BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE L'ABBÉ

Structures algébriques suggérées par la logique mathématique

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 299-314

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__299_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 299 à 314.

STRUCTURES ALGÉBRIQUES SUGGÉRÉES PAR LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE;

PAR

MAURICE L'ABBÉ.

(Montréal).

1. **Logique et mathématiques.** — La logique mathématique est une discipline qui compte un peu plus d'un siècle d'existence. On fait habituellement remonter la naissance de cette forme moderne de la logique à BOOLE, plus précisément à la publication en 1847 de son Ouvrage intitulé *The mathematical analysis of logic*. Cependant, les travaux de BOOLE et de ses successeurs immédiats, de SCHRÖDER par exemple, sont aujourd'hui considérés comme œuvres d'algébristes plutôt que de logiciens; le point de départ et l'intention relevaient certainement de la logique, mais la méthode et les résultats restaient algébriques. C'est, en fait, FREGE, dont les travaux parurent à la fin du siècle dernier, qui devrait être considéré comme le véritable créateur de cette méthode *sui generis* qui donne à la logique sa forme actuelle.

La logique mathématique s'est considérablement développée depuis une trentaine d'années. Il existe actuellement aux États-Unis, en Allemagne, en Pologne, en Angleterre et dans plusieurs autres pays, des groupes importants de mathématiciens spécialistes de la logique. Plusieurs périodiques sont destinés uniquement à la publication des travaux de logique mathématique. Les colloques et les instituts se multiplient. Une abondance de manuels et de traités exposant les parties déjà classiques de la logique moderne sont maintenant publiés. Tout ceci reflète bien l'activité et la vigueur croissante de cette discipline.

Dans les dernières années, la logique s'est de plus en plus rapprochée des mathématiques au sens habituel du mot. Il n'y a pas si longtemps, c'est poussé par des préoccupations d'ordre philosophique qu'on venait à la logique. La philosophie n'était certes pas une voie d'accès facile. De nos jours, la situation est fort différente. Les deux instruments fondamentaux en logique mathématique sont deux branches proprement mathématiques : d'une part, la théorie des fonctions récursives et, d'autre part, l'algèbre moderne. Pour le mathématicien de métier, ces deux branches constituent donc maintenant des voies d'accès naturelles à la logique.

Le rôle de l'algèbre en logique, et, inversement, celui de la logique en algèbre, sont devenus importants dans leur développement respectif. Les relations entre ces deux disciplines sont maintenant fort complexes. Nous voudrions nous contenter d'étudier ici un aspect de ces relations en essayant d'inventorier les diverses structures algébriques qui ont été, en quelque sorte, suggérées par le développement de la logique.

2. **Algèbre de Boole.** — L'une des tructures les plus anciennes et les plus fondamentales qui puissent être rattachées à la logique est la structure d'algèbre de Boole. C'est en voulant donner une analyse mathématique de la logique des propositions, c'est-à-dire des règles déterminant l'usage correct des opérateurs propositionnels tels que la négation, la disjonction, la conjonction et l'implication, que Boole créa la structure algébrique qui porte aujourd'hui son nom. La théorie des algèbres de Boole a été étudiée par un grand nombre de logiciens et d'algébristes. Mentionnons, en particulier, les travaux de Schröder à la fin du XIX^e siècle, ceux de Huntington, à partir de 1904, à qui nous devons plusieurs axiomatisations maintenant classiques des algèbres de Boole. Ce n'est cependant qu'à partir de 1933 que la théorie de ces algèbres fut étudiée du point de vue proprement dit de l'algèbre moderne.

Rappelons, en quelques mots, la notion d'algèbre de Boole. Le cas le plus concret d'une telle algèbre se présente lorsqu'on considère la structure déterminée sur la classe $\mathfrak{P}(E)$ de toutes les parties d'un ensemble non vide E par les opérations d'union, d'intersection et de complémentation. Un peu plus généralement, si $\mathfrak{A}$ est une sous-classe de la classe $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble non vide E que nous supposons fermé par rapport à l'union, à l'intersection et à la complémentation, et qui contient par hypothèse l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble E lui-même, alors nous disons que $\mathfrak{A}$ forme une *algèbre de Boole concrète*. Nous désignerons une telle algèbre par la notation

$$\left\langle \mathfrak{A}, \cup, \cap, \complement, \emptyset, E \right\rangle.$$

Géométriquement, les opérations fondamentales d'une algèbre de Boole concrète sont très simples à interpréter dans le cas où l'ensemble E est le produit cartésien d'un ensemble non vide par lui-même (*fig.* 1).

Par abstraction à partir de ces modèles concrets, nous obtenons la notion générale d'algèbre de Boole. Un ensemble B contenant deux éléments distingués que nous désignons par 0 et 1, où sont définies une loi de composition unaire désignée par $^-$ et deux lois de composition binaire désignées par $+$ et $.$, sera appelé une *algèbre de Boole* si ces lois et ces éléments satisfont certaines propriétés appelées axiomes de la structure. Il existe un grand nombre de systèmes d'axiomes équivalents ainsi que plusieurs choix

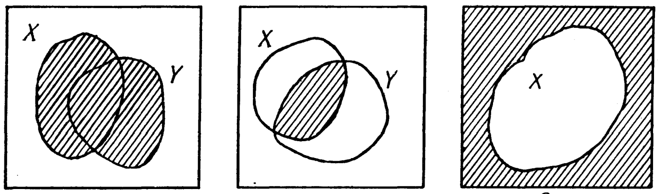


Fig. 1.

possibles de notions primitives. Le système suivant, sans être des plus économiques, a l'avantage de permettre un développement facile de la théorie [1] :

1. $x + x = x, \quad x.x = x;$
2. $x + y = y + x, \quad x.y = y.x;$
3. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad (x.y).z = x.(y.z);$
4. $x + (x.y) = x, \quad x.(x + y) = x;$
5. $x.(y + z) = x.y + x.z, \quad x + (y.z) = (x + y).(x + z);$
6. $x.0 = 0, \quad x.1 = x;$
7. $x + \overline{x} = 1, \quad x.\overline{x} = 0.$

Ces axiomes caractérisent les algèbres de Boole comme étant des treillis distributifs complémentés avec élément minimal et élément maximal.

