LARS GÅRDING

Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 73-93

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__73_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 73 à 93.

VECTEURS ANALYTIQUES DANS LES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE

PAR

LARS GÅRDING
(Lund).

INTRODUCTION. — En théorie des représentations des groupes de Lie, il est utile de savoir, que, étant donné un espace de représentation, les vecteurs analytiques y sont denses. Ce résultat (qu'énonce en détail le nº 9, p. 86) a été démontré dans des cas de plus en plus généraux par des démonstrations de plus en plus simples par HARISH-CHANDRA [10], CARTIER et DIXMIER [2] et E. NELSON [11]. Nous donnerons une variante simplifiée de la démonstration de Nelson. Le point essentiel est une démonstration que certaines solutions de l'équation de la chaleur sur un groupe de Lie sont à décroissance exponentielle arbitrairement rapide. Elle a été employée par GAFFNEY [5]. Pour la commodité du lecteur nous la répétons ici. Nous aurons aussi besoin du théoréme bien connu que toute solution faible d'une équation parabolique à coefficients analytiques est analytique par rapport aux variables d'espace (EJDEL'MAN [3], FRIEDMAN [4]). Nous redémontrerons ce résultat, pour l'équation de la chaleur, dans le dernier paragraphe.

1. Les métriques invariantes. — Soit

$$G = \{x, y, z, \ldots\}$$

un groupe de Lie connexe; notons 1 l'élément unité. Un ds de Riemann choisi arbitrairement en 1 donne, par le transport à gauche $y \to xy$, un ds de Riemann invariant à gauche. Soit

$$\tau(x, y) = \inf \int_\gamma ds,$$

où γ parcourt tous les arcs, de classe C^1 par exemple, allant de y à x. On a évidemment,

$$\tau(x, y) = \tau(y, x),$$
$$\tau(x, z) \leq \tau(x, y) + \tau(y, z),$$
$$\tau(x, y) = \tau(zx, zy).$$

En particulier,

$$\tau(1, x) = \tau(1, x^{-1}).$$

Comme

$$\tau(xy, 1) = \tau(y, x^{-1}) \leqq \tau(1, y) + \tau(1, x^{-1}),$$

on a aussi

$$(1) \qquad \tau(xy) \leqq \tau(x) + \tau(y),$$

si l'on pose

$$\tau(x) = \tau(1, x).$$

Soit $S_t(x)$ la boule $\tau(y, x) \leqq t$. Il est clair que les boules sont fermées. Nous allons voir plus tard qu'elles sont compactes. Pour le moment, nous savons seulement que les boules de rayon suffisamment petit le sont. Multiplant ds par un facteur constant nous pouvons supposer que toute boule de rayon $\leqq 2$ est compacte. Soient $S_t(x)$ et $S_r(y)$ deux boules telles que $t + r \geqq \tau(x, y)$ et que l'un au moins de t et r ne surpasse pas 2. Alors on peut affirmer qu'elles ont un point commun. En effet, joignons x et y par des courbes γ_n de longueur $\leqq \tau(x, y) + n^{-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Les points z_n, où γ_n coupe la frontière de la boule compacte, ont un point d'accumulation z appartenant à l'intersection des deux boules. Cette proposition sera utilisée sans être explicitement mentionnée. Soit $S_t = S_t(1)$ la boule de rayon t et de centre 1.

Lemme 1. — *Il existe un entier p tel qu'on peut couvrir S_{m+1}, de rayon entier et arbitraire $m+1$, par au plus p^m translatés à gauche de S_1.*

Remarque. — Il suffit d'effectuer une translation pour en déduire que toute boule est compacte.

Preuve. — Soient $a_1, \ldots, a_p$ des éléments de S_2 tels que les $a_j S_1$ couvrent S_2. Notons par A_k tout produit de k éléments a_j. Nous allons voir que

$$\{ A_m S_1 \}$$

est un recouvrement de S_{m+1}. Comme le nombre des A_m est au plus p^m, le lemme s'en suivra. Raisonnons par récurrence sur m. Soit $x \in S_{m+2}$; on peut trouver un $y \in S_{m+1}$ tel que

$$\tau(y) \leqq m+1, \qquad \tau(y, x) = \tau(y^{-1}x) \leqq 1 ;$$

vu l'hypothèse de récurrence, il existe A_m et z_1 tels que

$$y = A_m z_1, \qquad z_1 \in S_1.$$

Or $z = y^{-1}x \in S_1$; par conséquent,

$$x = yz = A_m z_1 z.$$

Mais (1) montre que $S_1 S_1 \subset S_2$ et, par suite, $z_1 z \in A_1 S_1$ de sorte que $x \in A_{m+1} S_1$. La démonstration du lemme est achevée. Soit maintenant $\omega(x)$ un élément de volume de G invariant à gauche. Notons

$$v(S) = \int_S \omega(x)$$

le volume de S. Comme $v(xS) = v(S)$ pour chaque x, le lemme **1** prouve que

$$v(S_{m+1}) \leqq p^m v(S_1).$$

Lemme 2. — *Si $\lambda > \log p$, l'intégrale*

$$\int_G e^{-\lambda\tau(x)} \omega(x)$$

est finie.

Preuve. — L'intégrale est majorée par la somme

$$\sum_m e^{-\lambda m}(v(S_{m+1}) - v(S_m)) \leqq \sum e^{-\lambda m} v(S_{m+1}) \leqq v(S_1) \sum e^{-(\lambda - \log p)m}.$$

Nous aurons besoin du

Lemme 3. — *Soit $\rho(x)$ une fonction réelle définie dans G telle que*

$$\rho(xy) \leqq \rho(x) + \rho(y).$$

Alors

$$\rho(x) \leqq c\,\tau(x) + c,$$

où c est la borne supérieure de ρ pour $\tau(x) \leqq 1$.

