

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEXANDER GROTHENDIECK

Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__1_0

© Bulletin de la S. M. F., 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Bull. Soc. Math. France,
84, 1956, p. 1 à 7.

**THÉORÈMES DE FINITUDE
POUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX (*)**;

PAR A. GROTHENDIECK.

Soit F un faisceau sur l'espace paracompact X , on désigne par $\Gamma(U, F)$ le groupe des sections de F sur une partie U de X . Si \mathbf{U} est un recouvrement de X , $C(\mathbf{U}, F)$ désigne le groupe des cochaînes de \mathbf{U} à coefficients dans F , somme directe des $C^p(\mathbf{U}, F)$ formés des cochaînes homogènes de degré p . C'est un groupe gradué à dérivation, d'où un groupe gradué de cohomologie

$$H(C(\mathbf{U}, F)) = \sum_p H^p(C(\mathbf{U}, F)) = \sum_p Z(C^p(\mathbf{U}, F)) / \delta C^{p-1}(\mathbf{U}, F)$$

(le signe Z indique qu'on prend le sous-groupe formé des cycles). Si \mathbf{V} est un recouvrement plus fin que \mathbf{U} , on a des homomorphismes permis bien connus $C(\mathbf{U}, F) \rightarrow C(\mathbf{V}, F)$ donnant tous naissance au même homomorphisme $H(C(\mathbf{U}, F)) \rightarrow H(C(\mathbf{V}, F))$: on les obtient en associant à tout $V \in \mathbf{V}$ un $U \in \mathbf{U}$ qui le contient. La limite inductive des $H(C(\mathbf{U}, F))$, quand \mathbf{U} parcourt les recouvrements ouverts de X supposé paracompact, s'identifie au groupe de cohomologie $H(X, F)$ de X à coefficients dans F .

Si maintenant F est un complexe de faisceaux (« faisceau gradué à dérivation »)

$$(1) \quad F : 0 \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots,$$

on pose

$$H(\Gamma(X, F)) = \sum_p H^p(\Gamma(X, F)) = \sum_p Z(\Gamma(X, F_p)) / d\Gamma(X, F_{p-1}).$$

(*) Le présent papier a été écrit en 1953, inspiré par le théorème de Cartan-Serre cité dans la bibliographie. Il avait été soumis aux *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, mais retiré à cause des longs délais de publication.

Supposons que (1) soit exacte pour les degrés > 0 , alors on peut construire des homomorphismes canoniques

$$H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N),$$

où N est le noyau de $F_0 \rightarrow F_1$ (voir Séminaire Cartan). Cet homomorphisme peut s'obtenir par la méthode qui suit (méthode de Weil). Pour tout recouvrement ouvert \mathbf{U} de X , soit $E_{\mathbf{U}}''$ le sous-groupe de

$$C^0(U, F_{p-1}) \times C^1(U, F_{p-2}) \times \dots \times C^{p-1}(U, F_0)$$

formé des systèmes w de cochaines $w^{p-1}(S_0), \dots, w^0(S_{p-1})$ (les S_i sont des simplexes génériques de dimensions i du nerf du recouvrement \mathbf{U}) tels que $w^h(\delta S_{p-h}) = dw^{h-1}(S_{p-h})$ dans $\text{star}(S_{p-h})$, pour $h = p-1, \dots, 1$. Alors il existe une $w^p \in Z(\Gamma(X, F_p))$ et une seule telle que $w^p = dw^{p-1}(S_0)$ dans chaque $\text{star}(S_0)$, soit $w^p = u(w)$; et $c^p(S_p) = w^0(\delta S_p)$ est une p -cochaîne à coefficients dans $N = Z(F_0)$, et même un cocycle, soit $c^p = v(w)$. On a donc deux homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & E_{\mathbf{U}}'' & \\ u \swarrow & & \searrow v \\ Z(\Gamma(X, F_p)) & & Z(C^p(U, N)). \end{array}$$

On montre (1) : *a.* la réunion des images par u des $E_{\mathbf{U}}''$, quand \mathbf{U} varie, est $Z(\Gamma(X, F_p))$ tout entier; *b.* si $w \in E_{\mathbf{U}}''$ est tel que $u(w)$ ait une image nulle dans $H^p(\Gamma(X, F))$, alors $v(w)$ définit un élément de $H^p(X, N)$ qui est nul. Il en résulte aussitôt une application naturelle $H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N)$, qui est l'application cherchée. Rappelons que cette application est un isomorphisme *sur* si les F_i sont fins, ou si seulement F est homotopiquement fin, etc.

