

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES-LOUIS LIONS

**Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 83 (1955), p. 225-250

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1955\\_\\_83\\_\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__225_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES RELATIFS A DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ELLIPTIQUES;

PAR J. L. LIONS.

**Introduction.** — Le but de cet article est l'étude de quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques.

Le paragraphe I donne un théorème général [généralisation de Schwartz [3] ou Lions [1] (chap. I, § 1)].

On donne aux paragraphes 2 et 3 quelques applications de ce théorème.

Le paragraphe II résout, en utilisant des notions introduites dans Deny-Lions [1], des problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques du

deuxième ordre, du type  $\Lambda = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$  (alors que la théorie donnée dans

Schwartz [3] ou Lions [1] n'était applicable qu'à des opérateurs du type  $\Lambda + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ).

Dans le paragraphe III, on résout pour des ouverts *bornés* particuliers des problèmes aux limites laissés en suspens dans Lions [1] (chap. I, § 2), relativement à l'opérateur  $\Delta^2 + 1$ .

Il y a évidemment d'autres applications possibles du théorème général du paragraphe I; on ne les a pas traitées ici, pour essayer de mieux dégager l'essentiel. On a aussi laissé de côté les questions de stabilité et les applications aux problèmes mixtes, questions que l'on peut traiter comme dans Lions [1].

Les résultats du paragraphe II ont été annoncés dans Lions [2].

### I. — Un théorème préliminaire.

**1. Notations.** — On désigne par  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$  <sup>(1)</sup>, par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ , à support compact dans  $\Omega$ , muni de la topologie habituelle (cf. Schwartz [1]). On désigne par  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , l'espace dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , espace des distributions sur  $\Omega$ .

On considère un espace  $V$  de distributions sur  $\Omega$ ; cet espace est muni d'une

---

(1) Tout ceci se généralise sans difficulté nouvelle, par la méthode de Schwartz-Lions [1] au cas de certains espaces fibrés, en particulier au cas d'espaces de Riemann, et pour des systèmes différentiels.

structure préhilbertienne séparée ou non, c'est-à-dire, d'une forme sesquilineaire <sup>(2)</sup>  $u, v \rightarrow ((u, v))_1$ , qui vérifie

$$(1.1) \quad ((u, v))_1 = \overline{((v, u))_1} \quad \text{pour tout } u, v \in V \quad \text{et} \quad ((u, u))_1 \geq 0.$$

On suppose que  $\mathcal{O}(\Omega)$  est contenu dans  $V$ , avec une topologie plus fine que celle induite par  $V$  [la topologie de  $V$  est définie par  $((u, v))_1$ ]; on suppose que si  $T$  est dans  $V$ , la distribution complexe conjuguée  $\bar{T}$  est aussi dans  $V$ .

On donne maintenant sur  $V \times V$  une deuxième forme sesquilineaire  $u, v \rightarrow ((u, v))_2$ , que l'on suppose continue et hermitienne [c'est-à-dire que  $((u, v))_2 = \overline{((v, u))_2}$  pour tout  $u, v \in V$ ].

On pose

$$(1.2) \quad ((u, v)) = ((u, v))_1 + i((u, v))_2.$$

La forme sesquilineaire  $u, v \rightarrow ((u, v))$  est continue sur  $V \times V$ , donc il existe une constante  $C$  telle que

$$|((u, v))|^2 \leq C((u, u))_1((v, v))_1 \quad \text{pour tout } u, v \in V.$$

On va maintenant introduire la structure pré-hilbertienne séparée associée à  $V$  et  $((u, v))_1$ .

Pour cela, on introduit l'espace  $Z$  des éléments  $z$  de  $V$  tels que

$$(1.3) \quad ((z, z))_1 = 0.$$

Posons

$$(1.4) \quad \tilde{V} = V/Z;$$

si  $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ , et si  $u$  est quelconque dans  $\tilde{u}$ ,  $v$  quelconque dans  $\tilde{v}$ , on peut poser

$$(1.5) \quad ((\tilde{u}, \tilde{v}))_1 = ((u, v))_1,$$

ce qui munit  $\tilde{V}$  d'une structure préhilbertienne séparée. On fait maintenant l'hypothèse fondamentale suivante :

(H) L'espace  $\tilde{V}$  est un espace de Hilbert pour  $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$ .

Comme  $((z, v))_2 = 0$ , quel que soit  $z$  dans  $Z$  et  $v$  dans  $V$ , on peut poser

$$(1.6) \quad ((\tilde{u}, \tilde{v})) = ((u, v)), \quad u \in \tilde{u}, \quad v \in \tilde{v};$$

ce qui définit sur  $\tilde{V} \times \tilde{V}$  une forme sesquilineaire continue.

Voici un lemme immédiat qui nous sera utile :

LEMME 1.1. — On suppose que (H) a lieu; Soit  $\tilde{v} \rightarrow X(\tilde{v})$  une forme semi-linéaire continue sur  $\tilde{V}$ . Il existe dans  $\tilde{V}$  un élément  $\tilde{u}$  et un seul tel que

$$(1.7) \quad X(\tilde{v}) = ((\tilde{u}, \tilde{v})) \quad \text{pour tout } \tilde{v} \text{ dans } \tilde{V}.$$

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire  $((u, v))$  dépend linéairement de  $u$ , et semi-linéairement de  $v$  [donc  $((u, \lambda v)) = \bar{\lambda}((u, v))$ ].

*Démonstration.* — Puisque  $\tilde{V}$  est un espace de Hilbert pour la structure  $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$  il existe un élément  $\tilde{\xi}$  dans  $\tilde{V}$ , et un seul, tel que

$$X(\tilde{v}) = ((\tilde{\xi}, \tilde{v}))_1 \text{ pour tout } \tilde{v} \in \tilde{V}$$

[ce qui montre le lemme si  $((u, v))$  est hermitienne].

De même, il existe  $H\tilde{u}$  unique dans  $\tilde{V}$  tel que

$$((\tilde{u}, \tilde{v}))_2 = ((H\tilde{u}, \tilde{v}))_1 \text{ pour tout } \tilde{v} \in \tilde{V},$$

et ceci définit  $H$ , opérateur linéaire continu de  $\tilde{V}$  dans lui-même, et hermitien pour la structure  $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$ .

L'équation (1.7) équivaut alors à

$$(1 + iH)\tilde{u} = \tilde{\xi},$$

équation qui admet une solution unique

$$\tilde{u} = (1 + iH)^{-1}\tilde{\xi}.$$

C. Q. F. D.

**2. Problèmes aux limites.** — Soit  $Q$  un espace vectoriel topologique localement convexe, avec

$$(2.1) \quad \mathcal{O}(\Omega) \subset Q \subset \mathcal{O}'(\Omega) \quad (3),$$

$\mathcal{O}(\Omega)$  étant dense dans  $Q$ .

L'espace dual de  $Q$ , soit  $Q'$ , peut être identifié à un sous-espace de  $\mathcal{O}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{O}(\Omega)$  étant faiblement dense dans  $Q'$  :

$$(2.2) \quad \mathcal{O}(\Omega) \subset Q' \subset \mathcal{O}'(\Omega).$$

On suppose que si  $T$  est dans  $Q$  (resp.  $Q'$ ) alors  $\bar{T}$  est dans  $Q$  (resp.  $Q'$ ).

On donne un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{Z}$  de  $Q'$ , de dimension finie, tel que si  $\zeta \in \mathfrak{Z}$ , alors  $\bar{\zeta}$  est dans  $\mathfrak{Z}$ .

On désigne par  $Q_{\mathfrak{Z}}$  (resp.  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ ) le sous-espace vectoriel fermé de  $Q$  [resp.  $\mathcal{O}(\Omega)$ ] formé des  $f$  tels que

$$(2.3) \quad \langle f, \bar{\zeta} \rangle = 0 \text{ pour tout } \zeta \in \mathfrak{Z}$$

(le crochet désigne la dualité entre  $Q$  et  $Q'$ ).

On donne maintenant deux opérateurs linéaires  $A$  et  $B$ , de la façon suivante :

$$(2.4) \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}; V) \quad (4),$$

$$(2.5) \quad B = \text{opérateur linéaire de } V \text{ dans } Q_{\mathfrak{Z}}, \text{ continu ou non.}$$

(3)  $E \subset F$  signifie que  $E$  est contenu dans  $F$  avec une topologie plus fine.

(4) De façon générale, on désigne par  $\mathcal{L}(E; F)$  l'espace des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

On suppose que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ , on a

$$(2.6) \quad \text{BA}\varphi = \varphi.$$

On désigne par  $Q'_0$  l'espace des éléments  $f$  de  $Q'$  tels que

$$(2.7) \quad \langle f, \overline{Bz} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z.$$

Si  $f$  est donné dans  $Q'_0$ , on a

$$\langle f, \overline{B(v+z)} \rangle = \langle f, \overline{Bv} \rangle,$$

donc  $\langle f, \overline{Bv} \rangle$  ne dépend que de  $\tilde{v}$ . On fera alors l'hypothèse suivante :

$$(2.8) \quad \text{la forme } \tilde{v} \rightarrow \langle f, \overline{Bv} \rangle, f \in Q'_0, \text{ est continue sur } \tilde{V}.$$

On donne maintenant un opérateur  $\Lambda$  (qui sera un opérateur différentiel dans les applications) :

$$(2.9) \quad \Lambda \in \mathcal{L}(V; \mathcal{O}'(\Omega)),$$

qui est supposé vérifier

$$(2.10) \quad ((u, \Lambda\varphi)) = \langle \Lambda u, \overline{\varphi} \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}.$$

*Remarque 2.1.* — Si  $\mathfrak{Z} = \{0\}$ , alors  $\Lambda$  est défini par la forme  $((u, v))$  et  $\Lambda$ ; en effet,  $\varphi \rightarrow ((u, \Lambda\varphi))$  est alors une forme semi-linéaire continue sur  $\mathcal{O}(\Omega)$ , donc du type  $\langle \Lambda u, \overline{\varphi} \rangle$ , ce qui définit  $\Lambda u \in \mathcal{O}'(\Omega)$ , et  $\Lambda$ .