Preuve. — Étant donné $x \in S_{m+1} - S_m$, il existe $x_j \in S_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, tels que

$$1 \geqq \tau(x_j, x_{j+1}) = \tau(x_{j+1}^{-1} x_j), \qquad 1 \geqq \tau(x, x_m) = \tau(x_m^{-1} x).$$

D'où

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho(x_1(x_1^{-1}x_2) \ldots (x_m^{-1}x)) \\ &\leqq \rho(x_1) + \rho(x_1^{-1}x_2) + \ldots + \rho(x_m^{-1}x) \leqq c(m+1). \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$c(m+1) = cm + c \leqq c\,\tau(x) + c,$$

ce qui achève la démonstration.

2. Représentations.

— Soit B un Banach et

(1) $$|R| = \sup |Ra|, \qquad |a| \leqq 1,$$

la norme habituelle des applications linéaires continues $R : B \to B$. Soit $x \to R(x)$ une représentation continue de G dans B telle que

$$R(xy) = R(x)\,R(y), \qquad R(1) = 1$$

et que $R(x)\,a$ est une fonction continue dans $G \times B$. Nous dirons qu'une fonction F sur G à valeurs dans un Banach A est au plus à croissance exponentielle s'il existe une constante c telle que

$$|\,F(x)\,| \leqq e^{c+c\tau(x)}.$$

Vu les propriétés de τ, si l'une des fonctions $F(x)$, $F(x^{-1})$, $F(x_0 x)$, $F(x x_0)$ a cette propriété, il en est de même pour les autres.

Lemme 1. — *La fonction $R(x)$ est au plus à croissance exponentielle.*

Preuve. — Vu la définition (1), $|\,R(x)\,|$ est semi-continue inférieurement et

$$(3) \qquad |\,R(xy)\,| = |\,R(x)\,R(y)\,| \leqq |\,R(x)\,|.|\,R(y)\,|.$$

Démontrons d'abord que $|\,R(x)\,|$ est localement borné. Il suffit de démontrer que $|R(x)\,|$ est borné dans un seul compact K contenant un ouvert non vide. En effet, on peut couvrir tout compact de G par un nombre fini de translatés d'un tel K.

Supposons l'énoncé faux. Alors, en vertu de la semi-continuité, on peut trouver un K_1, où $|\,R(x)\,| \geqq 1$ et une suite infinie $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ telle que $|\,R(x)\,| \geqq j$ dans K_j. Maintenant les K_j étant fermés et non vides, ont un point commun où $|\,R(x)\,|$ est infini, ce qui est absurde. (On peut aussi faire appel à un théorème de Baire : toute fonction semi-continue inférieurement est bornée sur des ouverts partout denses.)

Maintenant posons

$$|\,R(x)\,| = e^{\rho(x)}.$$

Alors, vu (3), on peut appliquer le lemme 1.3 à la fonction ρ, ce qui achève la démonstration.

3. Opérateurs différentiels. — Soit

$$\Gamma = \{X, Y, \ldots\}$$

l'algèbre de Lie de G et soit

$$X(t) = \exp t X \qquad (t \text{ réel}),$$

les éléments du sous-groupe de G engendré par X. Chaque $X \in \Gamma$ correspond à un opérateur différentiel « à droite » qu'on note par la même lettre,

$$(Xf)\,(x) = \lim_{t \to 0}\,(f(x\,X(t)) - f(x))/t.$$

Ces opérateurs sont invariants à gauche, c'est-à-dire

$$T_y X = X T_y,$$

où T_y est la translation par y à gauche

$$(T_y f)(x) = f(yx).$$

On a $XY - YX = Z$, où $Z \in \Gamma$. Notons $\overline{X}$ l'opérateur différentiel « à gauche » qui correspond à X,

$$(\overline{X} f)(x) = \lim (f(X(t)\,x) - f(x))/t \qquad (t \to 0)$$

Ces opérateurs sont invariants à droite,

$$\overline{X} S_y = S_y \overline{X},$$

où $(S_y f)(x) = f(xy)$. On a $\overline{XY} - \overline{YX} = \overline{Z}$. De plus,

$$X\overline{Y} - \overline{Y}X = 0$$

pour tout X, Y.

Nous dirons qu'une fonction définie sur G est régulière si elle est indéfiniment différentiable par rapport aux coordonnées analytiques de G. Soit $\mathfrak{P}$ la classe des opérateurs différentiels à coefficients réguliers. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base de Γ; soient $\alpha = \alpha_1, \ldots \alpha_p$ des indices multiples où $\alpha_j = 1, \ldots, n$ et p varie avec α. Posons

$$X_\alpha = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_p}, \qquad \overline{X}_\alpha = \overline{X}_{\alpha_1} \ldots \overline{X}_{\alpha_p}.$$

Tout $P \in \mathfrak{P}$ peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$(1) \qquad \sum a_\alpha(x)\, X_\alpha, \qquad \sum \overline{a}_\alpha(x)\, \overline{X}_\alpha.$$

Comme $X_j X_k - X_k X_j$ et $\overline{X}_j \overline{X}_k - \overline{X}_k \overline{X}_j$ sont des combinaisons linéaires des X_j et des $\overline{X}_j$ respectivement, on peut supposer que $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots$ Dans ce cas les coefficients sont uniques. Pour que P soit invariant à gauche ou à droite il faut et il suffit que les a_α et les $\overline{a}_\alpha$ respectivement soient constants.

Soit $|\alpha| = p$ l'ordre de l'index multiple $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Considérons des indices ordonnés : $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots$ Il est clair qu'il existe une matrice analytique $A(x) = (a_{\alpha\beta}(x))$ telle que

$$(2) \qquad X_\alpha = \sum_{|\beta| \leqq m} a_{\alpha\beta}(x)\, \overline{X}_\beta \qquad |\alpha| \leqq m.$$

Lemme 1. — *Les coefficients de* (2) *sont au plus à croissance exponentielle sur* G.

Preuve. — On déduit de (2) que

$$X_\alpha S_y = \sum a_{\alpha\beta}(xy)\bar{X}_\beta. \tag{3}$$

D'autre part, les dérivées $X_\alpha S_y$ étant d'ordre $\leqq m$ et invariantes à gauche,

$$X_\alpha S_y = \sum b_{\alpha\beta}(y) X_\beta, \tag{4}$$

où $y \to B(y) = (b_{\alpha\beta}(y))$ est une représentation de G : $B(1) = 1$, $B(yz) = B(y)B(z)$. Il résulte de (2), (3) et (4) que

$$B(y)A(x) = A(xy).$$

Par conséquent, en faisant $xy = 1$,

$$A(x) = B(x)A(1).$$

Donc, vu le lemme 2.1, le lemme est prouvé.