Bien entendu, tout ce qui précède serait valable en introduisant des «familles Φ » avec les adaptations habituelles; nous nous dispensons par la suite d'envisager ce cas plus général. Des raisonnements élémentaires permettent de prouver le

THÉORÈME 1. — Soit F le complexe (1) de faisceaux (sur l'espace paracompact X) acyclique pour les degrés > 0 . Soit p un entier > 0 tel que, pour $1 \leq q \leq p$, tout $x \in X$ et tout voisinage U de x , existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'application naturelle $H^q(\Gamma(U, F)) \rightarrow H^q(\Gamma(V, F))$ soit nulle. Alors il existe des recouvrements ouverts \mathbf{U} de X localement finis aussi fins qu'on veut tels que l'application $E_{\mathbf{U}}'' \rightarrow Z(\Gamma(X, F_p))$ soit sur, et pour un tel \mathbf{U} on peut trouver un recouvrement ouvert \mathbf{V} plus fin,

(1) Par des raisonnements élémentaires calqués sur ceux de Weil.

tel que toute $w \in E_{\mathbf{U}}^p$ ayant une image nulle dans $H^p(\Gamma(X, F))$, ait une image nulle par l'application composée $E_{\mathbf{U}}^p \rightarrow H^p(C(\mathbf{U}, N)) \rightarrow H^p(C(\mathbf{V}, N))$ (N désignant encore le faisceau noyau de $F_0 \rightarrow F_1$). Par suite, l'application naturelle $H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N)$ est une application composée

$$H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(C(V, N)) \rightarrow H^p(X, N).$$

COROLLAIRE 1. — Si $H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N)$ est sur, alors pour \mathbf{V} recouvrement ouvert localement fini assez fin, $H^p(\mathbf{V}, N) \rightarrow H^p(X, N)$ est sur.

De même, avec les notations du théorème 1, si $H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N)$ est biunivoque, alors tout élément de $Z(C^p(\mathbf{U}, N))$ provenant de $E_{\mathbf{U}}^p$ et dont l'image dans $H^p(X, N)$ est nulle, a déjà une image dans $H^p(C^p(\mathbf{V}, N))$ nulle. Si l'on part d'un faisceau arbitraire N sur X , il peut toujours être considéré comme un $H^0(F)$, où F est un faisceau à dérivation fin, acyclique pour les dimensions > 0 ; l'hypothèse du théorème 1 signifie alors que pour tout q , avec $1 \leq q \leq p$, tout $x \in X$ et tout voisinage U de x , existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'application canonique $H^q(U, N) \rightarrow H^q(V, N)$ soit nulle. Nous dirons alors que N est *calculable* en degrés $\leq p$. Du théorème 1 résulte aussitôt que si N est calculable en degrés $\leq p$, alors : *a.* pour tout recouvrement ouvert \mathbf{U} assez fin de X , $H^p(C(\mathbf{U}, N)) \rightarrow H^p(X, N)$ est une application sur; *b.* pour tout recouvrement ouvert \mathbf{U} de X en existe un autre \mathbf{V} plus fin tel que tout élément de $H^p(C(\mathbf{U}, N))$ ayant une image nulle dans $H^p(X, N)$, a déjà une image nulle dans $H^p(C(\mathbf{V}, N))$ [on pourrait dire que la limite inductive des $H^p(C(\mathbf{U}, N))$ est « calculable », pour exprimer *a* et *b*]. Cela signifie aussi que :

COROLLAIRE 2. — Soit N un faisceau calculable sur X . Alors il existe un recouvrement ouvert \mathbf{U} sur X et un recouvrement ouvert plus fin \mathbf{V} tel que $H(X, N)$ s'identifie exactement au quotient de $H^p(C(\mathbf{U}, N))$ par le noyau de

$$H^p(C(\mathbf{U}, N)) \rightarrow H^p(C(\mathbf{V}, N)).$$

Bien entendu, on peut supposer \mathbf{U} aussi fin qu'on veut, et \mathbf{U} et \mathbf{V} localement finis. Le corollaire 2 dispense de prendre une limite inductive pour calculer $H^p(X, N)$. Si, par exemple, X est HLC, il est immédiat que le faisceau des cochaines singulières réduites de X est « calculable », d'où, compte tenu du corollaire 2, le classique

COROLLAIRE 3. — Soit X un espace compact HLC, A un anneau quelconque, alors les $H^p(X, A)$ sont des A -modules de type fini.