**LEMME 2.1.** — *L'opérateur  $\Lambda$  applique  $Z$  dans  $\tilde{\mathfrak{Z}}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $z \in Z$ ; alors  $((z, \Lambda\varphi)) = 0$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ , donc  $\langle \Lambda z, \overline{\varphi} \rangle = 0$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ , c'est-à-dire que  $\Lambda z$  est dans  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})^0$  ensemble polaire de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$ . Mais  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} = \tilde{\mathfrak{Z}}^0$  par définition, donc  $\Lambda z \in \tilde{\mathfrak{Z}}^{00} =$  bipolaire de  $\tilde{\mathfrak{Z}}$ . Comme  $\tilde{\mathfrak{Z}}$  est de dimension finie, il est fermé, donc  $\tilde{\mathfrak{Z}}^{00} = \tilde{\mathfrak{Z}}$ , donc  $\Lambda z \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ . C. Q. F. D.

*Espace  $\mathcal{H}$ .* — On désigne par  $\mathcal{H}$  l'espace (peut-être réduit à  $\{0\}$ ) des éléments  $u$  de  $V$  tels que  $\Lambda u$  soit dans  $Q'$ . On le munit de la topologie la moins fine telle que les applications  $u \rightarrow u$  et  $u \rightarrow \Lambda u$  soient continues de  $\mathcal{H}$  dans  $V$  et  $Q$  respectivement.

Notons que  $Z$  est contenu dans  $\mathcal{H}$ , car si  $z$  est dans  $Z$ , alors  $\Lambda z$  est dans  $\tilde{\mathfrak{Z}}$  (lemme 2.1) et  $\tilde{\mathfrak{Z}} \subset Q'$  (\*). On a évidemment  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')$ .

*Espace  $N$ .* — On désigne par  $N$  le sous-espace de  $\mathcal{H}$ , formé des éléments  $u$  tels que

$$(2.11) \quad \langle \Lambda u, \overline{Bv} \rangle = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Si  $u$  est dans  $\mathcal{H}$ , et si  $v$  est dans  $V$  du type  $v = \Lambda\varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ , alors (2.11) a lieu.

(\*) On voit déjà que  $\mathcal{H}$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  si  $Z$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .

En effet,  $BA\varphi = \varphi$ , le premier membre vaut  $\langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle$ . Le deuxième est  $((u, A\varphi))$ . Il y a égalité par définition [cf. (2.10)].

L'espace  $N$  est muni de la topologie induite par  $\mathcal{H}$ . On a le

LEMME 2.2. — *L'espace  $Z$  est contenu dans  $N$ .*

Démonstration. — On a déjà vu que  $Z$  est dans  $\mathcal{H}$ . Reste à montrer que si  $u = z \in Z$ , alors (2.11) a lieu. Or le deuxième membre est nul. Mais (lemme 2.1)  $\Lambda z \in \mathfrak{S}$ , et par (2.5),  $Bv \in Q_{\mathfrak{S}}$ , donc  $\langle \Lambda z, \overline{Bv} \rangle = 0$ , d'où le résultat.

Étudions l'image de  $N$  par  $\Lambda$ . On a

$$\langle \Lambda u, \overline{Bz} \rangle = ((u, z)) = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z,$$

donc par définition de  $Q'_0$  [cf. (2.7)] on voit que  $\Lambda u$  est dans  $Q'_0$ . Donc

$$(2.12) \quad \Lambda \in \mathcal{L}(N; Q'_0).$$

Espace  $\mathcal{K}$ . — On donne un espace  $\mathcal{K}$  de distributions sur  $\Omega$  et un prolongement de  $\Lambda$ , encore noté  $\Lambda$ , à l'espace  $\mathcal{K}$ , de sorte que

$$(2.13) \quad \Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{K}; Q').$$

Problème aux limites. — On appellera « problème aux limites » le problème suivant :

Problème 2.1. — Trouver  $U$  dans  $\mathcal{K}$ , solution de

$$(2.14) \quad \Lambda U = F,$$

où  $F$  est donné dans  $Q'$ , avec les conditions aux limites (\*)

$$(2.15) \quad h - U \in N,$$

où  $h$  est donné dans  $\mathcal{K}$ .

Ce problème sera résolu au numéro suivant.

3. Résolution des problèmes aux limites. — Le problème 2.1 va être résolu sous l'hypothèse (H) (p. 226), et sous une deuxième hypothèse (H') que l'on va préciser. Rassemblons ces deux hypothèses :

(H) L'espace  $\tilde{V}$  est un espace de Hilbert pour  $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$ .

(H') L'opérateur  $\Lambda$  applique  $Z$  sur  $\mathfrak{S}$ .

THÉOREME 3.1. — *On suppose que les hypothèses (H) et (H') ont lieu. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème 2.1 admette une solution est que*

$$(3.1) \quad \langle \Lambda h - F, \overline{Bz} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z.$$

Dans ces conditions, si  $U_1$  est une solution du problème, toutes les solutions sont données par  $U_1 + z$ ,  $z \in Z$ , tel que  $\Lambda z = 0$ .

---

(\*) Ceci est une définition, qui sera justifiée sur les exemples.

*Démonstration.* — *a.* Posons  $u = h - U$ . Le problème 2.1 équivaut alors à trouver  $u$  dans  $N$ , solution de

$$(3.2) \quad \Lambda u = f,$$

où  $f = \Lambda h - F$  est donné dans  $Q'$ .

*b.* Comme  $\Lambda$  applique  $N$  dans  $Q'_0$  [(2.12)], il est nécessaire, pour que (3.2) puisse avoir une solution, que  $f$  soit dans  $Q'_0$ , donc que l'on ait (3.1).

*c.* Cherchons les  $u$  dans  $N$  tels que  $\Lambda u = 0$ . On doit avoir  $((u, u)) = 0$ , donc  $((u, u))_1 = 0$ , donc  $u \in Z$ , et comme  $Z$  est dans  $N$ , toutes les solutions dans  $N$  de  $\Lambda u = 0$  sont les  $z$  tels que  $\Lambda z = 0$ . Ceci montre la dernière partie du théorème.

*d.* Il reste à montrer ceci : si  $f$  est donné dans  $Q'_0$ , alors il existe  $u$  dans  $N$  solution de (3.2).

Si  $u$  est une solution de (3.2), alors, pour  $v$  quelconque dans  $V$ , on a

$$((u, v)) = \langle f, \overline{Bv} \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Comme  $f$  est dans  $Q'_0$ , on a

$$\langle f, \overline{B(v+z)} \rangle = \langle f, \overline{Bv} \rangle,$$

on peut donc poser

$$(3.3) \quad \langle f, \overline{Bv} \rangle = X(\tilde{v}),$$

et l'on a supposé [cf. (2.8)] que  $X(\tilde{v})$  dépend continûment de  $\tilde{v}$ . Il en résulte, d'après le lemme 1.1, qu'il existe un élément  $\tilde{u}$  et un seul dans  $\tilde{V}$ , tel que

$$(3.4) \quad ((\tilde{u}, \tilde{v})) = X(\tilde{v}) \text{ pour tout } \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Par conséquent, si (3.2) admet une solution, la classe  $\tilde{u}$  de  $u$  dans  $\tilde{V}$  est la solution de (3.4).

Il reste à voir si l'on peut trouver dans  $\tilde{u}$  un représentant qui soit dans  $N$  et vérifie (3.2). Pour cela, prenons  $u_1$  quelconque dans  $\tilde{u}$ ; donc  $u_1 \in V$ , et vérifie

$$(3.5) \quad ((u_1, v)) = \langle f, \overline{Bv} \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Donc (3.5) a en particulier lieu avec  $v = \Lambda \varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{O}_3$ . Alors  $Bv = \varphi$ , de sorte que (3.5) donne

$$((u_1, \Lambda \varphi)) = \langle \Lambda u_1, \overline{\varphi} \rangle = \langle f, \overline{\varphi} \rangle,$$

et ceci, pour tout  $\varphi \in \mathcal{O}_3$ , donc

$$(3.6) \quad \Lambda u_1 - f = \zeta \in \mathfrak{Z}.$$

Il en résulte que  $u_1$  est dans  $N$ . En effet, soit  $v$  quelconque dans  $V$ . Alors  $Bv$  est dans  $Q_3$ , de sorte que

$$\langle \zeta, \overline{Bv} \rangle = 0.$$

Donc (3.6) donne

$$\langle \Lambda u_1, \overline{Bv} \rangle = \langle f, \overline{Bv} \rangle.$$

Mais par (3.5), le deuxième membre vaut  $((u_1, v))$ , donc

$$\langle \Lambda u_1, \overline{Bv} \rangle = ((u_1, v)),$$

ce qui montre que  $u_1$  est dans N.

Considérons maintenant deux cas :

*Premier cas :*  $\mathfrak{Z} = \{0\}$ . — Alors (3.6) s'écrit  $\Lambda u_1 = f$ , on peut prendre  $u = u_1$ , ce qui montre le théorème dans ce cas.

*Deuxième cas :*  $\mathfrak{Z} \neq \{0\}$ . — Par l'hypothèse (H'),  $\Lambda$  applique Z sur  $\mathfrak{Z}$ , donc il existe  $z \in Z$  avec

$$\Lambda z = \zeta.$$

Mais  $Z \subset N$ , donc  $u_1 - z$  est dans N, et vérifie

$$\Lambda(u_1 - z) = f,$$

on peut donc prendre  $u = u_1 - z$ , ce qui démontre le théorème.

*Remarque 3.1.* — Supposons que  $Z = \{0\}$ ,  $\mathfrak{Z} = \{0\}$ , A et B étant les injections. Alors le théorème 3.1 est déjà donné dans Schwartz [3], Lions [1].

*Remarque 3.2.* — On peut faire une théorie en tous points analogues en supposant plus généralement que  $\Lambda$  est un espace fibré indéfiniment différentiable, de fibre vectorielle de dimension finie, comme il est fait dans Schwartz-Lions [1].

## II. — Application (I).

1. **Position du problème.** — On donne sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , l'opérateur différentiel

$$(1.1) \quad \Lambda = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad \text{où } g_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad (?).$$

On suppose que l'opérateur  $\Lambda$  est *elliptique* au sens suivant : pour tout système de  $n$  nombres complexes  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , on a

$$(1.2) \quad \sum_{i,j=1}^n (g_{ij}(x) + \overline{g_{ji}(x)}) \zeta_j \bar{\zeta}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \quad (\alpha > 0). \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Si, au lieu de  $\Lambda$ , on considère par exemple l'opérateur  $\Lambda + s$ ,  $s > 0$  (\*). les problèmes aux limites correspondants sont résolus dans Lions [1] (chap. I, § 2, n° 1) (°). Le cas  $s = 0$  que l'on étudie ici, est un peu plus délicat.