Le système axiomatique présenté sera considéré adéquat ou complet, ou encore on dira que la notion générale d'algèbre de Boole qu'il sert à définir est une abstraction fidèle de la notion d'algèbre de Boole concrète, s'il est possible de déduire de ces axiomes précisément toutes les lois de forme algébrique qui sont valides dans toute algèbre de Boole concrète. En fait, l'axiomatisation proposée est justement adéquate en ce sens. Ceci est une conséquence immédiate du résultat important démontré pour la première fois par STONE en 1936 et connu sous le nom de théorème de représentation

[1] Ce système d'axiomes se trouve utilisé, par exemple, dans la récente monographie de Leon HENKIN, *La structure algébrique des théories mathématiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 12.

pour les algèbres de Boole (2). Ce théorème affirme que toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre de Boole concrète. Un résultat semblable était connu auparavant en ce qui concerne les algèbres finies et plus généralement les algèbres dites atomistiques. Le résultat complètement général de Stone exige une démonstration nouvelle dans laquelle l'axiome de choix, ou son équivalent le lemme de Zorn, joue un rôle fondamental. Il est possible, cependant, comme l'a montré HENKIN en 1947 (3), d'obtenir le théorème de Stone à partir du théorème de représentation pour les algèbres finies en utilisant un argument essentiellement métamathématique; le résultat logique utilisé ici est le théorème de Skolem-Gödel concernant la complétude du calcul fonctionnel du premier ordre. Un résultat plus inattendu, découvert en 1954 par HENKIN, est l'équivalence entre le théorème de Stone et le théorème de Gödel-Malčeo concernant la complétude du calcul propositionnel (4).

Les multiples relations qui existent entre la structure d'algèbre de Boole, d'une part, et le système logique appelé calcul propositionnel, d'autre part, sont bien connues des logiciens. Ces relations reflètent l'idée que la notion d'algèbre de Boole constitue une espèce de traduction algébrique du calcul propositionnel. Depuis une cinquantaine d'années, les logiciens ont défini et étudié de nombreux systèmes logistiques apparentés au calcul propositionnel, des systèmes plus faibles ou plus riches ou simplement chevauchant le calcul propositionnel. Le problème d'algébrisation de ces systèmes consiste à trouver des structures algébriques qui présenteraient avec ceux-ci le rapport déjà connu entre le calcul propositionnel et la structure d'algèbre de Boole. Bien entendu, il est arrivé parfois que les structures algébriques cherchées étaient déjà connues des algébristes, mais souvent de nouvelles structures ont dû être créées pour résoudre ce problème. C'est en ce sens que nous pouvons parler de structures algébriques suggérées par la logique mathématique.

3. Structures plus générales. — Au niveau de la logique propositionnelle classique à deux valeurs, les logiciens ont étudié plusieurs systèmes formalisant des logiques spéciales, appelées souvent non classiques, telles que les

---

(2) M. H. STONE, *The Theory of Representations for Boolean Algebras*, (*Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 40, 1936, p. 37-111). En rapport avec les travaux de STONE, il faut mentionner ceux de TARSKI, d'un point de vue assez différent : *Grundzüge des Systemenkalküls*, Erster Teil, *Fund. Math.*, vol. 24, 1935, p. 177-198; Zweiter Teil, *ibib.*, vol. 26, 1936, p. 283-301; *Ideale in den Mengenkörpern* [*Ann. Soc. polon. Math.*, vol. 15 (pour 1936, publié en 1937), p. 186-189]. *Voir* également le traité de Garrett BIRKHOFF, *Lattice Theory* (seconde édition), New-York, American mathematical-Society, 1948.

(3) Leon HENKIN, *Some interconnections between modern Algebra and mathema tical Logic* (*Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 74, 1953, p. 410-427). Ce résultat de HENKIN était contenu dans sa thèse, *The Completeness of formal Systems*, présentée à Princeton en octobre 1947.

(4) Leon HENKIN, *Boolean representation through propositional Calculus* (*Fund. Math.*, vol. 41, 1954, p. 89-96).

logiques multivalentes, la logique intuitioniste et la logique modale. Ces logiques apparaissent parfois comme des logiques plus faibles que la logique propositionnelle classique, et en conséquence, elles donnent lieu, par algébrisation, à des structures algébriques plus générales que la structure d'algèbre de Boole.

Łukasiewicz introduisit en 1920 la notion de logique trivalente et Post, l'année suivante, abordait l'études des logiques à n valeurs ou logiques multivalentes ([5]). Des travaux importants concernant ces logiques furent pour suivis en collaboration par Tarski et Łukasiewicz en 1930 ([6]). Une dizaine d'années plus tard, Rosenbloom, un élève de Post, entreprit l'étude de certaines structures algébriques apparentées à ces logiques à n valeurs qu'il appela *algèbres de Post* et que nous désignerons par P_n ([7]). Précisément pour $n = 2$, ces algèbres de Post sont identiques aux algèbres de Boole. Les algèbres de Post P_n d'ordre fini, c'est-à-dire ne contenant qu'un nombre fini m d'éléments, sont isomorphes et leur structure est relativement simple : elles contiennent $m = n^k$ éléments où k est le nombre d'atomes dans chaque algèbre. La structure des algèbres de Post d'ordre infini est beaucoup plus complexe et est actuellement loin d'être éclaircie. Wade, en 1945, pour suivant les travaux de Rosenbloom, étudia les anneaux-p de Boole ([8]). Notons aussi la série des travaux de Foster qui se situent dans la même ligne ([9]).