Une base $X_1, \ldots, X_n$ de Γ étant fixée, nous notons

$$\nabla f = \{X_1 f, \ldots, X_n f\}$$

le gradient de f et nous écrirons

$$|\nabla f(x)|^2 = \sum |X_k f(x)|^2.$$

Il sera commode d'employer la même notation pour les fonctions qui ne sont pas différentiables; nous posons dans ce cas, par définition,

$$|Xf(x)| = \overline{\lim}\, |f(xX(t)) - f(x)| . |t|^{-1} \qquad (t \to 0).$$

Lemme 2. — *Le gradient de $\tau(x)$ est borné. Plus précisément,*

$$|\nabla\tau(x)| \leqq |\nabla\tau(1)|.$$

Preuve. — Vu (1.1), on a

$$\tau(xy) \leqq \tau(x) + \tau(y)$$

et

$$\tau(x) = \tau(xyy^{-1}) \leqq \tau(xy) + \tau(y^{-1}) = \tau(xy) + \tau(y)$$

de sorte que

$$|\tau(xy) - \tau(x)| \leqq \tau(y).$$

Par conséquent,

$$|X\tau(x)| \leqq \overline{\lim}\, \tau(X(t))\, |t|^{-1} = |X\tau(1)|,$$

où le second membre est fini. Pour simplifier l'écriture, nous choisissons le ds qui définit la métrique τ tel que

$$|\nabla\tau(1)| = 1.$$

4. Distributions. — Soit $C = C(G)$ l'espace linéaire des fonctions complexes régulières à support compact définies sur G. Tout $P \in \mathfrak{P}$ a un adjoint unique $P' \in \mathfrak{P}$ tel que

$$\int P' f(x) g(x)\,\omega(x) = \int f(x)\,Pg(x)\,\omega(x)$$

pour tout f, $g \in C$. En particulier, on trouve que

$$X' = -X - (Xl)(1), \qquad \bar{X}' = -\bar{X},$$

où $x_0 \to l(x_0) > 0$ est la représentation analytique de G donnée par

$$\omega(xx_0) = l(x_0)\,\omega(x).$$

Les adjoints des opérateurs (3.1) sont

$$\sum X'_\alpha\,a_\alpha(x), \qquad \sum \bar{X}'_\alpha\,\bar{a}_\alpha(x),$$

Il sera commode d'employer la théorie des distributions sur G. On munit C de la topologie de SCHWARTZ [13]. Soit C' le dual de C; les éléments de C' sont les distributions de Schwartz; on note $\langle f, g\rangle$ la valeur de $f \in C'$ au point $g \in C$. A chaque fonction localement intégrable f on fait correspondre une distribution, notée par la même lettre, définie par

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\,g(x)\,\omega(x). \tag{1}$$

En particulier,

$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, P'g\rangle$$

pour f, $g \in C$. Comme P' est une application linéaire continue $C \to C$, cette formule permet de définir Pf pour une distribution quelconque f. De même, $T_y f$ sera défini par

$$\langle T_y f, g\rangle = \langle f, T_{y^{-1}} g\rangle.$$

On voit que

$$(P+Q)' = P' + Q', \qquad (PQ)' = Q'P' \qquad \text{et} \qquad P'' = P.$$

Si P et Q sont invariants à gauche, $P+Q$, PQ et leurs transposés le sont aussi.

Nous utiliserons deux opérateurs de régularisation permutables avec les X et $\bar{X}$ respectivement, à savoir

$$(Jf)(x) = \int f(y^{-1}x)\,j(y)\,\omega(y) = \int j(xy^{-1})\,f(y)\,\omega(y^{-1}),$$

$$(\bar{J}f)(x) = \int f(xy^{-1})\,j(y)\,\omega(y) = \int j(y^{-1}x)\,f(y)\,\omega(y^{-1}),$$

où

$$j \in C, \qquad j \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \int j(y)\,\omega(y) = 1.$$

Ces opérateurs et leurs transposés, qui ont une forme analogue, sont des applications linéaires continues $C \to C$. Pour j tendant vers la distribution de Dirac δ, c'est-à-dire pour le support de j tendant vers 1, on a $Jf \to f$ dans C et de même pour les autres. Notons que $\omega(y^{-1}) = l(y)\,\omega(y)$, où $y \to l(y)$ est la représentation définie plus haut. Conformément à (1) il faut poser

$$(Jf)(x) = \langle f, h_x \rangle, \qquad h_x(y) = j(xy^{-1})\,l(y),$$

pour une distribution f. On note que la régularisée Jf est une fonction régulière. Nous considérons aussi les distributions sur $G \times I$, où I est un ouvert de la droite réelle. Dans ce cas il faut identifier une fonction localement intégrable $f(s, x)$ avec la distribution

$$g \to \int f(t, x)\,g(t, x)\,dt\,\omega(x), \qquad g \in C(I \times G).$$

LEMME. 1. — *Il existe une suite φ_k dans C telle que $\varphi_k \to 1$, et, de plus,*

$$P\varphi_k \to P1$$

pour tout $P \in \mathfrak{P}$ invariante à gauche, la convergence étant uniforme sur tout compact, et les fonctions $P\varphi_k$ étant uniformément bornées pour $k \to \infty$.

PREUVE. — Il suffit de poser $\varphi_k = \bar{J}\chi_k$, où les χ_k sont les fonctions caractéristiques d'une suite G_k de parties compactes de G tendant vers G pour $k \to \infty$. La vérification facile sera laissée au lecteur.