Rappelons le résultat suivant, donné dans Deny-Lions [1]. Supposons pour

(?) On désigne par  $L^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables sur  $\Omega$ , essentiellement bornées.

(\*) Plus généralement, on peut prendre  $s$  avec  $\Re(s) =$  partie réelle de  $s > 0$ .

(°) Pour renvoyer à un article qui utilise une méthode fonctionnelle analogue à la méthode actuelle.



simplifier que  $n$  est  $\geq 3$ . On introduit le nombre  $q$  donné par

$$(1.3) \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

On désigne de façon générale par  $L^p(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions de puissance  $p^{\text{ième}}$  sommable sur  $\Omega$ ; si  $f \in L^p(\Omega)$ , on pose

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On désigne par  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  l'espace des  $u \in L^q(\Omega)$  telles que les dérivées (au sens distribution)  $\frac{\partial}{\partial x_i} u$  soient dans  $L^2(\Omega)$  pour tout  $i$ . On pose

$$(1.4) \quad \|u\|_1^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{L^2}^2,$$

et

$$(1.5) \quad \|u\|_{\mathcal{E}_{q,2}^1} = \|u\|_{L^q} + \|u\|_1.$$

Pour cette norme, l'espace  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  est un espace de Banach. On désigne par  $\mathcal{O}_{q,2}^1(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{O}(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  <sup>(10)</sup> et par  $\mathcal{O}'_{q,2}(\Omega)$  l'espace dual de  $\mathcal{O}_{q,2}^1(\Omega)$ .

Ceci posé, sous la condition (1.2), l'opérateur  $\Lambda$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{q,2}^1(\Omega)$  sur  $\mathcal{O}'_{q,2}(\Omega)$ , ce qui résout le problème de Dirichlet (cf. Deny-Lions [1], et, pour une méthode analogue, Gårding [1], Browder [1]).

Voici maintenant ce qu'il est naturel d'appeler le problème de Neumann relatif à  $\Lambda$ . On désigne par  $N$  l'espace des éléments  $u$  de  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  tels que

$$(1.6) \quad \Lambda u \in L^{q'}(\Omega), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

et que, pour tout  $v$  dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$ , on ait

$$(1.7) \quad \langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = (u, v)_g,$$

où l'on a posé

$$(1.8) \quad (u, v)_g = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}(x) dx.$$

Supposons  $\Omega$  connexe. Le problème de Neumann, avec conditions aux limites nulles, consiste à trouver  $u$  dans  $N$ , solution de

$$(1.9) \quad \Lambda u = f \quad [f \text{ donné dans } L^{q'}(\Omega)].$$

Si  $\Omega$  est de mesure finie, il est évidemment nécessaire que  $f$  soit dans  $L^q_0(\Omega)$ ,

<sup>(10)</sup> La condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{O}(\Omega)$  ne soit pas dense dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  est que  $\mathcal{C}^{\infty}_0(\Omega)$  ne soit pas de capacité nulle (cf. Deny-Lions [1]).

sous-espace de  $L^q(\Omega)$ , formé des fonctions  $f$  telles que

$$(1.10) \quad \int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

Par la même méthode que dans Deny-Lions [1], on montre ceci <sup>(11)</sup>.

*Premier cas* :  $\Omega$  est de mesure finie.

Si  $\Lambda$  applique  $N$  sur  $L^q_0(\Omega)$ , il existe une constante  $S(\Omega)$ , telle que pour tout  $u$  dans  $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ , on ait

$$(1.11) \quad \inf_c \|u + c\|_{L^q} \leq S(\Omega) \|u\|_1 \quad (c = \text{const.}).$$

*Deuxième cas* :  $\Omega$  est de mesure infinie.

Si  $\Lambda$  applique  $N$  sur  $L^q(\Omega)$ , il existe une constante  $S(\Omega)$  telle que pour tout  $u$  dans  $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ , on ait

$$(1.12) \quad \|u\|_{L^q} \leq S(\Omega) \|u\|_1.$$

Or les inégalités (1.11) et (1.12) ne sont pas automatiquement réalisées. On est donc conduit (cf. Deny-Lions [1]) à supposer que  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff, c'est-à-dire : sur  $\Omega$ , connexe, introduisons l'espace  $BL(\Omega)$  des distributions  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telles que  $\frac{\partial}{\partial x_i} T$  soit dans  $L^2(\Omega)$  pour tout  $i$ .

Si  $\Omega$  est de mesure finie, on dira que  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff, si toute distribution  $T$  de  $BL(\Omega)$  est dans  $L^q(\Omega)$ .

Si  $\Omega$  est de mesure infinie, on dira que  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff, si, pour tout  $T$  dans  $BL(\Omega)$ , il existe une constante  $c(T)$ , dépendant de  $T$ , telle que  $T + c(T)$  soit dans  $L^q(\Omega)$ .

Si  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff, les inégalités (1.11) ou (1.12) ont lieu. Tout ouvert de frontière trouvée assez régulière est un ouvert de Soboleff (cf. Deny-Lions [1]).

On va maintenant étudier les problèmes aux limites relatifs à  $\Lambda$  sur un ouvert de Soboleff, en utilisant le théorème du paragraphe I.

Rappelons encore un résultat qui va nous être utile. Soit  $\Sigma$  une portion de la frontière de  $\Omega$ , bornée, variété de dimension  $n - 1$ , une fois continûment différentiable par morceaux,  $\Omega$  étant d'un même côté que  $\Sigma$ . Alors il existe une application linéaire continue et une seule,  $u \rightarrow \sigma(u)$  de  $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$  dans  $L^2(\Sigma)$  (espace des classes de fonctions de carré sommable sur  $\Sigma$  pour la mesure superficielle), telle que  $\sigma(u)$  coïncide (presque partout) avec les valeurs de  $u$  sur  $\Sigma$  si  $u$  est donnée dans  $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$  continue dans  $\Omega \cup \Sigma$ .

Si  $\Omega$  est non borné, on a un résultat analogue, en remplaçant  $L^2(\Sigma)$  par l'espace  $L^2_{loc}(\Sigma)$  des fonctions localement de carré sommable sur  $\Sigma$  <sup>(12)</sup>.

<sup>(11)</sup> La démonstration est facile. Par exemple dans le deuxième cas : soit  $A$  l'ensemble des  $u$  de  $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$  avec  $\|u\|_1 \leq 1$ . Il suffit de montrer que  $A$  est borné dans  $L^q(\Omega)$ , donc faiblement borné. Soit donc  $f$  donné dans  $L^{q'}(\Omega)$ . Il suffit de montrer que  $\langle u, f \rangle$  est borné,  $u \in A$ . Or si  $\Lambda$  applique  $N$  sur  $L^q(\Omega)$ , il existe  $u_0$  dans  $N$ , avec  $\Lambda u_0 = f$ , d'où  $\langle f, \bar{u} \rangle = \langle u_0, u \rangle$ , d'où le résultat.

<sup>(12)</sup> On peut avoir des résultats de croissance globale sur  $\sigma u$  en faisant des hypothèses de nature globale sur  $\Sigma$ .

On a également des résultats analogues en remplaçant l'espace  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  par l'espace  $\mathcal{E}_1^1(\Omega)$  dès  $u \in L^2(\Omega)$  tels que  $\frac{\partial}{\partial x_i} u$  soit dans  $L^2(\Omega)$ , pour tout  $i$ , muni de la norme dont le carré est donné par

$$(1.13) \quad \| \| u \| \|_1^2 = \| u \|_{L^2}^2 + \| u \|_1^2.$$

Pour la norme  $\| \| u \| \|_1$ ,  $\mathcal{E}_1^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert <sup>(13)</sup>.

**2. Problèmes aux limites sur un ouvert de Soboleff de mesure finie.** — On désigne par  $V$  un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$ , contenant  $\mathcal{O}_{q,2}^1(\Omega)$ ; c'est un espace de Banach pour la topologie induite par  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$ .

On prend sur  $V \times V$ , la forme sesquilinéaire

$$(2.1) \quad ((u, v)) = (u, v)_g + s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)} \quad (s > 0),$$

$\Sigma$  étant un morceau borné de la frontière de  $\Omega$  <sup>(14)</sup>, et  $(u, v)_g$  étant défini par (1.8). La partie hermitienne de cette forme est donnée par

$$(2.2) \quad ((u, v))_1 = (u, v)_{g,1} + s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)},$$

$$(2.3) \quad (u, v)_{g,1} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (g_{ij} + \bar{g}_{ji}) \frac{\partial}{\partial x_j} u \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v} \, dx.$$

Ceci définit sur  $V$  une structure préhilbertienne. L'espace  $V$  est désormais muni de la topologie correspondante. Cherchons l'espace  $Z$  (avec les notations du paragraphe I) : on cherche  $u$  telle que  $((u, u))_1$  soit nul, donc  $(u, u)_{g,1} = 0$  et  $\sigma(u) = 0$  si  $s \neq 0$ . Or  $(u, u)_{g,1} = 0$  entraîne  $u = \text{const}$ . On a donc les deux cas suivants à distinguer :

- (A)  $1 \notin V$ , ou bien  $s > 0$ . Alors  $Z = \{0\}$ .
- (B)  $1 \in V$  et  $s = 0$ . Alors  $Z = \mathbb{C}$ , ensemble des nombres complexes.

Il faut voir ensuite (et c'est le point fondamental) si (H) a lieu [hypothèse (H) du paragraphe I]. On a la

**PROPOSITION 2.1.** — *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff de mesure finie. Alors :*

- (A) si  $1 \notin V$ , ou si  $1 \in V$  et  $s > 0$ ,  $V$  est un espace de Hilbert pour  $((u, v))_1$ ;
- (B) si  $1 \in V$ ,  $s = 0$ , alors  $\tilde{V} = V/\mathbb{C}$  est un espace de Hilbert pour  $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$ .

*Démonstration.* — Grâce à (1.2), on a

$$(2.4) \quad ((u, u))_1 \geq \alpha \| u \|_1^2 + s \| \sigma u \|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

Cas (A),  $1 \notin V$ . — Soit  $u_k$  une suite de Cauchy dans  $V$  pour  $\sqrt{((u, u))_1}$ .

<sup>(13)</sup> L'application  $u \rightarrow \sigma(u)$  applique encore  $\mathcal{E}_1^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Sigma)$  ou  $L_{loc}^2(\Sigma)$ . Cette application n'est pas sur. Pour des précisions, cf. Lions [3]. (L'article détaillé correspondant est à paraître aux *Annals of Math.*)

<sup>(14)</sup> Tel que l'on puisse appliquer les résultats énoncés au n° 1, relativement à l'application  $\sigma$ .