Tout récemment, Chang a proposé une algébrisation de la logique propositionnelle à une infinité de valeurs ([10]). L'étude des logiques multivalentes, surtout au niveau fonctionnel, a progressé ces dernières années grâce surtout

---

([5]) Jan Łukasiewicz, *O logice trójwartósciowej* [*Ruch filozoficzny* (lwów), vol. 5, 1920, p. 169-171]; E. L. Post, *Introduction to a general Theory of elemantary Propositions* (*Amer. J. Math.*, vol. 43, 1921, p. 163-185).

([6]) Jan Łukasiewicz et Alfred Tarski, *Untersuchen über den Aussagenkalkül* (*Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, vol. 23, 1930, p. 1-21).

([7]) P. C. Rosenbloom, *Post algebras I. Postulates and general theory* (*Amer. J. Math.*, vol. 64, 1942, p. 167-188).

([8]) L. I. Wade, *Post algebras and rings* (*Duke math. J.*, vol. 12, 1945, p. 389-395). Les anneaux de Boole ont été étudiés par Stone [*cf.* référence note ([2]) et les anneaux-p, qui sont des anneaux de Boole généralisés, par N. H. Mc Coye et Deane Montgomery dans leur Mémoire, *A representation of generalized Boolean rings* (*Duke math. J.*, vol. 3, 1937, p. 455-459).

([9]) A. L. Foster, *The n-ality theory of rings* (*Proc. nat. Acad. Sc.*, vol. 35, 1949, p. 31-38); *On n-ality theories in rings and their logical algebras, including triality principle in three valued logics* (*Amer. J. Math.*, vol. 72, 1950, p. 101-123); *Ring-logics and p-rings* (*University of California publications in Mathematics*, nouv. série, vol. 1, n° 10, 1951, p. 385-395); *p-rings and their Boolan-vector representation* (*Acta Mathematica*, vol. 84, n^os^ 3-4, 1951, p. 231-261); *p^k-rings and ring-logics* (*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Sc. fis. e mat., 3^e^ série, vol. 5, 1951, p. 279-300).

([10]) Pour un résumé des travaux de C. C. Chang, *voir* p. 144-146 du volume I des *Summaries of talks presented at the Summer Institute of symbolic Logic in* 1957 *at Cornell University.*

aux travaux de Rosser et de Turquette, et il y a sans doute d'intéressants résultats algébriques en puissance dans ces acquisitions nouvelles de la logique ([11]).

La logique intuitioniste ainsi que la logique modale ont donné lieu par algébrisation à des structures déjà connues des algébristes et des topologues. La structure algébrique correspondant à la logique propositionnelle intuitioniste de Brouwer, telle que formalisée par Heyting, est ce qu'on appelle la structure d'algèbre de Brouwer (ou dualement de Heyting) : c'est un réseau pseudo-complémenté avec élément unité. Un tel réseau est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre des fermés d'un espace topologique. A la logique modale propositionnelle, formulée par Lewis, correspond la structure d'algèbre de fermeture qui constitue une espèce d'algèbre de la topologie dont nous reparlerons dans quelques instants ([12]).

Il est intéressant et suggestif de voir les relations qui ont été mises à jour par ces travaux entre certains des systèmes logiques suggérés souvent par des problèmes d'ordre plutôt philosophique et certaines des structures algébriques et topologiques jouant un rôle fondamental dans les mathématiques modernes.

4. Algèbres de Boole avec opérateurs. — Les structures suggérées par les systèmes formels correspondant aux logiques supérieures au calcul propositionnel, en particulier à la logique fonctionnelle (également appelée logique des prédicats ou logique des quantificateurs) sont obtenues en enrichissant les algèbres de Boole à l'aide d'opérateurs. La notion générale *d'algèbre de Boole avec opérateurs* a été introduite en 1948 par Jónsson et Tarski ([13]).

([11]) J. B. Rosser et A. R. Turquette, *Many-valued Logics*, Amsterdam, North-Holland Publishing, 1957.

([12]) En ce qui concerne les structures algébriques liées à la logique intuitioniste et à la logique modale, nous mentionnons les travaux suivants : M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics* (*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, vol. 67, 1937-1938, p. 1-25); A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die Topologie* (*Fund. Math.*, vol. 31, 1938, p. 103-134); J. C. C. Mc Kinsey, *A solution of the decision problem for the Lewis systems S 2 and S 4, with an application to topology* (*Journal of symbolic Logic*, vol. 6, 1941, p. 117-134); J. C. C. McKinsey et A. Tarski, *The algebra of topology* [*Ann. Math.*, (2), vol. 45, 1944, p. 141-191]; J. C. C. McKinsey et A. Tarski, *On closed elements in closure algebras* [*Ann. Math.*, (2), vol. 47, 1946, p. 122-162]; J. C. C. McKinsey et A. Tarski, *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting* (*Journal of symbolic Logic*, vol. 13, 1948, p. 1-15); A. Mostowski, *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus* (*Journal of symbolic Logic*, vol. 13, 1948, p. 204-207); L. Ridder, *On the lattice theory of Brouwerian propositional logic* (*Acta Fac. Nat. Univ. Carol.*, Prague n° 189, 1949, 40 pages); L. Henkin, *An algebraic characterization of quantifiers* (*Fund. Math.*, vol. 37, 1950-1951, p. 63-74); H. B. Curry, *Leçons de logique algébrique*, Paris, Gauthier-Villars 1952; H. Rasiowa, *Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis* (*Fund. Math.*, vol. 38, 1952, p. 99-126).