Un faisceau \mathbf{N} d'espaces vectoriels (réels ou complexes) sur X est dit *faisceau vectoriel topologique*, si les $\Gamma(U, N)$, espaces de sections sur les

ouverts U , sont munis de topologies d'EVT de telle façon que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U , la topologie de $\Gamma(U, N)$ soit la moins fine des topologies rendant continues les $\Gamma(U, N) \rightarrow \Gamma(U_i, N)$. On dit que N est un faisceau du type (F) si les espaces de sections sur les ouverts sont du type (F) . N est dit *compact*, si pour tout ouvert V relativement compact dans un ouvert U , l'application $\Gamma(U, N) \rightarrow \Gamma(V, N)$ est compacte (c'est-à-dire transforme un voisinage convenable de 0 en un ensemble relativement compact). La notion n'a d'intérêt que si X est localement compact; alors les $\Gamma(U, N)$ sont des espaces de Schwartz (cf. bibliographie) complets; si de plus U est dénombrable à l'infini, alors $\Gamma(U, N)$ est un espace (F) . Ceci posé :

THÉORÈME 2. — *Soit N un faisceau compact sur l'espace compact X . Si N est « calculable » pour les degrés $\leq p$, alors $H^p(X, N)$ est de dimension finie.*

En effet, en vertu du théorème 1, corollaire 2, on peut trouver un recouvrement ouvert fini \mathbf{U} de X tel que $H^p(C(\mathbf{U}, N)) \rightarrow H^p(X, N)$ soit sur, soit \mathbf{V} un recouvrement ouvert fini subordonné (c'est-à-dire le recouvrement formé des adhérences des $V \in \mathbf{V}$ est plus fin que U), soit enfin \mathbf{W} un recouvrement ouvert fini plus fin que \mathbf{V} , et tel que $H^p(X, N)$ s'identifie au quotient de $H^p(C(\mathbf{V}, N))$ par le noyau de $H^p(C(\mathbf{V}, N)) \rightarrow H^p(C(\mathbf{W}, N))$. On a des applications linéaires

$$\begin{array}{ccccc} & & & & C^{p-1}(\mathbf{W}, N) \\ & & & & \downarrow d \\ Z(C^p(\mathbf{U}, N)) & \xrightarrow{\alpha} & Z(C^p(\mathbf{V}, N)) & \xrightarrow{\beta} & Z(C^p(\mathbf{W}, N)) \end{array}$$

et $\text{Im } \alpha + \beta^{-1}(\text{Im } d) = Z(C^p(\mathbf{V}, N))$. Or les espaces qui interviennent dans le diagramme sont des espaces (F) ⁽²⁾, les applications linéaires α, β, d sont continues, α est compacte, et $\beta^{-1}(\text{Im } d)$ peut être regardé comme l'image d'un espace (F) par une application linéaire continue dans $Z(C^p(\mathbf{V}, N))$, savoir l'espace H des

$$(z, c) \in Z(C^p(\mathbf{V}, N)) \times C^{p-1}(\mathbf{W}, N)$$

tels que $\beta z = d(c)$. Un théorème de compacité de L. SCHWARTZ permet alors de conclure que $\beta^{-1}(\text{Im } d)$ est de codimension finie dans $Z(C^p(\mathbf{V}, N))$, c'est-à-dire que

$$H^p(X, N) = Z(C^p(\mathbf{V}, N)) / \beta^{-1}(\text{Im } d)$$

est de dimension finie. On retrouve un résultat de CARTAN-SERRE :

(2) On peut le supposer même si X n'est pas métrisable, en prenant U, V, W convenablement : on se sert du fait immédiat que tout point de X admet un système fondamental de voisinages ouverts qui sont dénombrables à l'infini.

COROLLAIRE. — *Les espaces de cohomologie d'une variété holomorphe compacte, à coefficients dans un faisceau analytique cohérent, sont de dimension finie.*

En effet, la théorie des faisceaux analytiques cohérents permet de voir que ce sont là des faisceaux (F) compacts, et calculables (il suffit de connaître les théorèmes globaux A et B de CARTAN-SERRE pour les polydisques).

Dans le théorème 2, il est essentiel de spécifier que F est calculable. Ainsi, si X est un compact localement connexe, le faisceau des germes de fonctions réelles localement constantes est un faisceau compact pour la topologie de la convergence compacte, néanmoins les espaces $H^p(X, R)$ pour $p \geq 1$ peuvent être de dimension infinie.

THÉORÈME 3. — *Soit X un espace compact métrisable, F un faisceau vectoriel à dérivation sur X ,*

$$F : 0 \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_p \rightarrow F_{p+1} \rightarrow \dots,$$

un complexe de faisceaux acyclique en dimensions > 0 . On suppose les F_q avec $q \leq p$ du type (F), les $F_{q-1} \rightarrow F_q$ continus (c'est-à-dire induisant des applications continues des espaces de sections sur un ouvert quelconque U) et pour tout ouvert U , le noyau de $\Gamma(U, F_p) \rightarrow \Gamma(U, F_{p+1})$ fermé ⁽³⁾. Si le faisceau $N = Z(F_0)$ est compact, et si l'application canonique $H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N)$ est sur, alors $H^p(X, N)$ est de dimension finie.