Par (2.4) c'est une suite de Cauchy pour  $\|u\|_1$ . Comme  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff, il existe une suite de constantes  $c_k$  telles que

$$(2.5) \quad u_k + c_k \rightarrow w \text{ dans } \mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega).$$

Comme 1 n'est pas dans V, il existe, d'après le théorème de Hahn Banach, une forme linéaire continue  $u \rightarrow L(u)$  sur  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$ , nulle sur V, égale à 1 sur la fonction  $u = 1$ . Alors  $L(u_k + c_k) = c_k$  tend vers  $L(w) = c$ , donc

$$(2.6) \quad u_k \rightarrow u = w - c \text{ dans } \mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega),$$

et comme V est fermé dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1$ ,  $u_k \rightarrow u$  dans V, ce qui montre que V est complet pour  $\sqrt{\langle (u, u) \rangle_1}$ , ce qui montre la proposition dans ce cas.

*Cas (A),  $1 \in V$ ,  $s > 0$ .* — Soit encore  $u_k$  une suite de Cauchy dans V pour  $\sqrt{\langle (u, u) \rangle_1}$ . On a encore (2.5). Par (2.4),  $\sigma(u_k)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Sigma)$ , donc

$$(2.7) \quad \sigma(u_k) \rightarrow f \text{ dans } L^2(\Sigma).$$

Mais de (2.5) résulte ( $\sigma$  étant continue)

$$(2.8) \quad \sigma u_k + c_k \rightarrow \sigma w \text{ dans } L^2(\Sigma),$$

ce qui en comparant avec (2.7) montre que  $c_k$  est une suite convergente; on termine comme précédemment.

*Cas (B),  $1 \in V$ ,  $s = 0$ .* — Comme  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff, sur  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)/\mathbb{C}$  les normes  $\|\tilde{u}\|_1$  et  $\inf_{c \in \mathbb{C}} \|(u+c)\|_1$  sont équivalentes, donc  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)/\mathbb{C}$  est un espace de Hilbert pour  $\|\tilde{u}\|_1$ . Or sur  $\tilde{V}$ ,  $\sqrt{\langle (\tilde{u}, \tilde{u}) \rangle_1}$  est une norme équivalente à  $\|\tilde{u}\|_1$ , d'où le résultat. La proposition est complètement démontrée.

Appliquons maintenant la théorie du paragraphe I. On prend

$$Q = L^q(\Omega) \quad [\text{donc } Q' = L^{q'}(\Omega)].$$

On prend  $\tilde{Z} = \{0\}$ , donc  $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}(\Omega)$ , et pour A on prend l'injection de  $\mathcal{O}(\Omega)$  dans V. On prend également

$$B = \text{injection de V dans } L^q(\Omega).$$

Si  $Z = \{0\}$ , cette injection est continue, donc (2.8) (§I) a lieu. Si  $Z = \mathbb{C}$ , vérifions que (2.8), (§I), a encore lieu (l'injection n'est plus continue). L'espace  $Q_0$  [défini par (2.7), §I] est l'espace  $L_0^q(\Omega)$  des  $f$  tels que  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ . Pour  $f$  dans  $L_0^q(\Omega)$ ,

$$\langle f, \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} + \bar{c} \rangle \quad (\text{constante quelconque})$$

et  $\langle \tilde{v} \rightarrow \langle f, \bar{v} \rangle$  est une forme semi-linéaire continue sur  $\tilde{v}$ .

On est donc dans les conditions d'application de la théorie du paragraphe I. Voyons quels sont les problèmes aux limites que l'on a ainsi résolus.

On prend pour espace  $\mathcal{H}$  l'espace des  $u \in BL(\Omega)$  tels que  $\Lambda u$  soit dans  $L^{q'}(\Omega)$ .

Espace  $N$ . — C'est l'ensemble des  $u \in V$  tels que  $\Delta u \in L^{q'}(\Omega)$  et que

$$(2.9) \quad \langle \Delta u, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Énonçons de nouveau le problème 2.1 (§ I).

Problème 2.1. — Trouver  $U$  dans  $\mathcal{K}$ , solution de

$$(2.10) \quad \Delta U = F, \quad [F \text{ donné dans } L^{q'}(\Omega)],$$

avec les conditions aux limites

$$(2.11) \quad h - U \in N \quad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}).$$

On a, d'après le théorème 3.1, (§ I), le

THÉORÈME 2.1. — On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff de mesure finie. Dans ces conditions, l'hypothèse (1.2) ayant lieu :

(A) si  $1 \notin V$  ou si  $s > 0$ , le problème 2.1 admet une solution unique;

(B) si  $1 \in V$ ,  $s = 0$ , la condition nécessaire et suffisante pour que le problème 2.1 admette une solution est que

$$(2.12) \quad \int_{\Omega} (\Delta h - F) dx = 0.$$

Alors la solution est déterminée à une constante additive près.

Donnons quelques exemples. Pour cela, nous notons la formule <sup>(15)</sup>

$$(2.13) \quad \langle \Delta u, \bar{v} \rangle = \int_{\partial\Omega} (\gamma_{\Delta} u) \bar{v} d\omega + (u, v)_g,$$

où

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\Delta} u = \text{dérivée normale de } u \text{ par rapport à } \Delta \text{ (16), sur } \partial\Omega, \\ d\omega \text{ étant l'élément superficiel de } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Exemple 2.1 :  $V = \mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$ ,  $s = 0$ . — Alors  $1$  est dans  $V$ , on est dans le cas (B). Dire que  $u$  est dans  $N$  signifie que  $\gamma_{\Delta} u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Le problème 2.1 correspondant est le problème de Neumann. Pour que ce problème ait une solution, il est nécessaire et suffisant que (2.12) ait lieu.

Exemple 2.2 :  $V = \mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$ ,  $s > 0$ . — On est dans le cas (A). La condition (2.9) s'écrit

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_{\Delta} u \bar{v} d\omega = s(\sigma u, \sigma v)_{L^1(\Sigma)},$$

<sup>(15)</sup> Cette formule est formelle, ce qui suffit pour interpréter de façon intuitive les problèmes aux limites. On peut donner un sens rigoureux à cette formule, cf Lions [3].

<sup>(16)</sup> On a

$$\gamma_{\Delta} u = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \cos(n, x_i), \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où  $n$  = vecteur directeur de la normale intérieure à  $\Omega$  en un point de  $\partial\Omega$ , et  $(n, x_i)$  = angle de  $n$  avec l'axe des  $x_i$ .

donc dire que  $u$  est dans  $N$  signifie que

$$\gamma_{\Lambda} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma, \quad \gamma_{\Lambda} u = s\tau u \text{ sur } \Sigma.$$

Le problème aux limites correspondant revient donc à trouver  $U$ , vérifiant (2.10), avec

$$\gamma_{\Lambda} U = \gamma_{\Lambda} k \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma, \quad \gamma_{\Lambda} U = sU \text{ donné sur } \Sigma.$$

Ce problème admet une solution unique <sup>(17)</sup>.

*Exemple 2.3.* —  $V =$  sous-espace de  $\mathcal{E}_{\nu,2}^1(\Omega)$  formé des  $u$  tels que  $\tau u = 0$ , et  $s = 0$ .

Alors  $r$  n'est pas dans  $V$ , on est encore dans les conditions (A). Dire que  $u$  est dans  $N$  signifie que

$$\gamma_{\Lambda} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma, \quad u = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Le problème 2.1 correspondant est un problème de type mélangé.

On peut varier les exemples précédents à l'infini <sup>(18)</sup>.

**3. Problèmes aux limites sur un ouvert de Nikodym.** — On peut remplacer dans le numéro précédent, la notion d'ouvert de Soboleff par une notion moins restrictive et plus élémentaire : celle d'ouvert de Nikodym. Un ouvert  $\Omega$  connexe de mesure finie est dit *ouvert de Nikodym* (la dimension  $n$  est quelconque  $\geq 2$ ) si toute distribution  $T$  de  $BL(\Omega)$  est dans  $L^2(\Omega)$  <sup>(19)</sup>.

On a introduit à la fin du n° I l'espace  $\mathcal{E}_{1,2}^1(\Omega)$ . On montre (cf. Deny-Lions [1]) que, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ouvert  $\Omega$  soit un ouvert de Nikodym est qu'il existe une constante  $P(\Omega)$  telle que, pour tout  $u$  dans  $\mathcal{E}_{1,2}^1(\Omega)$ , on ait

$$(3.1) \quad \|u\|_{1,2}^2 - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left| \int_{\Omega} u(x) dx \right|^2 \leq P(\Omega) \|u\|_1^2 \quad (20).$$

Prenons alors  $V$ , sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{E}_{1,2}^1(\Omega)$ , contenant  $\mathcal{O}_{1,2}^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{O}_{1,2}^1(\Omega)$  étant l'adhérence dans  $\mathcal{E}_{1,2}^1(\Omega)$  de  $\mathcal{O}(\Omega)$  <sup>(21)</sup>. Prenons pour forme

<sup>(17)</sup> On peut plus généralement considérer une forme

$$((u, v)) = (u, v)_{\Sigma} + \int_{\Sigma} k(t) \tau(u) \overline{\tau(v)} dt,$$

[ $t \in \Sigma$ ,  $dt =$  mesure superficielle sur  $\Sigma$ ,  $k(t) > 0$ ]. On a pris dans le texte :  $k(t) =$  constante  $s$ .

<sup>(18)</sup> Il n'y a pas que le problème de Neumann qui corresponde au cas (B). Signalons en effet l'exemple suivant : on prend pour  $V$  le sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{E}_{\nu,2}^1(\Omega)$ , formé des  $u$  tels que  $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} u dx = 0$ , pour tout  $i$ , (plus généralement, pour une famille d'indices  $i$ ). Cet espace  $V$

contient  $\mathcal{O}(\Omega)$  et contient  $r$ . Si  $s = 0$ , on est donc dans le cas (B). De telles conditions aux limites peuvent être utiles (cf. Minakshisundaram [1]).

<sup>(19)</sup> On a montré dans Deny-Lions [1], que tout ouvert borné de frontière assez régulière, est un ouvert de Nikodym. Un ouvert de  $R^n$  ( $n \geq 3$ ), peut être un ouvert de Nikodym sans être un ouvert de Soboleff.

<sup>(20)</sup>  $\text{mes}(\Omega) =$  mesure de  $\Omega$ . L'inégalité (3.1) est l'inégalité de Poincaré. Cf. Courant-Hilbert [1] Deny-Lions [1].