([13]) B. Jónsson et A. Tarski, *Boolean algebras with operators* (*Amer. J. Math.*, vol. 73, 1951, p. 891-939 et vol. 74, 1952, p. 127-162). Un résumé de ces travaux a paru dans le *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 54, 1948, p. 79-80.

Ces algèbres sont donc des algèbres de Boole munies de nouvelles opérations supposées distributives par rapport à l'opération boolienne d'addition. Plus explicitement, une fonction f définie dans une algèbre de Boole B et prenant ses valeurs dans B est un opérateur si pour tout x et tout y dans B, nous avons

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

et une fonction g de plusieurs arguments définie dans B et prenant ses valeurs dans B est un opérateur si g est un opérateur par rapport à chacun de ses arguments pris isolément. Avant la publication des remarquables travaux de Tarski et de Jónsson sur la théorie abstraite des algèbres de Boole avec opérateurs, on connaissait trois exemples intéressants de ces algèbres : 1° les algèbres relationnelles, 2° les algèbres projectives et 3° les algèbres de fermeture.

L'algèbre des relations est assez ancienne. Les premiers travaux remontent à Peirce, et l'on doit à Schröder une première systématisation du calcul des relations dans son Ouvrage *Logik der Relative* publié en 1895. Russell et Whitehead y consacrèrent une portion importante des *Principia Mathematica*. Au début, l'algèbre des relations s'est présentée comme un enrichissement de l'algèbre des classes ou de ce que nous avons appelé l'algèbre de Boole concrète. Ici le mot relation désigne simplement une partie du produit cartésien E^2 d'un ensemble non vide E par lui-même. En plus des opérations propres à l'algèbre des classes, opérations dites booliennes, telles que l'union, l'intersection et la complémentation, il nous faut considérer certaines opérations nouvelles dites peirciennes, telles que la conversion d'une relation et le produit relatif de deux relations. Si R et S sont deux relations données sur l'ensemble E, i. e. si $R\subseteq E^2$ et $S\subseteq E^2$, la converse $\overset{-1}{R}$ de la relation R est définie en posant

$$\overset{-1}{R}=\{(x, y)\mid (y, x)\in R\}$$

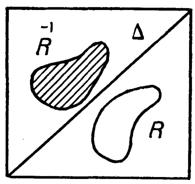
et le produit relatif $R\circ S$ de la relation R par la relation S est défini en posant

$$R\circ S=\{(x, y)\mid (\exists z)((x, z)\in R\,\&\,(z, y)\in S)\}.$$

Géométriquement, $\overset{-1}{R}$ s'obtient simplement en symétricisant R par rapport à la diagonale Δ de E^2 (*fig.* 2), tandis que $R\circ S$ peut s'obtenir par les opérations suivantes (*fig.* 2) : R est porté sur $R^\star$ par rotation de 90° du plan 12 autour de l'axe 1, et S est porté sur $S^\star$ par rotation de 90° du plan 12 autour de l'axe 2; soit $\overline{R}^\star$ le cylindre formé des droites parallèles à l'axe 2 et passant par les points de $R^\star$, et soit $\overline{S}^\star$ le cylindre formé des droites parallèles à l'axe 1 et passant par les points de $S^\star$; la projection sur le plan 12 de l'intersection $\overline{R}^\star\cap\overline{S}^\star$ des cylindres $\overline{R}^\star$ et $\overline{S}^\star$ constitue l'ensemble $R\circ S$.

Par définition, une *algèbre relationnelle concrète* est un ensemble $\mathfrak{A}$ de parties de E^2 formant une algèbre de Boole concrète, fermé par rapport aux opérations de conversion et de produit relatif, et contenant la diagonale Δ (i. e. la relation d'identité).

Contrairement à ce qui s'était produit pour les algèbres de Boole concrètes, le problème de l'axiomatisation des algèbres relationnelles concrètes ne fut abordé qu'assez tard. Sous l'impulsion de TARSKI, McKINSEY réussit en 1940 à donner une axiomatisation adéquate d'une certaine classe d'algèbres relationnelles, notamment des algèbres relationnelles dites complètes et atomistiques, et à prouver un théorème de représentation correspondant ([14]). Il démontra que chacune de ces algèbres relationnelles était isomorphe à une



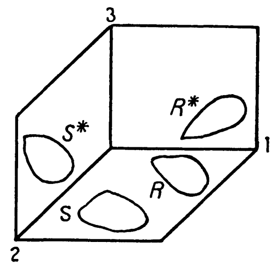


Fig. 2.

algèbre relationnelle concrète, en fait à une algèbre formée précisément par l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E^2. L'année suivante, TARSKI publia le premier système d'axiomes tentant de caractériser les algèbres relationnelles abstraites, et posa dans toute sa généralité le problème de la représentation de ces algèbres ([15]).