5. **Le laplacien.** — Soit H l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable sur G avec le produit scalaire

$$(f, g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,\omega(x)$$

et soit $|f| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ la norme correspondante. Posons

$$(\nabla f, \nabla g) = \sum (X_k f, X_k g), \qquad |\nabla f|^2 = (\nabla f, \nabla f).$$

Soit H^1 l'espace des fonctions telles que

$$|f| + |\nabla f| < \infty.$$

On constate facilement que $Jf \to f$ dans H et H^1 si $j \to \delta$ et $f \in H$, H^1 respectivement. Pour $f, g \in C$,

$$(\nabla f, \nabla g) = (Lf, g) = (f, Lg),$$

où

$$L = X'_1 X_1 + \ldots + X'_n X_n$$

est un laplacien invariant à gauche. Soit L_C l'opérateur L avec le domaine C et posons

$$\Lambda = L_C^\star. \tag{1}$$

Il est clair que le domaine D de Λ est l'espace linéaire des fonctions $f \in H$ telles que $L f \in H$. En particulier,

$$\Lambda \supset L_C.$$

Donc, vu (1),

$$\Lambda^\star \subset \Lambda. \tag{2}$$

Comme $JL = LJ$, on voit que

$$L\,Jf \to Lf, \qquad Jf \to f \tag{3}$$

dans H pour $j \to \delta$ et $f \in D$.

Lemme 1. — *L'opérateur Λ est auto-adjoint, $D \subset H_1$ et*

$$(\Lambda f, f) = |\nabla f|^2 \qquad (f \in D). \tag{4}$$

Remarque. — Ce résultat est connu (*voir* [12]). Notre démonstration est celle de Carleman [1] dans un cas analogue.

Preuve. — Comme L est un opérateur réel, c'est-à-dire $\overline{Lf} = L\bar{f}$, il suffit de démontrer (4) pour f réel. On peut aussi supposer f régulier. En effet, si (4) vaut pour Jf on voit de (3) que Jf est une suite de Cauchy dans H^1 pour $j \to \delta$. Par conséquent, $f \in H^1$ et en faisant $j \to \delta$, on obtient (4). Soient $\varphi = \varphi_k$ les fonctions de la suite construite au lemme 4.1. Pour f réel régulier on a l'identité

$$(\varphi\, Lf, f) = (\varphi \nabla f, \nabla f) - \frac{1}{2}((L\varphi)f, f).$$

En faisant $k \to \infty$ on obtient (4). Soient maintenant f, $g \in D$ réguliers. On a l'identité

$$(\varphi\, Lf, g) - (\varphi f, Lg) = (\nabla f, g \nabla \varphi) - (f \nabla \varphi, \nabla g).$$

En faisant $k \to \infty$ on obtient

$$(Lf, g) = (f, Lg).$$

Vu (3), cette égalité vaut aussi pour f, $g \in D$. Donc Λ est symétrique c'est-à-dire

$$\Lambda \subset \Lambda^\star.$$

Mais on a déjà l'inclusion opposée (2). Donc $\Lambda = \Lambda^\star$.

6. L'équation de la chaleur. — La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints montre que la fonction

$$u(t, x) = (e^{-t\Lambda} f)(x) \qquad (f \in H,\ t > 0)$$

est dans $D \subset H^1$ pour t fixe et qu'elle satisfait à l'équation de la chaleur

$$(1) \qquad (\partial_t + L)\, u(t, x) = 0$$

et que $u \to f$ dans H pour $t \to 0$. On a aussi

$$(\partial_t u, g) + (\nabla u, \nabla g) = 0$$

pour tout $g \in H^1$. Nous verrons plus tard (lemme 6.1) que u est régulier pour $t > 0$. Si $f \in C$ on peut le voir directement, aussi pour $t \geqq 0$, en remarquant que

$$P(\partial_t, X_1, \ldots)\, u = e^{-t\Lambda} P(-L, \ldots) f \in H^1$$

pour tout polynome P.

Remarque 1. — Dans le cas particulier où G est la droite réelle et $X = d/dx$ on a

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t, x-y) f(y)\, dy,$$

où W est la fonction de Gauss

$$W = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Remarque 2. — Il sera facile de démontrer que u est une solution régulière de (1) et que $u \to f$ pour $t \to 0$ dans un sens convenable, si f est une distribution à support compact ou, plus généralement, si f est une distribution qui n'est pas trop grande à l'infini. En particulier, l'analogue de W, à savoir

$$V(t, x) = e^{-t\Lambda} \delta(x)$$

existe. Cependant, pour nous il suffit d'avoir la fonction u.

7. La décroissance rapide (Gaffney) [5]. — On va démontrer que si f est à support compact, alors $u = e^{-t\Lambda} f$ a, sur G, une décroissance exponentielle arbitrairement rapide.

Lemme 1. — *Soit s réel. Alors*

$$(1) \qquad (e^{s\tau} u, u) \leqq e^{\frac{1}{2} s^2 t} (e^{s\tau} f, f).$$

Remarque 1. — Le second membre est fini pour f à support compact.

Remarque 2. — Écrivons (1) sous la forme

$$\left(e^{-\frac{1}{2}s^2(t+\varepsilon)+s\tau}u,\ u\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}\varepsilon s^2+s\tau}f,\ f\right),$$

où $\varepsilon > 0$, et intégrons en s de $-\infty$ à ∞. Il vient

$$(t+\varepsilon)^{-1/2}\,(e^{-\tau^2/2(\tau+\varepsilon)}u,\ u)\leqq \varepsilon^{-1/2}\,(e^{-\tau^2/2\varepsilon}f,\ f).$$

Donc, comme dans le cas particulier de la droite, l'ordre de décroissance de u est, approximativement,

$$e^{-\tau^2/4t}$$

pour t fixe et $x\to\infty$. On pourrait préciser.