<sup>(21)</sup> La condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{O}(\Omega)$  ne soit pas dense dans  $\mathcal{E}_{1,2}^1(\Omega)$  est que  $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$  ne soit pas de capacité nulle.

sesquilineaire la forme (2.1). On montre de façon analogue à la proposition 2.1 la

PROPOSITION 3.1. — Soit  $\Omega$  un ouvert de Nikodym. Alors :

(a) si  $1 \notin V$ , ou si  $s > 0$ ,  $V$  est un espace de Hilbert pour  $((u, v))_1$ .

(i) si  $1 \in V$ ,  $s = 0$ ,  $\tilde{V} = V/C$  est un espace de Hilbert  $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$ .

On est donc encore dans les conditions d'application de la théorie du paragraphe I. Prenons  $Q = L^2(\Omega)$ , donc  $Q' = L^2(\Omega)$ , et pour A l'injection de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $V$  (on prend  $\mathcal{F} = 0$ ). Prenons pour B l'injection de  $V$  dans  $L^2(\Omega)$ . Si l'on est dans le cas (a) de la proposition 3.1, cette injection est continue. Sinon, pour vérifier (2.8), (§I) on prend  $f$  dans  $Q'_0 = L^2_0(\Omega)$ , sous-espace de  $L^2(\Omega)$  formé des  $f$  telles que  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ ; il faut alors voir que  $\tilde{v} \rightarrow (f, v)_{L^2}$  est une forme semi-linéaire continue sur  $V$ , ce qui est vrai.

Voyons quels sont les problèmes aux limites résolus par le théorème 3.1, (§I). L'espace  $\mathcal{K}$  est cette fois l'espace des  $u$  dans  $BL(\Omega)$  tels que  $\Lambda u \in L^2(\Omega)$ . L'espace  $N$  est l'espace des  $u \in V$ , tels que  $\Lambda u \in L^2(\Omega)$  et que

$$(3.2) \quad (\Delta u, v)_{L^2} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Le problème aux limites correspondant au problème 2.1, (§I), est le

Problème 3.1. — Trouver  $U$  dans  $\mathcal{K}$ , solution de

$$(3.3) \quad \Delta U = F \quad [F \text{ donné dans } L^2(\Omega)],$$

avec les conditions aux limites

$$(3.4) \quad h - U \in N \quad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}).$$

Le théorème 3.1 (§I), donne le

THÉORÈME 3.1. — On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym et que (1.2) a lieu. Alors :

(a) si  $1 \notin V$  ou si  $s > 0$ , le problème 3.1 admet une solution unique;

(b) si  $1 \in V$  et  $s = 0$ , la condition nécessaire et suffisante pour que le problème 3.1 admette une solution est que (2.12) ait lieu.

La solution est alors déterminée à une constante additive près.

Les applications de ce théorème sont analogues aux applications du théorème 2.1.

4. Problème aux limites sur un ouvert de Soboleff de mesure infinie. — Soit toujours  $\Sigma$  une portion bornée de la frontière de  $\Omega$ ,  $\Sigma$  étant supposée une variété de dimension  $n - 1$  une fois continûment différentiable par morceaux. On prend encore  $V$ , sous espace vectoriel fermé de  $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ , contenant  $\mathcal{D}^1_{q,2}(\Omega)$ , et sur  $V$ , la forme sesquilineaire

$$(4.1) \quad ((u, v)) = (u, v)_g + s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)}, \quad (s > 0).$$

La structure préhilbertienne définie par  $((u, v))$  sur  $V$  est toujours séparée, car  $\mathbf{1}$  n'est jamais dans  $V$  puisque  $\Omega$  est de mesure infinie. L'espace  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  est, l'ouvert  $\Omega$  étant un ouvert de Soboleff, un espace de Hilbert pour la norme  $\|u\|_1$  et par (1.2), on a  $((u, u))_1 \cong \|u\|_1^2$ , donc :

**PROPOSITION 4.1.** — *Si  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff de mesure infinie, l'espace  $V$  est un espace de Hilbert pour  $((u, v))_1$ .*

On introduit alors les espaces  $Q$  et  $Q'$  comme au n° 2. L'espace  $N$  est défini de la même façon, ainsi que  $\mathcal{K}$ , et le problème 2.1 est posé de façon identique. Donc, d'après le théorème 3.1, (§I) :

**THÉORÈME 4.1.** — *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Soboleff de mesure infinie, et que (1.2) a lieu. Alors le problème 2.1 admet une solution unique.*

Les applications sont analogues à celles du théorème 2.1. Donnons la variante suivante :

**Exemple 4.1.** — Soit  $\Sigma_1$  une portion supposée bornée ou non de la frontière de  $\Omega$ ,  $\Sigma_1$  étant une variété de dimension  $n - 1$ , une fois continûment différentiable par morceaux, ne rencontrant pas  $\Sigma$ . Prenons pour  $V$  le sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  des  $u$  tels que  $\sigma_1(u) = 0$  dans  $L_{loc}^2(\Sigma_1)$ . Alors dire que  $u$  est dans  $N$  signifie que

$$\gamma_\Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma - \Sigma_1, \quad u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \quad \gamma_\Delta u = su \text{ sur } \Sigma.$$

**§. Problème de Poisson.** — On considère maintenant deux ouverts  $\Omega_1, \Omega_2$ , connexes, avec

$$(§.1) \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \text{ensemble vide} \quad (\Omega_1 \text{ et } \Omega_2 \text{ étant des ouverts de Soboleff}) \quad (n \geq 3),$$

$$(§.2) \quad \text{mes}(\Omega_2) = \infty, \quad (\Omega_1 \text{ étant de mesure finie ou non}),$$

$$(§.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial\Omega_1 \text{ et } \partial\Omega_2 \text{ ont en commun une variété } \Sigma, \text{ de dimension } n - 1, \text{ bornée ou non,} \\ \text{une fois continûment différentiable par morceaux.} \end{array} \right.$$

On peut alors définir des applications « prolongement »,  $u_i \rightarrow \sigma_i(u_i)$ , de  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega_i)$  dans  $L_{loc}^2(\Sigma)$  ( $i = 1, 2$ ). On pose

$$(§.4) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Tout élément  $u$  de  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  est du type

$$(§.5) \quad u = (u_1, u_2), \quad u_i \in \mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega_i).$$

On désigne par  $V$  le sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  formé des éléments  $u$  tels que

$$(§.6) \quad \sigma_1 u_1 = k \sigma_2 u_2, \quad k \in \mathbb{C}, \text{ non nul},$$

l'égalité ayant lieu dans  $L_{loc}^2(\Sigma)$ .

Sur  $V$  on prend la forme sesquilinéaire

$$(§.7) \quad ((u, v)) = \varepsilon_1(u_1, v_1)_1 + \varepsilon_2(u_2, v_2)_1,$$



où

$$(3.8) \quad (u_j, v_j)_j = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}_j dx \quad (j = 1, 2) \quad (**),$$

et où  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , sont des constantes dépendant du milieu  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$  <sup>(23)</sup>.

On a  $((u, v)) = ((v, u))$ ; on définit donc sur V une structure préhilbertienne; cette structure est séparée. En effet,  $((u, u)) = 0$  équivaut à  $\|u_1\|_1 = 0$ ,  $\|u_2\|_1 = 0$ . Comme  $\Omega_2$  est de mesure infinie, il en résulte que  $u_2 = 0$ , et  $u_1 = c_1$  (constante). Par (3.6) il en résulte que  $c_1 = 0$ . C. Q. F. D.

L'hypothèse (H) (§I), a lieu. En effet :

PROPOSITION 3.1. — *L'espace V est un espace de Hilbert pour la forme ((u, v)).*

*Démonstration.* — Soit  $u^\alpha$  une suite de Cauchy dans V pour  $\sqrt{((u, u))}$ . Alors, si  $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$ ,  $u_2^\alpha$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega_2)$  (puisque  $\Omega_2$  est un ouvert de Soboleff de mesure infinie), donc  $u_2^\alpha \rightarrow u_2$  dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega_2)$ . Comme  $\Omega_1$  est un ouvert de Soboleff, il existe une suite de constantes  $c^\alpha$  telles que  $u_1^\alpha + c^\alpha \rightarrow v$  dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega_1)$  (si  $\Omega_1$  est de mesure infinie, on peut prendre  $c^\alpha = 0$ , et la proposition est démontrée). Il en résulte que  $\sigma_1(u_1^\alpha) + c^\alpha$  converge dans  $L_{loc}^2(\Sigma)$ . Mais  $\sigma_2(u_2^\alpha)$  converge dans le même espace. Comme on a (3.6), on en déduit que  $c^\alpha$  converge, donc  $u_1^\alpha \rightarrow u_1$  dans  $\mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega_1)$ , d'où le résultat.

On va alors appliquer la théorie du paragraphe I. On prend  $Q = L^q(\Omega)$ , donc  $Q' = L^q(\Omega)$ , puis  $\mathcal{F} = 0$ ; pour A on prend l'injection de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans V, pour B l'injection de V dans  $L^q(\Omega)$  (qui est continue). L'opérateur  $\Lambda$  est alors défini par  $((u, v))$  :

$$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

d'où

$$(3.9) \quad \Lambda u = (-\varepsilon_1 \Delta u_1, -\varepsilon_2 \Delta u_2), \quad (\Delta = \text{laplacien}).$$

*Espace  $\mathcal{K}$ .* — C'est ici l'espace des  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tels que  $\Lambda u$  soit dans  $L^q(\Omega)$ , c'est-à-dire

$$\Delta_i u_i \in L^q(\Omega_i) \quad (i = 1, 2).$$

*Espace N.* — C'est l'espace des  $u \in V$ , tels que  $\Lambda u \in L^q(\Omega)$  et  $\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = ((u, v))$  pour tout  $v \in V$ , c'est-à-dire

$$(3.10) \quad -\varepsilon_1 \langle \Delta u_1, \bar{v}_1 \rangle - \varepsilon_2 \langle \Delta u_2, \bar{v}_2 \rangle = \varepsilon_1 (u_1, v_1)_1 + \varepsilon_2 (u_2, v_2)_1.$$

Le problème 2.1 (§I), devient

*Problème 3.1.* — Trouver U dans  $\mathcal{K}$ , solution de  $\Lambda U = F$ , c'est-à-dire

$$(3.11) \quad -\varepsilon_1 \Delta U_1 = F_1, \quad -\varepsilon_2 \Delta U_2 = F_2, \quad F_i \in L^q(\Omega_i),$$

(22) On prend cette forme sesquilinéaire pour simplifier. Tout ceci se généralise au cas  $((u, v)) = ((u_1, v_1))_{\Omega_1} + ((u_2, v_2))_{\Omega_2}$  où  $((u_i, v_i))_{\Omega_i}$  = forme sesquilinéaire sur  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ), comme aux numéros précédents.