Une *algèbre relationnelle* est un système

$$\langle A, +, ., ^{-}, 0, 1, ^{\cup}, |, e\rangle,$$

où $\langle A, +, ., ^{-}, 0, 1\rangle$ forme une algèbre de Boole et où l'opérateur unaire $^{\cup}$, l'opérateur binaire $|$ et l'élément distingué e satisfont aux propriétés suivantes :

1. $$x \mid e = x;$$
2. $$x^{\cup\cup} = x;$$
3. $$(x \mid y)^{\cup} = y^{\cup} \mid x^{\cup};$$
4. $$(x \mid y) \mid z = x \mid (y \mid z);$$
5. $$(x^{\cup} \mid (\overline{x \mid y})) + \overline{y} = \overline{y}.$$

([14]) J. C. C. MC KINSEY, *Postulates for the calculus of binary relations* (*Journal of symbolic Logic*, vol. 5, 1940, p. 85-95).

([15]) A. TARSKI, *On the calculus of relations* (*Journal of symbolic Logic*, vol. 6, 1941, p. 73-89).

De sérieuses difficultés se révélèrent concernant la représentation de ces algèbres, ou encore concernant la possibilité de déduire de ces axiomes toutes les lois valides dans chacune des algèbres relationnelles concrètes. LYNDON, en 1950, réussit à résoudre négativement ce problème en montrant que la classe $\mathcal{R}$ de toutes les algèbres relationnelles représentables ne peut être caractérisée axiomatiquement au moyen d'un système fini ou infini d'identités algébriques ([16]), et TARSKI généralisa par la suite ce résultat en montrant que $\mathcal{R}$ n'était même pas une classe arithmétique ([17]). Quant à la théorie des algèbres relationnelles de degré $n > 2$, elle a été peu étudiée jusqu'à maintenant.

Les algèbres projectives sont d'origine plus récente. La notion formelle d'algèbre projective a été introduite en 1946 par EVERETT et ULAM dans une étude consacrée au calcul fonctionnel du premier ordre du point de vue algébrique ([18]). Une *algèbre projective concrète* est un système

$$\left\langle \mathcal{A},\ \cup,\ \cap,\ \complement,\ \emptyset,\ X \times Y,\ P_x,\ P_y \right\rangle,$$

où $\left\langle \mathfrak{A},\ \cup,\ \cap,\ \complement,\ \emptyset,\ X \times Y \right\rangle$ forme une algèbre de Boole concrète et où la famille $\mathfrak{A}$ des parties de $X \times Y$ est fermée par rapport à deux opérations de projection, l'une P_x sur l'axe X, et l'autre P_y sur l'axe Y, définies en posant pour tout $A \in \mathfrak{A}$:

$$P_x(A) = \{(x, y_0) \mid (\exists y)(y \in Y \& (x, y) \in A)\},$$
$$P_y(B) = \{(x_0, y) \mid (\exists x)(x \in X \& (x, y) \in A)\},$$

où x_0 et y_0 sont les coordonnées d'un point fixe choisi dans $X \times Y$. Les opérations de projection peuvent s'interpréter géométriquement comme suit :

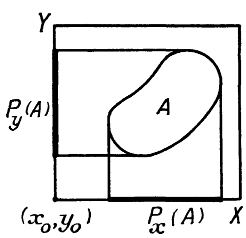


Fig. 3.

([16]) B. JÓNSSON et A. TARSKI, *Representation problems for relation algebras* (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 54, 1948, p. 80); R. C. LYNDON, *The representation of relational algebras* (*Ann. Math.*, vol. 51, 1950, p. 707-729).

([17]) A. TARSKI, *On representable relation algebras, Preliminary report* (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 58, 1952, p. 172).

([18]) C. J. EVERETT et S. ULAM, *Projective algebra*, I (*Amer. J. Math.*, vol. 68, 1946, p. 77-88).

Par abstraction, on obtient la notion d'*algèbre projective* comme algèbre de Boole à laquelle deux opérations unaires sont adjointes satisfaisant un certain nombre de propriétés dont quelques-unes sont assez complexes. En généralisant certains résultats d'Everett et d'Ulam, McKinsey montra en 1948 que toute algèbre projective, au sens abstrait, est isomorphe à une algèbre projective concrète, donc à une certaine classe de relations binaires ([19]).

Une nouvelle axiomatisation de la notion d'algèbre projective, plus simple et se prêtant à une généralisation intéressante, fut découverte par Tarski et son élève Chin ([20]). L'idée essentielle était d'utiliser comme opérations primitives non pas les projections P_x et P_y, mais les antiprojections correspondantes. L'antiprojection de A par rapport à l'axe X, noté A^x, est obtenue en posant

$$A^x = \max \{ B \mid P_x(B) = P_x(A) \}$$

et de même l'antiprojection de A par rapport à l'axe Y, noté A^y, est obtenue en posant

$$A^y = \max \{ B \mid P_y(B) = P_y(A) \}.$$

Inversement, pour obtenir les projections à partir des antiprojections, il suffit de se donner le point fixe $p = (x_0, y_0)$ et de poser

$$P_x(A) = A^x \cap p^y,$$
$$P_y(A) = A^y \cap p^x.$$

La notion d'algèbre projective peut maintenant être définie d'une façon équivalente comme étant une algèbre de Boole où un certain élément p est distingué et où sont définis deux opérateurs unaires C_1 et C_2 satisfaisant les axiomes

1. $C_1(0) = 0, \qquad C_2(0) = 0;$
2. $x . C_1(x) = x, \qquad x . C_2(x) = x;$
3. $C_1(C_1(x).y) = C_1(x).C_1(y), \qquad C_2(C_2(x).y) = C_2(x).C_2(y);$
4. $C_1(C_2(x)) = 1 \quad \text{pour} \quad x \neq 0;$
5. $p = C_1(p).C_2(p);$
6. p est un atome.