Dans le cas où les F_i sont fins pour $i \leq p$, il suffit en vertu du théorème 2 de prouver que N est calculable pour les degrés $\leq p$, ce qui résulte aussitôt du lemme suivant, intéressant en lui-même :

LEMME 1. — *Soient F, Z deux faisceaux du type (F) sur un espace X , soit $d : F \rightarrow Z$ un homomorphisme de faisceau vectoriel topologique, soit $x \in X$ tel que $d_x : F_x \rightarrow Z_x$ soit sur. Supposons que x admette un système fondamental dénombrable de voisinages. Alors pour tout voisinage U de x , il en existe un autre $V \subset U$ tel que pour $z \in \Gamma(U, Z)$ existe toujours $g \in \Gamma(V, F)$ telle que $z = dg$ sur V .*

Soit, en effet, (V_n) une suite fondamentale de voisinages de x contenus dans U , soit α_n l'application canonique $\Gamma(U, Z) \rightarrow \Gamma(V_n, Z)$; par hypothèse on aura

$$\Gamma(U, Z) = \bigcup \alpha_n^{-1} d(\Gamma(V_n, F)),$$

⁽³⁾ Il suffit pour ceci que F_{p+1} soit aussi un faisceau vectoriel topologique séparé et $F_p \rightarrow F_{p+1}$ continu.

or les sous-espaces envisagés de $\Gamma(U, Z)$ peuvent être regardés comme des images d'espaces du type (F) par des applications linéaires continues, donc (BANACH) sont maigres ou identiques à $\Gamma(U, Z)$. Comme l'un au moins n'est pas maigre (BAIRE), on aura

$$\Gamma(U, Z) = \alpha_n^{-1} d(\Gamma(V_n, G))$$

pour n convenable.

C. Q. F. D.

Pour prouver le théorème 3 dans le cas général, on conjugue le corollaire 1 du théorème 1 (qui s'applique grâce au lemme 1) et le lemme suivant (qui contient le théorème 2 quand X est métrisable) :

LEMME 2. — Soit \mathbf{N} un faisceau compact sur l'espace compact métrisable X , supposons que pour un entier $p > 0$, il existe un recouvrement ouvert \mathbf{U} de X tel que $H^p(C(U, N)) \rightarrow H^p(X, N)$ soit sur. Alors $H^p(X, N)$ est de dimension finie.

En effet, on peut supposer \mathbf{U} fini; soit \mathbf{V} un recouvrement ouvert fini subordonné à \mathbf{U} , et soit (\mathbf{V}_n) une suite fondamentale croissante de recouvrements ouverts finis plus fins que \mathbf{V} . On a des applications linéaires continues

$$Z(C^p(\mathbf{U}, N)) \xrightarrow{\alpha} Z(C^p(\mathbf{V}, N)) \xrightarrow{\beta_n} Z(C^p(\mathbf{V}_n, N))$$

$\begin{array}{c} C^{p-1}(V_n, N) \\ \downarrow d_n \end{array}$

et l'hypothèse sur \mathbf{U} implique

$$\text{Im } \alpha + \bigcup \beta_n^{-1} \text{Im}(d_n) = Z(C^p(\mathbf{V}, N)).$$

On en conclut encore qu'il existe n tel que

$$\text{Im } \alpha + \beta_n^{-1}(\text{Im } d_n) = Z(C^p(V, N)),$$

d'où résulte, par le théorème de compacité de Schwartz déjà utilisé, (α étant application compacte) que $\beta_n^{-1}(\text{Im } d_n)$ est de codimension finie dans $Z(C^p(\mathbf{V}, N))$, c'est-à-dire que $H^p(X, N)$ est de dimension finie.

Appliquant le théorème 3 avec $p = 1$, on trouve le

COROLLAIRE. — Soient G, H deux faisceaux vectoriels topologiques du type (F) sur un espace compact métrisable X , soit d un homomorphisme de faisceau vectoriel topologique $G \rightarrow H$. On suppose que le noyau N de d est un faisceau compact, que pour tout ouvert U , le sous-espace $Z(U)$ des éléments de $\Gamma(U, H)$ qui sont localement dans l'image de G est fermé, enfin G fini. Alors $Z(X)/d(\Gamma(X, G)) = H^1(X, N)$ est de dimension finie.

Ce corollaire s'applique en particulier aux opérateurs différentiels elliptiques sur une variété ind. diff. compacte. (Noter qu'il suffit de vérifier l'hypothèse sur U pour U petit.)

BIBLIOGRAPHIE.

H. CARTAN, Séminaire Cartan, 1950-1951.

H. CARTAN, Séminaire Cartan, 1951-1952.

J. P. SERRE et H. Cartan, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 128.

L. SCHWARTZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2472.

A. WEIL, *Comm. Math. Helv.*, t. 26, 1952, p. 119.

A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces \mathcal{F} et $\mathcal{L}\mathcal{F}$* , *Summa Brasiliensis Mathematicæ*, Vol. 3, 1954.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1956.)