(23) Par exemple :  $\varepsilon_i$  = constante diélectrique de  $\Omega_i$ .

avec les conditions aux limites

$$(5.12) \quad h - U \in \mathcal{N} \quad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}).$$

D'après le théorème 3.1, (§ I), on a le

**THÉOREME 5.1.** — *Sous les hypothèses (5.1), (5.2), (5.3), l'espace  $V$  étant défini par (5.6), le problème 5.1 admet une solution unique.*

*Interprétation.* — Pour interpréter le problème 5.1, il suffit d'interpréter la condition «  $u \in \mathcal{N}$  ». Or, le premier membre de (5.10) vaut

$$\varepsilon_1(u_1, \nu_1)_1 + \varepsilon_2(u_2, \nu_2)_1 - \varepsilon_1 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 \bar{\nu}_1 d\omega_1 - \varepsilon_2 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 \bar{\nu}_2 d\omega_2.$$

où

$$\frac{\partial}{\partial n_i} u_i = \text{dérivée normale de } u_i \text{ sur } \partial\Omega_i, \quad d\omega_i = \text{élément superficiel de } \partial\Omega_i:$$

donc (5.10) équivaut à <sup>(21)</sup>

$$(5.13) \quad \varepsilon_1 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 \bar{\nu}_1 d\omega_1 + \varepsilon_2 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 \bar{\nu}_2 d\omega_2 = 0.$$

Mais  $\sigma_1 \nu_1 = k \sigma_2 \nu_2$ , de sorte que (5.13) donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 - \Sigma, & \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 - \Sigma, \\ k \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Cas particulier :  $k = 1$ ; le problème correspondant est un problème de Poisson.

*Variante.* — Désignons par  $\Gamma_i$  diverses portions, distinctes de  $\Sigma$ , de  $\partial\Omega_1$  ou  $\partial\Omega_2$ ; on suppose toujours que les  $\Gamma_i$  sont des variétés de dimension  $n - 1$ , une fois continûment différentiables par morceaux; on désigne par  $\gamma_i(u)$  le prolongement (en moyenne) de  $u \in \mathcal{E}_{q,2}^1(\Omega)$  sur  $\Gamma_i$ . On peut alors prendre pour espace  $V$  l'espace (fermé) des  $u$  tels que

$$\sigma_1(u_1) = k \sigma_2(u_2) \quad \text{et} \quad \gamma_i(u) = 0.$$

Toutes les considérations précédentes sont valables <sup>(22)</sup>.

**6. Généralisations.** — Dans les numéros précédents, on a résolu de larges classes de problèmes aux limites pour les opérateurs  $\Lambda$  du type (1.1), avec la condition (1.2); en particulier pour  $\Lambda = -\Delta$ . Il est naturel de poser des problèmes analogues pour les opérateurs différentiels du type  $\Lambda = (-1)^m \Delta^m$ . On va seulement donner ici quelques indications sur le cas

$$(6.1) \quad \Lambda = \Delta^2.$$

<sup>(21)</sup> Formellement. Cf. note <sup>(15)</sup>.

<sup>(22)</sup> Les problèmes aux limites correspondants interviennent en Électrostatique.

On peut attacher à  $\Delta^2$  un grand nombre de formes sesquilineaires (cf. par exemple Aronszajn [1], Lions [1]). Prenons ici

$$(6.2) \quad ((u, v)) = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v \right)_{L^2},$$

ce qui a un sens sur l'espace des distributions sur  $\Omega$  dont toutes les dérivées d'ordre 2 sont de carré sommable [espace noté  $BL_2(\Omega)$  dans Deny-Lions [1], chap. 3].

Pour simplifier on suppose que  $\Omega$  est *connexe*.

Supposons d'abord que  $\Omega$  soit un ouvert de Soboleff ( $n \geq 3$ ). Si  $T$  est dans  $BL(\Omega)$ , alors  $T$  est dans  $L^q(\Omega)$ , ou bien, si  $\Omega$  est de mesure infinie, il existe une constante  $c(T)$  telle que  $T + c(T)$  soit dans  $L^q(\Omega)$ . Donc si  $T$  est dans  $BL_2(\Omega)$ , alors  $\frac{\partial}{\partial x_i} T$  [ou  $\frac{\partial}{\partial x_i} T + c_i(T)$ ] est dans  $L^q(\Omega)$ . On est alors conduit à étudier les ouverts ayant *en outre* la propriété suivante : si  $T$  est dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$  telle que  $\frac{\partial}{\partial x_i} T \in L^q(\Omega)$  pour tout  $i$ , il existe une constante  $c(T)$  (quelconque si  $\Omega$  est de mesure finie) telle que

$$(6.3) \quad T + c(T) \in L^{q_1}(\Omega), \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \quad (n \geq 5).$$

On montre par la même méthode que dans Deny-Lions (chap. I, n° 6) que tout ouvert de frontière bornée assez régulière, dans  $R^n$  avec  $n \geq 5$ , donne lieu à (6.3).

On peut éviter d'avoir à supposer  $n \geq 5$  en opérant comme suit.

On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym ( $n \geq 2$ ). Désignons par  $\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$  l'espace des fonctions  $u \in L^2(\Omega)$  telles que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \in L^2(\Omega), \quad \text{pour tout } i, j = 1, \dots, n.$$

On pose

$$(6.4) \quad \|u\|_2 = \sqrt{((u, u))}$$

et

$$(6.5) \quad |||u|||_2^2 = \|u\|_2^2 + \|u\|_1^2 + \|u\|_2^2.$$

Pour la norme  $|||u|||_2$ ,  $\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert. On désigne par  $\mathcal{O}_{L^2}^2(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{O}(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$  (26). On prend maintenant un sous-espace vectoriel fermé  $V$  de  $\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$ , contenant  $\mathcal{O}_{L^2}^2(\Omega)$ . Cherchons l'espace  $Z$  (avec les notations du paragraphe I) :  $((u, u)) = 0$  signifie que  $u$  est un polynôme du premier degré, donc

$$(6.6) \quad Z = \text{sous-espace de } V \text{ formé des polynômes du premier degré.}$$

(26) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{O}(\Omega)$  ne soit pas dense dans  $\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$  [plus généralement dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ ] est donnée dans un autre article.

L'hypothèse (H) du paragraphe I a lieu. En effet

PROPOSITION 6.1. — *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym. Alors l'espace  $\tilde{V} = V/Z$  est un espace de Hilbert pour  $((\tilde{u}, \tilde{v}))$ .*

Démonstration. — Soit  $\tilde{u}$  une suite de Cauchy dans  $\tilde{V}$  pour  $\|\tilde{u}\|_2 = \|u\|_2$ ,  $u \in \tilde{u}$ . Si  $u_k$  est quelconque dans  $\tilde{u}$ , alors  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k$  converge dans  $L^2(\Omega)$ , pour tout  $i, j$ ; comme  $\Omega$  est un ouvert de Nykodym, il existe des constantes  $c_{k,i}$  telles que  $\frac{\partial}{\partial x_i} u_k + c_{k,i}$  converge dans  $L^2(\Omega)$ . Posons

$$v_k = u_k + \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i.$$

Alors  $\frac{\partial}{\partial x_i} v_k$  converge dans  $L^2(\Omega)$ , donc, toujours parce que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym, il existe des constantes  $c_k$  telles que  $v_k + c_k$  converge dans  $L^2(\Omega)$ . Finalement, il existe  $p_k \in P$ ,  $P =$  espace de tous les polynomes du premier degré, avec

$$(6.7) \quad w_k = u_k + p_k \quad \text{converge dans } \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega).$$

Si  $Z = P$ , alors  $\tilde{w}_k = \tilde{u}_k$ , d'où le résultat.

Supposons maintenant  $Z \subset P$  strictement. Décomposons  $P$  en somme directe :  $P = Z \oplus S$ ,  $S$  de base  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ . On a donc la décomposition

$$p_k = z_k + s_k, \quad s_k = \sum \xi_{ki} \sigma_i, \quad w_k = u_k + z_k + s_k.$$

Mais  $Z$  est contenu dans  $V$ , et  $S \cap V = \{0\}$ . D'après le théorème de Hahn Banach, il existe, pour tout  $i$ , une forme linéaire  $L_i$  continue sur  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ , avec :

$$L_i \text{ est nulle sur } V; \quad L_i(\sigma_j) = 0 \text{ si } i \neq j, \quad = 1 \text{ si } i = j.$$

Il résulte de (6.7) que  $L_i(s_k) = \xi_{ki}$  converge, donc  $s_k$  converge, et par conséquent

$$(6.8) \quad u_k + z_k \rightarrow u \quad \text{dans } \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega),$$

donc  $\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}$  dans  $\tilde{V}$ , d'où le résultat.

On peut alors appliquer la théorie du paragraphe I. Prenons  $Q = L^2(\Omega)$ , donc  $Q' = L^2(\Omega)$ ;  $\mathcal{Z} = \{0\}$ ;  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} = \mathcal{O}(\Omega)$ ;  $A =$  injection de  $\mathcal{O}(\Omega)$  dans  $V$ ;  $B =$  injection de  $V$  dans  $L^2(\Omega)$ . Si  $Z = \{0\}$ , cette injection est continue. Si  $Z \neq \{0\}$ , on introduit l'espace  $Q'_0$  des  $f \in L^2(\Omega)$ , tels que

$$(6.9) \quad (f, z)_{L^2} = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z \text{ (car } Bz = z).$$

Si  $f \in Q'_0$ , on a  $(f, v)_{L^2} = (f, v + z)_{L^2}$ , et  $\tilde{v} \rightarrow (f, v)_{L^2}$  est une forme semi-linéaire continue sur  $\tilde{V}$ .