Cette façon de considérer une algèbre projective possède plusieurs avantages. En premier lieu, dans la définition de Chin-Tarski, une algèbre projective devient une algèbre de Boole avec opérateurs, et en conséquence, le théorème général de Jónsson-Tarski concernant la représentation de telles

---

([19]) J. C. C. McKinsey. *On the representation of projective algebras* (*Amer. J. Math.*, vol. 70, 1948, p. 375-384).

([20]) Louise Chin et A. Tarski, *Remarks on projective algebras* (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 54, 1948, p. 80-81). *Voir* également les Mémoires de Jónsson et Tarski mentionnés dans la Note ([13]).

algèbres permet de retrouver comme cas particulier le résultat de McKinsey mentionné plus haut. En second lieu, il devient possible de généraliser la notion d'algèbre projective à une dimension arbitraire $n > 2$, ce qui conduira à la notion d'algèbre cylindrique.

Avant de passer à l'étude de cette dernière espèce d'algèbre, disons un mot des algèbres de fermeture qui constituent un exemple simple d'algèbre de Boole avec opérateurs. Formellement, ces structures furent introduites en 1944 par McKinsey et Tarski en vue de développer un calcul algébrique adapté à la topologie ([21]). Une *algèbre de fermeture* est une algèbre de Boole munie d'un seul opérateur unaire C satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. $$C(0) = 0;$$
2. $$C(C(x)) = C(x);$$
3. $$x.C(x) = x;$$
4. $$C(x+y) = C(x) + C(y).$$

Remarquons que ces propriétés sont précisément les propriétés bien connues de l'opération de fermeture introduite par Kuratowski en topologie générale en 1922.

5. **Algèbres cylindriques.** — La notion d'algèbre cylindrique, à laquelle nous avons fait allusion il y a un instant, est un exemple plus récent d'algèbre de Boole avec opérateurs. Cette structure algébrique a été développée par Tarski en collaboration avec ses élèves Fred Thompson et Louise Chin ([22]). Elle joue vis-à-vis du calcul fonctionnel du premier ordre avec égalité le même rôle que la structure d'algèbre de Boole joue vis-à-vis du calcul propositionnel classique.

Soit α un nombre ordinal donné. Le système

$$\left\langle \mathfrak{A}, \cup, \cap, \complement, \emptyset, I^{\alpha}, d_{\eta,\xi}, C_{\eta} \right\rangle,$$

où $\eta, \xi < \alpha$ est appelé une *algèbre cylindrique très concrète de dimension* α si $\left\langle \mathfrak{A}, \cup, \cap, \complement, \emptyset, I^{\alpha} \right\rangle$ est une algèbre de Boole concrète, $\mathfrak{A}$ contient les

---

([21]) J. C. C. McKinsey et A. Tarki, *The algebra of topology* (*Ann. Math.*, vol. 45, 1944, p. 141-191); J. C. C. McKinsey et A. Tarski, *On closed elements in closure algebras* [*Ann. Math.*, (2), vol. 47, 1946, p. 122-162].

([22]) *Voir* les Mémoires déjà cités de Chin et Tarski, note ([20]), et de Jónsson et Tarski, note ([13]), ainsi que : F. B. Thompson, *Some contributions to abstract Algebra and Metamathematics* (*Thèse* présentée en 1951 à l'Université de Californie, Berkeley); A. Tarski et F. B. Thompson, *Some general properties of cylindric algebras*, *Preliminary report* (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 58, 1952, p. 65). Pour un exposé d'ensemble, *voir* la monographie de Henkin citée dans la note ([1]).

éléments $d_{\eta\xi}$, appelés éléments diagonaux, définis en posant

$$d_{\eta\xi} = \{ x \mid x_\eta = x_\xi \;\&\; x \in I^\alpha \},$$

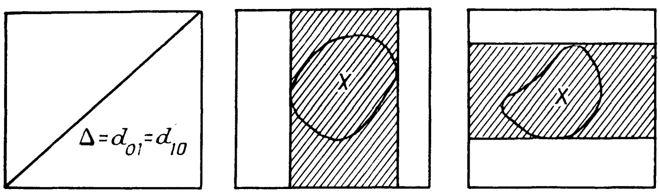
et $\mathfrak{A}$ est fermé par rapport aux opérations C_η, appelées cylindrifications (externes), définies en posant

$$C_\eta(X) = \{ x \mid (\exists\, y)\,(y \in X \;\&\; x_\eta = y_\eta)\}.$$

Par exemple, dans le cas simple où $\alpha = 2$, les éléments diagonaux sont $d_{00} = d_{11} = I^2$ et $d_{01} = d_{10} = \Delta$ la diagonale du carré I^2, tandis que les cylindrifications C_0 et C_1 correspondent à ce que nous avons appelé plus haut des antiprojections :

$$C_0(X) = \{ (x, y) \mid (\exists\, z)\,((x, z) \in X)\},$$
$$C_1(X) = \{ (x, y) \mid (\exists\, z)\,((z, y) \in X)\}.$$

(*Voir* la figure 4 pour l'interprétation géométrique de ces notions.)



$C_0(X)$ $C_1(X)$

Fig. 4.

Pour tout ensemble non vide I, naturellement la famille $\mathfrak{P}(I^\alpha)$ constitue une algèbre cylindrique très concrète de dimension α. Un autre exemple particulièrement simple est la famille $\mathfrak{A} = \left\{ \emptyset, I^2, \Delta, \complement\Delta \right\}$ qui constitue une algèbre cylindrique très concrète de dimension 2; cette algèbre est atomistique, les seuls atomes étant Δ et $\complement\Delta$.