Preuve. — Notons les identités suivantes où $v_t=\partial_t v$, $h_t=\partial_t h$,

$$(v_t,\ h^2v)+(h^2v,\ v_t)=\partial_t(hv,\ hv)-2(h_th,\ v,\ v),$$
$$(\nabla v,\ \nabla(h^2v))+(\nabla(h^2v),\ v)=2(\nabla(hv),\ \nabla(hv))-2(v\nabla h,\ v\nabla h)$$

valables pour tout $v\in \mathrm{H}^1$ différentiable en t et tout h réel borné dont les dérivées $\partial_t h$ et Xh sont bornées. En les ajoutant et divisant par 2, on obtient

$$(3)\qquad Re\{(v_t,\ h^2v)+(\nabla v,\ \nabla h^2 v)\}$$
$$=\frac{1}{2}\partial_t|hv|^2-|\nabla(hv)|^2-|v\nabla h|^2-(h_thv,\ v).$$

Soit $N>0$ et posons $\varphi(x)=\varphi_N(x)=\min\left(e^{\frac{1}{2}s\tau(x)},\ N\right)$. Alors φ est borné et, vu le lemme 3.2,

$$(4)\qquad |\nabla\varphi(x)|^2\leqq s^2/4.$$

Choisissons $v=u$ et $h=\varphi$ dans (3); puisque

$$(u_t,\ g)+(\nabla u,\ \nabla g)=0$$

pour tout $g\in H^1$, le premier membre est nul; donc

$$\partial_t|\varphi u|^2\leqq 2|u\nabla\varphi|^2$$

ou, en vertu de (4),

$$\partial_t|\varphi u|^2\leqq\frac{1}{2}s^2|\varphi u|^2,$$

c'est-à-dire

$$\partial_t e^{-\frac{1}{2}s^2t}|\varphi u|^2\leqq 0.$$

Par conséquent,

$$|\varphi u|^2\leqq e^{\frac{1}{2}s^2t}|\varphi f|^2.$$

En faisant $N\to\infty$, on obtient l'inégalité cherchée (1).

Nous aurons aussi besoin d'une inégalité analogue pour les dérivées de u, que nous énoncerons sous une forme moins précise. Posons

$$(2) \qquad P = \partial_t^k X_\alpha, \qquad \bar{P} = \partial_t^k \bar{X}_\alpha.$$

LEMME 2. — *Soit $v = Pu$ ou $v = \bar{P}u$ et soit φ une fonction numérique continue sur G, au plus à croissance exponentielle. Alors $(\varphi v, v)$ est borné pour t borné.*

PREUVE. — Dans le second cas (2), on a

$$\bar{P}u = e^{-t\Lambda}(-L)^k \bar{X}_\alpha f$$

et le lemme est une conséquence du lemme 1. Si $v = Pu$, on exprime Pu au moyen des $\bar{P}u$. Vu le lemme 3.1, on obtient une somme de termes de la forme $g\bar{P}u$, g étant au plus à croissance exponentielle, d'où le résultat cherché.

8. Nouvelles solutions de l'équation de la chaleur. — La décroissance rapide de la fonction u et de ses dérivées nous permettra de construire des solutions de l'équation de la chaleur à valeurs initiales qui sont à croissance exponentielle.

LEMME 1. — *Soit $f \in C$ et soit F une fonction continue sur G à valeurs dans un Banach, au plus à croissance exponentielle. Alors*

$$(1) \qquad U(t, x) = \int u(t, y^{-1}x)\, F(y)\, \omega(y)$$

est une solution de (6.1), régulière pour $t \geqq 0$, à valeur initiale

$$\int f(y^{-1}x)\, F(y)\, \omega(y).$$

De plus, pour $t > 0$, U est fonction analytique de x.

PREUVE. — Soit v une des dérivées (7.2) de u, et considérons l'intégrale

$$(2) \qquad V(t, x) = \int v(t, y^{-1}x)\, F(y)\, \omega(y).$$

Par un changement de variable $y \to xy^{-1}$ on obtient

$$(3) \qquad V(t, x) = \int v(t, y)\, H(x, y)\, \omega(y),$$

où

$$H(x, y) = F(xy^{-1})\, l(y).$$

Nous allons voir que V est définie et continue pour $t \geqq 0$. D'abord l'intégrale

$$(4) \qquad \int_G |v(t, y)| . |H(x, y)| \,\omega(y)$$

est absolument convergente. En effet, son carré est majoré par

$$(5) \qquad \int_G |v(t, y)|^2 e^{\lambda\tau(y)} |H(x, y)^2| \,\omega(y) \int_G e^{-\lambda\tau(y)} \omega(y),$$

où λ est réel. Choisissons λ assez grand pour que la dernière intégrale soit finie (lemme **1**.2) et appliquons le lemme **7**.2 à la première. Comme $|H(x, y)| \leqq e^{c+c\tau(y)}$, avec c borné pour x borné, on trouve que (4) est borné pour t et x bornés. Soit G_N la partie de G, où $\tau(x) \geqq N$. On obtient une majorante du carré de

$$(6) \qquad \int_{G_N} |v(t, y)| . |H(x, y)| \,\omega(y)$$

si l'on remplace G par G_N dans la dernière intégrale de (5). Donc, (6) tend vers zéro pour $N \to \infty$, uniformément pour t et x bornés. Par conséquent

$$V(t, x) = \lim_{N \to \infty} \int_{G - G_N} v(t, y) H(x, y) \,\omega(y)$$

est continue, étant limite uniforme de fonctions continues.

Maintenant, soit $v = Pu$ et prenons $h \in G(Z \times G)$, où Z est la demi-droite $t > 0$. Comme P est invariant à gauche, on a

$$\int u(t, y^{-1}x) P' h(t, x) \,dt\, \omega(x) = \int v(t, y^{-1}x) h(t, x) \,dt\, \omega(x).$$

Multipliant par $F(y)\,\omega(y)$ et intégrant, on peut, par le théorème de Fubini, changer l'ordre des intégrations. Vu (2), on obtient

$$\int U(t, x) P' h(t, x) \,dt\, \omega(x) = \int V(t, x) h(t, x) \,dt\, \omega(x).$$

Autrement dit, toutes les dérivées PU prises au sens des distributions sont continues. Donc U est régulier. (La démonstration élémentaire de ce fait dans [13] marche aussi bien pour les fonctions à valeurs dans un Banach.)

Comme u satisfait à l'équation de la chaleur il en est de même pour U. L'analyticité de U par rapport à x est une conséquence du lemme **10**.1.

Remarque. — Vu la remarque 2 du lemme **7**.1, le lemme est vrai aussi pour une fonction F qui satisfait à l'inégalité

$$|F(x)| \leqq e^{c+c\tau(x)^p},$$

où $p < 2$. On peut aussi faire un passage à la limite en prenant $f = \delta$. Dans ce cas, U est régulier pour $t > 0$ et continu pour $t \geqq 0$; sa valeur initiale est F.