On désigne par  $\mathcal{H}$  l'espace des distributions  $u$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$  telles que  $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$ . L'espace  $N$  est l'espace des  $u \in V$  tels que  $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$  et que

$$(6.10) \quad (\Delta^2 u, v)_{L^2} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Le problème 2. 1 (§ I) devient ici

*Problème 6. 1.* — Trouver  $U$  dans  $\mathcal{K}$  solution de

$$(6. 12) \quad \Delta^2 U = F \quad [F \text{ donné dans } L^2(\Omega)],$$

avec les conditions aux limites

$$(6. 12) \quad h - U \in N, \quad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}).$$

D'après le théorème 3. 1, (§ I) on a le

**THÉORÈME 6. 1.** — *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème 6. 1 admette une solution est que l'on ait*

$$(6. 13) \quad \int_{\Omega} (\Delta h - F) \bar{z} \, dx = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z,$$

$Z$  étant l'espace des polynômes du premier degré appartenant à  $V$ . La solution est alors déterminée à un élément de  $Z$  près.

*Exemple 6. 1 :*  $V = \mathcal{E}_{1,1}^2(\Omega)$ . — Alors  $Z = P$ , et (6. 13) équivaut à

$$(6. 14) \quad \int_{\Omega} (\Delta h - F) \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} (\Delta h - F) x_i \, dx = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Pour l'interprétation du problème correspondant, cf. Lions [1] (chap. I, § 2, n° 5, point 10).

*Exemple 6.2.* — Prenons pour  $V$  le sous-espace (fermé) de  $\mathcal{E}_{1,1}^2(\Omega)$  formé des  $u$  tels que

$$\sigma(u) = 0, \quad \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right) = 0 \quad (27).$$

Alors  $Z = 0$ , car si  $z(x) = a_0 + \sum a_i x_i$ , on doit avoir  $z \in V$ , donc  $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} z\right) = 0$ , soit  $a_i = 0$ . Alors  $z(x) = a_0$ , et  $\sigma(z) = 0$  entraîne  $a_0 = 0$ . Il n'y a donc pas de condition du type (6. 13); le problème 6.1 admet toujours une solution unique (27 bis).

(27) On désigne toujours par  $\sigma$  l'application « prolongement » de  $\mathcal{E}_{1,1}^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Sigma)$ ; si  $u \in \mathcal{E}_{1,1}^2(\Omega)$ , alors  $\frac{\partial}{\partial x_j} u$  est dans  $\mathcal{E}_{1,1}^2(\Omega)$ , de sorte que  $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right)$  est défini.

(27 bis) *Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Voici une remarque suggérée par M. B. Malgrange. Soit  $\Omega$  un ouvert connexe quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . On applique le paragraphe I avec  $V = \text{BL}(\Omega)$ ;  $Q = L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ ;  $Q' = L_c^2(\Omega) =$  espace des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$  à support compact;  $\tilde{V} = \text{BL}^0(\Omega)$  est un espace de Hilbert;  $Q'_0 =$  espace des  $f \in Q'$  avec  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ . On prend pour  $A$  et  $B$  les injections. La théorie s'applique. On résout ainsi un *problème de Neumann* pour  $\Delta$  avec  $\Omega$  quelconque. Remarques analogues pour les autres problèmes au limites. Si  $n \geq 3$ , on peut remplacer  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  par  $L_{\text{loc}}^q(\Omega)$ .

III. — Applications (II).

1. **Position du problème.** — On considère un ouvert  $\Omega$  connexe de  $\mathbb{R}^n$ . Sur  $\Omega$  on considère l'opérateur  $\Delta^2 + 1$  ( $\Delta =$  laplacien). Les problèmes aux limites les plus importants relativement à cet opérateur (mais non les seuls, cf. Pleijel [1]) consistent à trouver  $U$ , solution de

$$(1.1) \quad \Delta^2 U + U = F,$$

$F$  étant une distribution donnée sur  $\Omega$ ,  $U$  et  $F$  ayant des propriétés à préciser, et les couples de fonctions suivants ayant des valeurs données sur la frontière de  $\Omega$  :

- (a)  $U, \frac{\partial}{\partial n} U$  <sup>(28)</sup>;
- (b)  $\Delta U, \frac{\partial}{\partial n} \Delta U$ ;
- (c)  $U, \Delta U$ ;
- (d)  $\frac{\partial}{\partial n} U, \frac{\partial}{\partial n} \Delta U$ ;
- (e)  $U, \frac{\partial}{\partial n} \Delta U$ ;
- (f)  $\frac{\partial}{\partial n} U, \Delta U$ .

Les problèmes (a), ..., (d) <sup>(29)</sup> sont résolus par exemple dans Lions [1], (chap. I, § 2, n° 6).

Les problèmes (e) et (f) sont plus délicats. La raison en est essentiellement que dans la formule de Green (formelle)

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) v \, d\omega - \int_{\partial\Omega} (\Delta u) \left( \frac{\partial}{\partial n} v \right) \, d\omega + \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$$

les quantités  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta u$ ,  $v$  et  $\Delta u$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} v$ , apparaissent dans la même intégrale de surface.

On va s'en tirer en intégrant par parties  $\int_{\Omega} \Delta^2 u \Delta v \, dx$  et en utilisant le théorème du paragraphe I.

Pour cela, posons d'abord les problèmes de façon plus précise. On considère encore comme au paragraphe II (n° 1) les espaces  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{W}_{L^2}^1(\Omega)$  et l'on considère sous deux espaces vectoriels fermés,  $W_1$  et  $W_2$  de  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ , avec

$$(1.2) \quad \mathcal{W}_{L^2}^1(\Omega) \subset W_i \subset \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega) \quad (i = 1, 2).$$

On désigne par  $N(W_i, -\Delta)$ , l'espace des  $u \in W_i$ , tels que  $\Delta u$  soit dans  $L^2(\Omega)$ , et qui vérifient

$$(1.3) \quad (-\Delta u, v)_{L^2} = (u, v_1) \quad \text{pour tout } v \in W_i.$$

<sup>(28)</sup> De façon générale,  $\frac{\partial}{\partial n} f =$  dérivée normale de  $f$  sur  $\partial\Omega$ .

<sup>(29)</sup> Posés évidemment de façon plus précise.

On le munit de la norme dont le carré est  $\|u\|_1^2 + \|\Delta u\|_1^2$ ; pour cette norme,  $N(W_i, \Delta)$ , est un espace de Hilbert.

On désigne alors par  $\mathcal{H}$ , l'espace des  $u \in N(W_1, -\Delta)$ , tels que  $\Delta u \in N(W_2, -\Delta)$ . On munit  $\mathcal{H}$  de la norme dont le carré est  $\|u\|_1^2 + \|\Delta u\|_1^2 + \|\Delta^2 u\|_1^2$ . Pour cette norme,  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert.

*Exemple 1.1 :*  $W_1 = \mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ ,  $W_2 = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ . — Alors  $u \in \mathcal{H}$  signifie

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

*Exemple 1.2 :*  $W_1 = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ ,  $W_2 = \mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ . — Alors  $u \in \mathcal{H}$  signifie

$$\frac{\partial}{\partial n} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

*Exemple 1.3 :*  $W_1 = W_2 = \mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ . — Alors  $u \in \mathcal{H}$  signifie que  $u$  et  $\Delta u$  sont nuls sur  $\partial\Omega$ .

*Exemple 1.4 :*  $W_1 = W_2 = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ . — Alors  $u \in \mathcal{H}$  signifie que  $\frac{\partial}{\partial n} u$  et  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta u$  sont nuls sur  $\partial\Omega$ .

On pose maintenant le

*Problème 1.1.* — Trouver  $U$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$ , solution de

$$(1.1) \quad \Delta^2 U + U = F,$$

$F$  étant donné dans  $L^2(\Omega)$ , avec les conditions aux limites

$$(1.4) \quad h - U \in \mathcal{H},$$

$h$  étant donné dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$ , avec  $\Delta^2 h + h \in L^2(\Omega)$ .

Les problèmes (e), (f), (c), (d), correspondent respectivement aux exemples 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Les problèmes (c) et (d) — de façon plus générale, le problème 1.1 lorsque  $W_1 = W_2$  — ont été résolus de façon plus générale et plus simple que ce qui suit dans Lions [1]; mais la méthode n'est pas valable si  $W_1$  est différent de  $W_2$ . Les problèmes (a) et (b) (résolus dans Lions [1]) ne rentrent pas dans le cadre du problème 1.1.

**2. Résolution du problème 1.1.** — On va supposer que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym<sup>(30)</sup>. On suit les notations du paragraphe I. L'espace  $V$  du paragraphe I est ici l'espace des  $u$  dans  $N(W_1, -\Delta)$  tels que  $\Delta u \in W_2$ . Posons

$$(2.1) \quad (u, v)_V = (u, v)_{N(W_1, -\Delta)} + (\Delta u, \Delta v)_{W_2} \quad (31);$$

l'espace  $V$  est alors un espace de Hilbert. On pose ensuite

$$(2.2) \quad ((u, v)) = (u, v)_1 + (\Delta u, \Delta v)_1,$$

ce qui est une forme sesquilinéaire hermitienne, qui définit sur  $V$  une structure

<sup>(30)</sup> Sinon les problèmes aux limites correspondants ne sont pas résolus.

<sup>(31)</sup> De façon générale, si  $E$  est un espace de Hilbert,  $(u, v)_E =$  produit scalaire de  $u, v \in E$

préhilbertienne <sup>(32)</sup>. Cherchons  $Z : ((u, u)) = 0$  équivaut à  $u = \text{const}$  dans  $\Omega$ , et  $u \in W_1$ ; donc

$$(2.3) \quad \text{Si } 1 \in W_1, \quad Z = C, \quad \text{si } 1 \notin W_1, \quad Z = \{0\}.$$

L'hypothèse (H) du paragraphe I a lieu. En effet

PROPOSITION 2.1. — *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym. Alors :*

- (a) si  $1 \notin W_1$ ,  $V$  est un espace de Hilbert pour  $((u, v))$ .
- (b) si  $1 \in W_1$ ,  $\tilde{V} = V/C$  est un espace de Hilbert pour  $((\tilde{u}, \tilde{v}))$ .

*Démonstration.* — (a) Soit  $u_k$  une suite de Cauchy dans  $V$  pour  $\sqrt{((u, u))}$ . Donc  $u_k$  est une suite de Cauchy pour  $\|u\|_1$ , et comme  $1 \notin W_1$ , il résulte de la proposition 3.1 [§ II, (a)] que  $u_k \rightarrow u$  dans  $W_1$ . Par ailleurs  $\Delta u_k$  est une suite de Cauchy pour  $\|u\|_1$ , donc,  $\Omega$  étant un ouvert de Nikodym, il existe une suite de constantes  $c_k$  telles que  $\Delta u_k + c_k \rightarrow w$  dans  $\mathcal{E}_1^1(\Omega)$ . Mais comme  $u_k \rightarrow u$  dans  $W_1$ , on a  $\Delta u_k \rightarrow \mathcal{O}'(\Omega)$ , donc  $c_k$  est une suite convergente, et par conséquent  $\Delta u_k \rightarrow w - c = \Delta u$  dans  $\mathcal{E}_1^1(\Omega)$ , donc dans  $W_2$ , et par conséquent  $u_k \rightarrow u$  dans  $V$ , d'où la proposition dans ce cas (a).