Une notion légèrement plus générale a dû être considérée pour permettre un théorème raisonnable de représentation, la notion d'*algèbre cylindrique concrète de dimension* α. Une telle algèbre s'obtient en remplaçant, dans le cas où $\alpha = 2$, l'unité I^2 par une union J de carrés I_i^2 où les I_i sont des ensembles non vides disjoints, $\mathfrak{A}$ étant alors une famille de parties de J. Géométriquement une algèbre cylindrique concrète de dimension 2 de base

$$J = I_1^2 \cup I_2^2 \cup I_3^2,$$

où I_1, I_2 et I_3 sont disjoints, se représente par le schéma de la figure 5. Le cas général s'obtient d'une façon tout à fait analogue.

Dans le but d'obtenir un système de propriétés dont on pourrait déduire toutes les propriétés qui sont valides dans toute algèbre cylindrique concrète, Tarski et Thompson proposèrent en 1952 une définition d'algèbre cylindrique abstraite ([22]). Un système

$$\langle A, +, ., ^{-}, 0, 1, d_{\eta\xi}, C_{\eta} \rangle,$$

où $\langle A, +, ., ^{-}, 0, 1 \rangle$ forment une algèbre de Boole, où $d_{\eta\xi}$ est un élément distingué de A, pour chaque couple $\eta, \xi < \alpha$, et où C_{η} est une opération unaire définie sur A pour chaque $\eta < \alpha$, est par définition une *algèbre cylindrique de dimension* α, si nous avons pour tout x et tout y dans A et

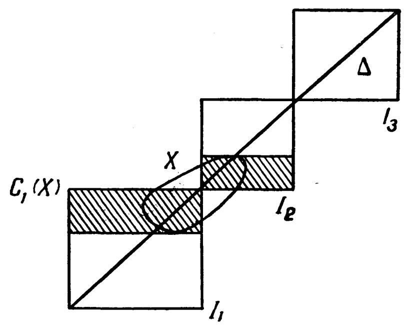


Fig. 5.

pour tout $\eta, \xi, \zeta < \alpha$:

1. $$C_{\eta}(0) = 0;$$
2. $$x . C_{\eta}(x) = x;$$
3. $$C_{\eta}(x . C_{\eta}(y)) = C_{\eta}(x) . C_{\eta}(y);$$
4. $$C_{\eta}(C_{\xi}(x)) = C_{\xi}(C_{\eta}(x));$$
5. $$d_{\eta\eta} = 1;$$
6. $$d_{\eta\xi} = C_{\zeta}(d_{\eta\zeta} . d_{\xi\zeta}) \quad \text{si} \quad \eta, \xi \neq \zeta;$$
7. $$C_{\eta}(d_{\eta\xi} . x) . C_{\eta}(d_{\eta\xi} . \overline{x}) = 0 \quad \text{si} \quad \eta \neq \xi.$$

Le problème de la représentation des algèbres cylindriques par des algèbres cylindriques concrètes s'est avéré complexe. Nous nous contenterons de mentionner quelques-uns des résultats obtenus à cette date.

Le cas suggéré directement par la logique ordinaire des quantificateurs correspond à la dimension ω et à l'imposition d'une certaine restriction qu'on peut énoncer comme suit : pour tout élément x dans A, nous devons avoir $C_{\eta}(x) = x$ sauf pour un nombre fini de η ; une algèbre jouissant de cette dernière propriété est dite localement finie. La classe des algèbres cylindriques localement finies et de dimension $\alpha \geqq \omega$ est représentable, c'est-à-dire toute algèbre de cette espèce est isomorphe à une algèbre cylindrique concrète localement finie de même dimension α ([23]). HENKIN réussit à étendre ce résultat à une classe plus grande d'algèbres cylindriques qu'il appelle algèbres cylindriques de dimension complémentée $\alpha \geqq \omega$ ([24]). Cependant le problème général reste non résolu.

Dans le cas des algèbres cylindriques de dimension finie, quelques résultats partiels sont aussi connus. Il y a de bonnes indications de croire que la solution est en général négative pour $\alpha \geqq 2$ ([25]).

6. Algèbres polyadiques. — Comme nous l'avons remarqué, la notion d'algèbre cylindrique est essentiellement une algébrisation du calcul fonctionnel du premier ordre avec égalité. On peut se demander ce qui résulterait d'une algébrisation du calcul fonctionnel du premier ordre qui n'inclurait pas l'égalité. Ce problème a été élégamment résolu dans une série de Mémoires publiés récemment par HALMOS ([26]). Les structures algébriques qu'il a été ainsi amené à définir et à étudier sont appelées algèbres polyadiques Elles mettent en lumière le phénomène particulier à la logique des quantificateurs sans égalité qu'est la substitution des variables individuelles.

La notion générale d'algèbre polyadique est passablement complexe, et nous nous contenterons, pour terminer cet exposé, de considérer le cas particulier de cette algèbre qui correspond au calcul fonctionnel monadique et qui est appelée pour cette raison algèbre monadique. La structure concrète qui sert de modèle à cette notion est l'*algèbre monadique fonctionnelle.* Soit X un ensemble non vide et soit $\mathcal{B} = \langle \mathfrak{A}, \cup, \cap, \complement, \emptyset, E \rangle$ une algèbre

([23]) A. TARSKI, *A representation theorem for cylindrical algebras* (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 58, 1952, p. 65-66).

([25]) L. HENKIN, *The representation theorem for cylindrical algebras* (*Mathematical Interpretations of Formal Systems*, Amsterdam, North-Holland, 1956, p. 85-97).

([25]) L. HENKIN, *Cylindrical algebras of dimension* 2 (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 63, 1957, p. 26).