9. Vecteurs analytiques. — Soit $x \to R(x)$ une représentation continue d'un groupe de Lie G dans un Banach B. Nous ne supposons pas G connexe. Un $b \in B$ est dit analytique si $R(x)b$ dépend analytiquement de x. On définit de même les vecteurs réguliers b : $R(x)b$ doit être régulier, c'est-à-dire indéfiniment différentiable. On démontre facilement que tous les vecteurs de la forme

$$b = \int f(y^{-1})\, R(y)\, a\, \omega(y) \qquad (f \in C,\ a \in B) \tag{1}$$

sont réguliers et qu'ils sont denses dans B. En effet (*voir* [6])

$$R(x)b = \int f(y^{-1})\, R(xy)\, a\, \omega(y) = \int f(y^{-1}x)\, R(y)\, a\, \omega(y)$$

est visiblement régulier. Choisissons f tel que

$$f \geqq 0, \qquad \int f(y^{-1})\, \omega(y) = 1$$

Alors

$$b - a = \int f(y^{-1})\, (R(y) - 1)\, a\, \omega(y)$$

de sorte que

$$|b - a| \leqq \max_{y \in K} |R(y)\, a - a|,$$

K étant le support de f. Donc, pour K près de 1, b est près de a. Comme a est arbitraire, les b sont denses dans B.

Pour les vecteurs analytiques on a le même résultat (E. Nelson [11]) :

Théorème. — *Les vecteurs analytiques sont denses dans B.*

Preuve. — D'abord remarquons que si $R(x)b$ est analytique au voisinage de 1, alors $R(x)b$ est analytique partout. En effet,

$$R(x)b = R(y)\, R(y^{-1}x)\, b$$

est alors analytique quand x est voisin d'un point donné y. Nous pouvons donc supposer G connexe, ce qui nous permet d'employer la métrique invariante τ.

Nos vecteurs analytiques s'obtiendront en remplaçant f dans (1) par $u = e^{-t\Lambda} f$; posons

$$a(t) = \int u(t, y^{-1})\, R(y)\, a\, \omega(y).$$

Vu le lemme 2.1, la fonction

$$F(y) = R(y)\,a$$

est au plus à croissance exponentielle. Donc, vu la démonstration du lemme 8.1, l'intégrale est absolument convergente pour $t \geqq 0$. De plus,

$$R(x)\,a(t) = \int u(t, y^{-1})\,R(xy)\,a\,\omega(y) = \int u(t, y^{-1}x)\,R(y)\,a\,\omega(y).$$

On peut donc appliquer le lemme 8.1, ce qui montre que $R(x)\,a(t)$ est une solution de l'équation de la chaleur, régulière pour $t \geqq 0$, donc fonction analytique de x pour $t > 0$. Pour $t \to 0$, $a(t)$ tend vers le vecteur régulier

$$b = a(0) = \int f(y^{-1})\,R(y)\,a\,\omega(y).$$

Donc, les $a(0)$ étant denses dans B, les $a(t)$ avec $t > 0$ le sont aussi, ce qui achève la démonstration.

10. L'analyticité des solutions de l'équation de la chaleur. — D'après les travaux de Ejdel'man [3] et Friedman [4], toute solution d'une équation ou d'un système parabolique à coefficients analytiques est analytique par rapport aux variables d'espace. Parce que nous considérons des solutions à valeurs dans un Banach, leurs résultats ne nous suffisent pas tout à fait. Il serait facile de les compléter; cependant, pour la commodité du lecteur, nous donnerons une démonstration simple et complète pour le cas qui nous intéresse.

Lemme 1. — *Soit I un intervalle ouvert réel, et soit $v = v(t, x)$ une fonction localement de carré intégrable dans $I \times G$, solution de*

$$(1) \qquad (\partial_t + L)\,v = 0.$$

Alors v est régulier. De plus, pour t fixe, v est analytique par rapport à x dans un voisinage complexe G' de G indépendant de v.

Remarque. — Le lemme est vrai pour une distribution quelconque v dans $I \times G$, solution de (1). Le principe de la démonstration sera d'obtenir des bornes convenables des dérivées de v.

Preuve. — Supposons d'abord que v soit régulier. Alors (1) vaut dans le sens strict. Soit $h \in C(I \times G)$. Il est clair que l'identité (7.3) vaut pour v et h; vu (1), le premier membre est nul. En intégrant on obtient

$$(2) \qquad \int |\nabla(hv)|^2\,dt = \int |v\,\nabla h|^2\,dt + \int (h_t h v, v)\,dt.$$

Soit t_0 un point intérieur à I et l sa distance au bord de I.

Considérons la boule R_a de $Z \times G$ définie par

$$\tau(x) + |t - t_0| \leqq a \qquad (a < l).$$

Elle est contenue dans $I \times G$. Soit $a + \delta < l$ et

(3) $$h \in C(R_{a+\delta}) \qquad (h = 1 \text{ sur } R_a,\ 0 \leqq h \leqq 1).$$

Notons par c diverses constantes indépendantes de v. Il est clair qu'on peut choisir h tel que

(4) $$|\partial_t h(t, x)|^2 + |\nabla h(t, x)|^2 \leqq c^2 \delta^{-2},$$

où c ne dépend pas de δ. Posons

$$|f, K|^2 = \int_K |f(t, x)|^2 \, dt\, \omega, \qquad |\nabla f, K|^2 = \int_K |\nabla f(t, x)|^2 \, dt\, \omega(x),$$

où K est un compact de $I \times G$. Combinant (2) et (4) on a

(5) $$\delta |\nabla v, R_a| \leqq c |v, R_{a+\delta}|.$$

Il est clair qu'il existe une matrice analytique inversible $a_{jk}(x)$ telle que

$$\overline{X}_j = \sum a_{jk}(x) X_k.$$

Donc (5) équivaut à

(6) $$\delta |\overline{\nabla} v, R_a| \leqq c |v, R_{a+\delta}|.$$

où

$$\overline{\nabla} f = \{\overline{X}_1 f, \ldots, \overline{X}_n f\}.$$

Notons par α, β, des indices multiples $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, où $\alpha_j = 1, \ldots, n$ et soit $|\alpha| = s$ l'ordre de α. Comme L est invariant à gauche, chaque