(b) Soit  $\tilde{u}_k$  une suite de Cauchy dans  $\tilde{V}$  pour  $\sqrt{((\tilde{u}, \tilde{u}))}$ . D'après la proposition 3.1 [§ II, (b)],  $\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}$  dans  $\tilde{W}_1 = W_1/C$ , et comme au (a), il existe une suite de constantes  $c_k$  telles que  $\Delta u_k + c_k \rightarrow w$  dans  $\mathcal{E}_1^1(\Omega)$ . Mais comme précédemment,  $\Delta u_k$  converge dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$ , et l'on termine comme au (a).

On prend maintenant  $Q = L^2(\Omega)$ , donc  $Q' = L^2(\Omega)$ , puis  $\mathfrak{Z} = Z$  (donc  $\{0\}$  ou  $C$ ). On prend  $\Lambda = \Delta_2 + 1$ ; donc  $\Lambda$  est un isomorphisme de  $Z$  sur  $\mathfrak{Z}$  (isomorphisme identique).

Notons que, d'après le paragraphe II, on a les résultats suivants ( $\Omega$  étant un ouvert de Nikodym);

- a. Si  $1 \notin W_1$ ,  $-\Delta$  est un isomorphisme de  $N(W_1, -\Delta)$  sur  $L^2(\Omega)$ .
- b. Si  $1 \in W_1$ , on désigne par  $L_0^2(\Omega)$  l'espace des  $f \in L^2(\Omega)$  tels que

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0 \quad [L_0^2(\Omega) = Q_{\mathfrak{Z}}]$$

et l'on désigne par  $N_0(W_1, -\Delta)$  le sous-espace de  $N(W_1, -\Delta)$  formé des  $u$  tels que  $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$ . Alors  $-\Delta$  est un isomorphisme de  $N_0(W_1, -\Delta)$  sur  $L_0^2(\Omega)$ . En effet, soit  $f$  dans  $L_0^2(\Omega)$ ; alors il existe  $u$ , déterminée à une constante additive près, telle que  $-\Delta u = f$ . Donc si l'on impose la condition  $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$ ,  $u$  existe et est unique; donc  $-\Delta u = f, f \in L_0^2(\Omega)$ , admet une solution unique dans  $N_0(W_1, -\Delta)$ . Si  $f_k \rightarrow 0$  dans  $L_0^2(\Omega)$ , et si  $u_k \in N_0(W_1, -\Delta)$ , avec  $-\Delta u_k = f_k$ , on a  $\tilde{u}_k \rightarrow 0$  dans  $W_1/C$ ; il existe donc une suite de constantes  $c_k$  telles que

dans E.

<sup>(32)</sup> C'est cette structure que l'on considère désormais sur  $V$ .



$u_k + c_k \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ . Il en résulte que

$$\int_{\Omega} u_k(x) dx + c_k \text{mes}(\Omega) = c_k \text{mes}(\Omega) \rightarrow 0,$$

donc  $u_k \rightarrow 0$  dans  $W_1$ , et  $-\Delta u_k \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$ , donc  $u_k \rightarrow 0$  dans  $N_0(W_1, -\Delta)$ .

c. q. f. d.

Désignons dans tous les cas par  $G$  l'inverse de cet isomorphisme;  $G$  est donc un isomorphisme de  $L^2(\Omega)$  sur  $N(W_1, -\Delta)$  dans le cas *a* et de  $L_0^2(\Omega)$  sur  $N_0(W_1, -\Delta)$  dans le cas *b*. Pour tout  $\varphi$  dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$  on prend

$$(2.4) \quad A\varphi = G\varphi.$$

Vérifions que l'on a

$$(2.5) \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathcal{G}}; V).$$

En effet,  $A\varphi$  est dans  $N(W_1, -\Delta)$  ou  $N_0(W_1, -\Delta)$ , et  $-\Delta(A\varphi) = \varphi$ , donc est dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \subset W_2$ . Par conséquent  $A$  opère linéairement de  $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$  dans  $V$ , et il est immédiat que  $A$  est continu, d'où le résultat (2.5).

On prend pour opérateur  $B$  :

$$(2.6) \quad B = -\Delta.$$

On a bien

$$BA\varphi = \varphi \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{G}}.$$

L'opérateur  $B$  est continu de  $V$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $V$  étant muni de  $((u, v))$ . En effet, si  $u_k \rightarrow 0$  dans  $V$ , et si  $1 \notin W_1$ , alors

$$(2.7) \quad u_k \rightarrow 0 \quad \text{dans } W_1,$$

et il existe une suite de constantes  $c_k$  telles que

$$(2.8) \quad \Delta u_k + c_k \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega).$$

Mais on déduit de (2.7) que  $\Delta u_k \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$ , ce qui en comparant avec (2.8) montre que  $c_k \rightarrow 0$ , donc  $\Delta u_k \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ , donc en particulier dans  $L^2(\Omega)$ . Si maintenant  $1$  est dans  $W_1$ , il existe une suite de constantes  $d_k$  telles que

$$(2.9) \quad u_k + dk \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega),$$

d'où l'on déduit encore que  $\Delta u_k \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$  et l'on termine comme précédemment

*Construisons maintenant l'espace  $N$  du paragraphe I. C'est l'espace des  $u \in V$ , tels que  $\Delta^2 u + u$  soit dans  $L^2(\Omega)$ , c'est-à-dire que  $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$ , et tels que*

$$(2.10) \quad (\Delta^2 u + u, -\Delta v)_{L^2} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Mais dans (2.10)  $u$  et  $v$  sont dans  $V$ , donc, en particulier  $v$  est dans  $N(W_1, -\Delta)$  et  $u$  dans  $W_1$ ; donc, par définition de  $N(W_1, -\Delta)$  on a

$$(u, -\Delta v)_{L^2} = (u, v)_1,$$

de sorte que (2. 10) se réduit à

$$(2.11) \quad (\Delta^2 u, -\Delta v)_{L^2} = (\Delta u, \Delta v)_1 \quad \text{pour tout } v \in V,$$

Montrons la

PROPOSITION 2. 2. — *L'espace N coïncide avec l'espace  $\mathcal{N}$  construit page 246.*

Démonstration. — Il est évident que  $\mathcal{N} \subset N$ . Il reste à montrer que si  $u$  est dans  $N$ , alors  $u$  est dans  $\mathcal{N}$ , donc que  $\Delta u$  est dans  $N(W_2, -\Delta)$ , c'est-à-dire que

$$(2.12) \quad (\Delta^2 u, w)_{L^2} = -(\Delta u, w)_1 \quad \text{pour tout } w \in W_2.$$

D'après (2. 11), ceci a lieu pour les  $w$  de la forme

$$(2.13) \quad w = -\Delta v, \quad v \in V.$$

Si  $1 \notin W_1$ , quel que soit  $w$  dans  $W_2$ , il existe  $v$  dans  $N(W_1, -\Delta)$  solution de (2. 13). Alors  $v$  est dans  $V$ , et donc (2. 12) a lieu.

Si  $1 \in W_1$ , considérons une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , telle que  $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 1$ . Tout élément  $w$  de  $W_2$  s'écrit

$$(2.14) \quad w = \varphi \int_{\Omega} w(x) dx + w_0,$$

ce qui donne  $\int_{\Omega} w_0(x) dx = 0$ ;  $w_0$  est dans  $W_2$ . Il existe maintenant  $v$  dans  $V(W_2, -\Delta)$  tel que l'on ait

$$(2.15) \quad -\Delta v = w_0,$$

et comme  $w_0 \in W_2$ ,  $v$  est dans  $V$ , donc (2. 12) a lieu avec  $w = w_0$ . Comme (2. 12) a lieu avec  $w = \varphi$ , on a (2. 12) dans tous les cas, d'où la proposition.

Le théorème 3. 1 (§ 1) donne, alors

THÉORÈME 2. 1. — *Si l'ouvert  $\Omega$  est un ouvert de Nikodym, le problème 1. 1 admet une solution unique, dépendant continûment des données.*

Ce théorème résout, en particulier, les problèmes (e) et (f).

#### BIBLIOGRAPHIE.

ARONSZAJN :

- [1] *Studies in eigen value problems (Technical reports, University of Kansas, Lawrence).*

BROWDER :

- [1] *The Dirichlet and Vibration problem... (Proc. Nat. Acad. Sc., Vol. 38, n° 3, 1952, p. 230-235).*

DENY-LIONS :

- [1] *Sur les espaces du type de Beppo Levi (Ann. Inst. Fourier, 1955, p. 304-370).*  
 [2] *Espaces de Beppo Levi et applications (C. R. Acad. Sc., t. 239, 1954, p. 1174-1177).*

GÄRDING :

- [1] *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations (Math. Scand., t. 1, 1953, p. 55-72).*

LIONS :

- [1] *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, à paraître aux *Acta Math.*
- [2] *Problèmes aux limites (II)* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 2470-2472).
- [3] *Sur les problèmes de dérivée oblique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 266-268).

MINAKSHI-SUNDARAM :

- [1] *A generalization of Epstein  $\zeta$  functions* (with supplementary note by H. WEYL (*Canad. J. Math.*, vol. 8, n° 4, 1949, p. 320-327).

PLEIJEL :

- [1] *On green's functions...* (*Proc. of the symposium on spectral theory and differential problem*, Stillwater, Okl. 1951, p. 143).

SCHWARTZ :

- [1] *Théorie des distributions*, t. I, Paris, Hermann, 1950.
- [2] *Ibid.*, t. II, 1951.
- [3] *Problèmes aux limites pour opérateurs différentiels elliptiques*, Bruxelles, mai 1954.

SCHWARTZ-LIONS :

- [1] *Problèmes aux limites sur des espaces fibrés*, à paraître aux *Acta Math.*

SOBOLEFF :

- [1] *Applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*, Leningrad, 1950.

COURANT-HILBERT :

- [1] *Methoden der Math. Phys.*, Berlin, t. II, 1937.