([26]) Paul R. HALMOS *Polyadic Boolean algebras* (*Proc. nat. Acad. Sc.*, vol. 40, 1954, p. 296-301); *Algebraic logic*, I, *Monadic Boolean algebras* (*Comp. Math.*, vol. 12, 1955, p. 217-249); *Algebraic logic*, II, *Homogeneous locally finite polyadic Boolean algebras of infinite degree* (*Fund. Math.*, vol. 43, 1957, p. 255-325); *Algebraic logic*, III, *Predicates, terms and operations in polyadic algebras* (*Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 83, 1956, p. 430-470).

Pour une vue d'ensemble, nous renvoyons à l'excellent article d'exposition de HALMOS, *The basic concepts of algebraic logic* (*Amer. math. Monthly*. vol. 63, 1956, p. 363-387).

Les relations entre les algèbres cylindriques et les algèbres polyadiques ont été précisées dans l'article de B. A. GALLER, *Cylindrical and palyadic algebras* (*Proc. Amer. math. Soc.*, vol. 8, 1957, p. 176-183).

Signalons comme autre essai d'algébrisation du calcul fonctionnel du premier ordre la notion d'algèbre de Boole tensorielle introduite par F. I. MAUTNER dans son Mémoire, *An extension of Klein's Erlanger program : Logic as invariant-theory* (*Amer. J. Math.*, vol. 68, 1946, p. 345-384).

de Boole concrète. L'ensemble $\mathcal{F}$ des applications p de X dans $\mathcal{B}$ forme une algèbre de Boole, appelée algèbre fonctionnelle, par rapport aux opérations induites :

$$(p+q)(x) = p(x) \cup q(x),$$
$$(p.q)(x) = p(x) \cap q(x),$$
$$\overline{p}(x) = \complement(p(x)),$$

le zéro et l'unité de $\mathcal{F}$ étant respectivement la fonction constamment égale à $\emptyset$ et la fonction constamment égale à E. Une sous-algèbre $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}$ sera une *algèbre monadique fonctionnelle*, si
(1) pour toute application $p \in \mathcal{F}^*$ nous avons

$$\bigcup_{x \in X} p(x) \in \mathfrak{A}$$

et
(2) pour toute application $p \in \mathcal{F}^*$, l'application $\exists p$ définie en posant

$$(\exists p)(x) = \bigcup_{x \in X} p(x)$$

appartient à $\mathcal{F}^*$. La notion abstraite d'algèbre monadique se dégage du cas fonctionnel en choisissant quelques propriétés de l'opérateur $\exists$ comme propriétés caractéristiques. Par définition, un système $\langle A, +, ., ^-, 0, 1, \exists \rangle$ forme une *algèbre monadique* si $\langle A, +, ., ^-, 0, 1 \rangle$ est une algèbre de Boole et si $\exists$ est une opération définie sur A jouissant des cinq propriétés suivantes :

1. $\exists 0 = 0;$
2. $\exists(x+y) = \exists x + \exists y;$
3. $x. \exists x = x;$
4. $\exists \exists x = \exists x;$
5. $\exists \overline{\exists x} = \overline{\exists x}.$

Il convient de remarquer que les quatre premiers axiomes sont précisément les axiomes caractérisant un opérateur de fermeture. En s'appuyant sur les travaux de Stone et de Henkin, il est possible de montrer que toute algèbre monadique est isomorphe à une algèbre monadique fonctionnelle.

7. Logique algébrique. — Le courant d'algébrisation de la logique qui se poursuit depuis quelques années constitue en quelque sorte un retour aux traditions antérieures. Dès les débuts, en effet, avec Boole et Schröder, la logique avait été dominée par l'algèbre. Par la suite, l'influence prépondérante de la logique russellienne a masqué ce point de vue initial. Aujourd'hui, grâce aux efforts d'un grand nombre de logiciens dont, en particulier, TARSKI qui domine tout ce courant, le point de vue algébrique semble définitivement rétabli.

L'application de l'algèbre moderne en logique et, en particulier, cette espèce de traduction que nous avons étudiée de systèmes logistiques par des structures algébriques correspondantes, ont permis d'aborder la solution de plusieurs problèmes proprement logiques ainsi que de développer certaines théories déjà existantes. L'avenir réserve sans doute d'autres succès à cette méthode. Signalons l'une des ambitions de la logique algébrique. Jusqu'à cette date le célèbre théorème de GÖDEL concernant l'existence de propositions indécidables dans tout système logique consistant et suffisamment riche n'a pu être démontré par des méthodes directes et purement algébriques. Aujourd'hui comme avant, l'instrument fondamental dans ces questions d'indécidabilité reste la théorie des fonctions récursives. Certains logiciens, fervents protagonistes de la logique algébrique, espèrent qu'un jour ce phénomène d'indécidabilité sera lui aussi réductible aux méthodes de l'algèbre.

En terminant, remarquons que l'algèbre a aussi trouvé son profit dans cette liaison renouée avec la logique. D'une part, l'application de méthodes métamathématiques a permis de démontrer d'une manière nouvelle, parfois plus simple, des résultats connus des algébristes, de généraliser ces résultats et de mettre en lumière des relations inattendues entre eux. D'autre part, la recherche et l'étude systématique de structures algébriques apparentées aux systèmes logistiques ont enrichi l'algèbre et ont souvent mis à la disposition des algébristes des moyens nouveaux d'éclairer et de mieux comprendre certaines parties de leur territoire.

Maurice L'ABBÉ,
Université de Montréal.
Boîte postale 6128.
Montréal, Québec (Canada).