$$X_\alpha v = \overline{X}_{\alpha_1} \ldots \overline{X}_{\alpha_s} v.$$

est une solution de (1). Par conséquent, si nous posons

$$|\overline{\nabla}^p f, K|^2 = \sum_{|\alpha| = p} |\overline{X}_\alpha f, K|^2,$$

nous tirons de (6) que

$$\delta^2 |\overline{\nabla}^p f, R_a|^2 \leqq c |\overline{\nabla}^{p-1} v, R_{a+\delta}|^2$$

pour tout $p \geqq 1$. Donc, si $a + p\delta < l$,

$$\delta^p |\overline{\nabla}^p v, R_a| \leqq c^p |v, R_{a+p\delta}|.$$

Maintenant, soit

$$a < b < l$$

et choisissons δ tel que $a + p\delta = b$, c'est-à-dire $\delta = (b - a)/p$. Comme $p^p \leqq e^p p\,!$, nous obtenons

$$(8) \qquad |\nabla^p v, R_a| \leqq c^{p+1} p\,! \; |v, R_b|$$

pour tout $p \geqq 0$. La constante c dépend de a et de b, mais non de v ou de p. Il va être aisé de déduire de cette inégalité l'analyticité de v. Soit

$$\xi(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

un système de coordonnées analytiques au voisinage de l'unité de G, tel que $\xi = 0$ pour $x = 1$. Évidemment,

$$\partial_j = \sum t_{jk}(\xi)\, X_k, \qquad \partial_j = \partial/\partial\xi_j,$$

où $t_{jk}(\xi)$ est une matrice analytique inversible. Nous allons majorer les coefficients $t_{\alpha\beta}$ dans

$$(9) \qquad \partial_\alpha = \partial_{\alpha_1} \ldots = \sum_{|\beta| \leqq |\alpha|} t_{\alpha\beta}(\xi)\, X_\beta$$

en utilisant la théorie classique des séries majorantes à coefficients positifs. Si f et g sont analytiques pour $\xi = 0$, les dérivées de g étant positives pour ξ suffisamment petit on écrit

$$f \ll g$$

quand $|\partial_\alpha f(\xi)| \leqq \partial_\alpha g(\xi)$ pour tout α et pour ξ suffisamment petit. Posons

$$\varphi(\xi) = (2\rho - \xi_1 - \ldots \xi_l)^{-1}.$$

Pour f analytique on a

$$f \ll \varphi$$

dans $|\xi| = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \leqq \rho$, pourvu que ρ soit suffisamment petit.

Choisissons $\rho = \rho_0$ tel que, pour tout j, k,

$$(10) \qquad t_{jk} \ll \varphi$$

pour $|\xi| \leqq \rho_0$. Alors

$$\partial = \partial_1 + \ldots + \partial_n \ll n\varphi X, \qquad (X = X_1 + \ldots + X_n).$$

Observons que $\partial\varphi = n\varphi^2$. Par récurrence, on en déduit que

$$\partial^p \ll (2n\varphi)^p p\,! \sum_1^p X^k/k\,!$$

En particulier,

$$(11) \qquad |t_{\alpha\beta}(\xi)| \leqq (2n\varphi(\xi))^{|\alpha|}|\alpha|!/|\beta|!$$

pour $|\xi| \leqq \rho_0$. Choisissons b_0 assez petit pour que $|\xi| \leqq \rho_0$ dans R_{b_0} et faisons la restriction

$$a < b < \min(l, b_0).$$

Alors (11) vaut dans R_b et l'on déduit de (8) que

$$|\partial_\alpha v, R_a| \leqq (2n/\rho_0)^{|\alpha|}|\alpha|!\left(\sum_{|\beta| \leqq |\alpha|} c^{1+|\beta|}\right)|v, R_b|$$

d'où, facilement,

$$(12) \qquad |\partial_\alpha, v, R_a| \leqq c^{|\alpha|+1}|\alpha|!\,|v, R_b|,$$

avec une nouvelle constante c. Appliquons cela à $\partial_l^q v = (-L)^q v$. Il vient

$$|\partial_l^q \partial_\alpha v, R_a| \leqq c^{|\alpha|+1}|\alpha|!\,|L^q v, R_b|.$$

Vu (12), on peut écrire v dans le second membre à condition d'augmenter b et c. Donc,

$$(13) \qquad |\partial_l^q \partial_\alpha v, R_a| \leqq c_q^{|\alpha|+1}|\alpha|!\,|v, R_b|,$$

où c dépend de q, a et b mais non de α et v. Maintenant posons

$$|f, K|_\infty = \sup|f(x)| \qquad (x \in K).$$

D'après une inégalité classique de Sobolev, on a, par exemple,

$$|f, R_a|_\infty \leqq c\sum|\partial_l^q \partial_\beta f, R_b|, \qquad |\beta| + q \leqq n,$$

avec c indépendant de f. Si nous prenons c_q assez grand, nous tirons donc de (13)

$$(14) \qquad |\partial_l^q \partial_\alpha v, R_a|_\infty \leqq c_q^{|\alpha|+1}|\alpha|!\,|v, R_b|$$

pour tout α. En particulier, le développement de Taylor de v par rapport à ξ, en un point quelconque t, y de R_a, converge vers v près de y. Par conséquent $v(t_0, x)$ a un prolongement analytique dans un voisinage complexe de 1, qui dépend de l et des coordonnées ξ mais non de v. Par un transport à gauche on voit que v est analytique par rapport à x dans un voisinage complexe G' de G, indépendant de v.

