)$, qui est un élément hermitien positif de A . Alors, pour $Q \in S_{P_i}$, $\pi_Q(z_i) = g(\pi_Q(y_i))$ est de norme 1, compact et de spectre fini contenu dans $\{0\} \cup [1/n, 1]$. Soit $S_{i,n}$ l'ensemble des $Q \in S_{P_i}$ tels que le spectre de $\pi_Q(z_i)$ soit contenu dans $\{0\} \cup [1/n, 1]$. Alors $S_{P_i} = S_{i,1} \cup S_{i,2} \cup \dots$. Soit $t \rightarrow h_n(t)$ une fonction continue croissante de variable réelle telle que $h_n(0) = 0$, $h_n(t) = 1$ pour $t \geq 1/n$. Soit $z_{i,n} = h_n(z_i)$, qui est un élément hermitien positif de A . Pour $Q \in S_{i,n}$, $\pi_Q(z_{i,n})$ est un projecteur non nul de rang fini. Soit $S_{i,n,p}$ l'ensemble des $Q \in S_{i,n}$ tels que le projecteur $\pi_Q(z_{i,n})$ soit de rang $\leq p$. On a

$$S_{i,n} = S_{i,n,1} \cup S_{i,n,2} \cup \dots,$$

donc A^i est réunion de la famille dénombrable des $S_{i,n,p}$. D'après le théorème 1, il existe des indices i_0, n_0, p_0 tels que, posant $S = S_{i_0, n_0, p_0}$, \bar{S} soit d'intérieur non vide (si $A^i \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $A \neq \{0\}$). Soit $x = z_{i_0, n_0}$. Pour $Q \in S$, $\pi_Q(x)$ est un projecteur non nul de rang $\leq p_0$.

Nous allons en déduire que $\pi_Q(x)$ est un projecteur de rang $\leq p_0$ pour $Q \in \bar{S}$, grâce à un raisonnement dû encore à KAPLANSKY. D'abord, $x^2 - x \in Q$ pour $Q \in S$, donc pour $Q \in \bar{S}$, de sorte que $\pi_Q(x)$ est un projecteur pour $Q \in \bar{S}$. D'après [8], il existe un polynôme non commutatif $P(X_1, \dots, X_r)$ tel que :

1° l'algèbre des matrices à p_0 lignes et p_0 colonnes satisfait à l'identité $P(X_1, \dots, X_r) = 0$;

2° l'algèbre des matrices à $p_0 + 1$ lignes et $p_0 + 1$ colonnes ne satisfait pas à cette identité.

Alors, quels que soient $u_1, \dots, u_r \in A$, on a

$$P(\pi_Q(x) \pi_Q(u_1) \pi_Q(x), \dots, \pi_Q(x) \pi_Q(u_r) \pi_Q(x)) = 0,$$

c'est-à-dire $P(xu_1x, \dots, xu_r x) \in Q$, pour tout $Q \in \mathcal{S}$, donc pour tout $Q \in \bar{\mathcal{S}}$. Puisque $\pi_Q(A)$ est irréductible, $\pi_Q(x) \pi_Q(A) \pi_Q(x)$ est l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H_Q)$ satisfaisant à $\pi_Q(x) T = T \pi_Q(x) = T$. Ce qui précède montre que, pour $Q \in \bar{\mathcal{S}}$, on a $P(T_1, \dots, T_r) = 0$ quels que soient $T_1, \dots, T_r \in \mathcal{L}(H_Q)$ tels que

$$\pi_Q(x) T_i = T_i \pi_Q(x) = T_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

Donc $\pi_Q(x)$ est de rang $\leq p_0$ pour $Q \in \bar{\mathcal{S}}$.

Soit U l'intérieur de $\bar{\mathcal{S}}$. Pour $Q \in U$, $\pi_Q(x)$ est compact. Puisque $U \neq \emptyset$, il existe un $Q_0 \in U \cap \mathcal{S}$. On a $\pi_{Q_0}(x) \neq 0$. Appliquant le lemme 18, nous avons donc prouvé ceci : si $A \neq \{0\}$, A contient un idéal I bilatère *CCR* non nul.

La C^* -algèbre séparable A/I vérifie encore la condition (ii) du théorème 4. D'après le raisonnement précédent, elle contient, si $A \neq I$, un idéal bilatère *CCR* non nul. Continuant transfiniment, on voit que A est *GCR*.

COROLLAIRE. — Soit A une C^* -algèbre séparable. Pour que A soit *GCR*, il faut et il suffit que tout quotient primitif de A soit *GCR*.

REMARQUES. — Soit A une *GCR*-algèbre.

a. Le lemme 17 prouve que A possède une suite de composition *canonique* dont les quotients sont *CCR*.

b. Soit I le plus grand idéal *CCR* de A , de sorte que I s'identifie à une partie ouverte de A^j ; alors I est partout dense dans A^j ; en effet, s'il existe une partie ouverte non vide U de A^j disjointe de I , U correspond à un idéal bilatère fermé non nul I' de A tel que $I' \cdot I = 0$; I' est *GCR*, donc contient un idéal I'' bilatère *CCR* non nul, et $I + I''$ est un idéal bilatère *CCR* de A , ce qui est absurde.

c. Il est facile de voir que, si $P \in I$, P est un idéal primitif *minimal* de A ; j'ignore si la réciproque est exacte.

d. Dans le langage de [2], l'équivalence (i) \Leftrightarrow (iii) du théorème 5 peut s'exprimer en disant que la C^* -algèbre séparable B est *GCR* si et seulement si \hat{B} est un T_0 -espace. De façon analogue, le théorème 4 de [10] entraîne facilement que B est *CCR* si et seulement si \hat{B} est un T_1 -espace.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*, chap. 9, 2^e éd., Hermann, Paris, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1045; *Éléments de Mathématiques*, 8).
- [2] FELL (J. M. G.). — The dual spaces of C^* -algebras, *Trans. Amer. math. Soc.* (à paraître).
- [3] FELL (J. M. G.). — C^* -algebras with smooth dual, *Illinois J. of Math.* (à paraître).
- [4] FELL (J. M. G.). — The structure of algebras of operator fields (à paraître).
- [5] JACOBSON (N.). — The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, t. 67, 1945, p. 300-320.
- [6] KADISON (R. V.). — Irreducible operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, t. 43, 1957, p. 273-276.
- [7] KAPLANSKY (I.). — The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, p. 219-255.
- [8] KAPLANSKY (I.). — Groups with representations of bounded degree, *Canadian J. Math.*, t. 1, 1949, p. 105-112.
- [9] NEUMANN (J. von). — On infinite direct products, *Compositio Math.*, t. 6, 1938, p. 1-77.
- [10] ROSENBERG (A.). — The number of irreducible representations of simple rings with no minimal ideals, *Amer. J. Math.*, t. 75, 1953, p. 523-530.
- [11] SEGAL (I. E.). — Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 73-88.

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1959.)

Jacques DIXMIER,
 Prof. Fac. Sc. Paris,
 64, rue Gay-Lussac,
 Paris (5^e).