Il nous reste à éliminer la restriction que v soit régulier. Soit v seulement localement à carré intégrable et soit $j(t, x) \geqq 0$ régulier à support voisin du point (o, 1), $\int j(t, y)\, dt\, \omega(y^{-1}) = 1$. Alors

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \int j(s, y)\, v(s+t, yx)\, ds\, \omega(y^{-1}) \\ &= \int j(s-t, yx^{-1})\, v(s, y)\, ds\, \omega(y^{-1}) \end{aligned}$$

est une solution régulière de (1) dans $I' \times G$, $I' \subset I$ proche de I. En particulier, (14) vaut pour w. Soit $R_b(s, y)$ la boule

$$|s + t - t_0| + \tau(xy) \leqq b;$$

prenons $b < \min(l, b_0)$. Si le support de j est assez voisin du point $t = 0$, $x = 1$, nous avons

$$|w, R_b| \leqq \int j(s, y)\, |v, R_b(s, y)|\, ds\, \omega(y^{-1}) \leqq |v, R_{b+\varepsilon}|,$$

avec un $\varepsilon > 0$ donné en avance. Par conséquent, tous les

$$|\partial_t^q\, \partial_\alpha\, w, R_a|_\infty$$

sont bornés quand le support de j tend vers le point (o, 1). Ceci entraîne que v est indéfiniment différentiable dans R_a (SCHWARTZ [13]). Donc, si l'on fait un transport à gauche et si l'on fait varier t_0, on voit que v est indéfiniment différentiable. Le lemme est démontré.

REMARQUE. — La méthode que nous avons utilisée est au fond celle de GEVREY [9] (*voir* aussi FRIEDMAN [4] et GÅRDING et MALGRANGE [8]). L'invariance à gauche de L facilite le passage de (6) à (8) et le passage d'un v régulier à un v arbitraire, mais ces deux opérations peuvent se faire aussi dans le cas général.

On peut remplacer $|v, R_0|$ dans le membre droit de (14) par une norme plus faible, à savoir

$$\sup |\langle v, f\rangle| / |\overline{\nabla}^m f|$$

pour $f \in C(R_b)$, m étant un entier quelconque. L'inégalité qui en résulte permet de démontrer le lemme quand v est une distribution.

LEMME 2. — *Les conclusions du lemme précédent sont vraies pour une solution régulière $v(t, x)$ de* (1) *à valeurs dans un Banach B.*

PREUVE. — Soit φ un élément du dual B' de B; notons $\langle \varphi, \beta \rangle$ sa valeur au point $\beta \in B$. Alors, la fonction $w = \langle \varphi, v(t, x)\rangle$ est régulière et satisfait à (1). Par conséquent, (14) vaut pour w. Comme

$$|w, R_b| \leqq |\varphi| . |v, R_b|,$$

on a donc

$$|\langle \varphi, \partial_t^q \partial_\alpha v \rangle, R_a|_\infty \leqq c_q^{|\alpha|+1} |\alpha|! |v, R_b|.|\varphi|.$$

Comme

$$|\beta| = \max |\langle \varphi, \beta \rangle| \qquad (\varphi \in B, |\varphi| \leqq 1);$$

pour tout $\beta \in B$ on en déduit que

$$|\partial_t^q \partial_\alpha v, R_a|_\infty \leqq c_q^{|\alpha|+1} |\alpha|! |v, R_b|.$$

D'où, par un raisonnement antérieur, l'analyticité de v.

Remarque. — Le lemme 1 vaut aussi pour une distribution à valeurs dans un Banach. Plus précisément, soit $h \to T(h)$ une application linéaire continue de $C(I \times G)$ dans B telle que $T((-\partial_t + L)h) = 0$ pour tout h; alors il existe une fonction régulière $v(t, x)$ à valeurs dans B, analytique en x, telle que

$$T(h) = \int v(t, x)\, h(t, x)\, dt\, \omega(x). \tag{15}$$

On peut réduire la démonstration au cas scalaire. En effet, soit $\varphi \in B'$. Alors $h \to T_\varphi(h) = \langle \varphi, T(h) \rangle$ est une distribution ordinaire, solution de (1). Donc, vu la remarque du lemme 1, T_φ est une fonction régulière. Par conséquent (Schwartz [14], p. 56), T est régulier, c'est-à-dire on a (15) avec v régulier. Donc vu lemme 2, v est analytique par rapport à x.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Carleman (Torsten). — Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger, *Arkiv för Mat. Astr. och Fys.*, t. 24 B, 1934, n° 11, p. 1-7.

[2] Cartier (Pierre) et Dixmier (Jacques). — Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Amer. J. Math.*, t. 80, 1958, p. 131-145.

[3] Ejdel'man (S. D.). — Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques [en russe], *Mat. Sbornik* (*Recueil mathématique*), N. S., t. 38, (80), 1956, p 51-92.

[4] Friedman (Avner). — On the regularity of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations, *J. Math. and Mech.*, t. 7, 1958, p. 43-60.

[5] Gaffney (M. P.). — The conservation property of the heat equation on Riemannian manifolds (à paraître).

[6] Gårding (Lars). — Note on continuous représentations of Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 33, 1947, p. 331-332.

[7] Gårding (Lars). — On a lemma by H. Weyl, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, t. 10, 1951, Bd 20, n° 23, p. 1-4.

[8] Gårding (L.) et Malgrange (B.). — Opérateurs partiellement elliptiques et partiellement hypo-elliptiques, *Math. Scand.* (à paraître).

[9] GEVREY (Maurice). — Démonstration du théorème de Picard-Bernstein par la méthode des contours successifs; prolongement analytique, *Bull. Sc. math.*, t. 50, 1926, p. 113-128.

[10] HARISH-CHANDRA. — Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space. I, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 185-243.

[11] NELSON (Edward). — Analytic vectors, *Annals Math.*, t. 70, 1959, p. 572-615.

[12] NELSON (E.) et STINESPRING (W. F.). Representation of elliptic operators in an envelopping algebra, *Amer. J. Math.*, t. 81, 1959, p. 547-560.

[13] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, tome 1 (2e éd.) et tome 2. — Paris, Hermann, 1957 et 1951 (*Act. scient. et ind.*, 1091 = 1245 et 1122; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 9 et 10).

[14] SCHWARTZ (Laurent). — Théorie des distributions à valeurs vectorielles. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 7, 1957. p. 1-141.

(Manuscrit reçu le 1er novembre 1959.)

Lars GÅRDING,
Institut mathématique,
Université,
Lund (Suède).