BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LÉAUTÉ

Théorème relative au déplacement d'une figure plane dans son plan

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 170-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__170_1>

Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane dans son plan; par M. H. Léauté.

(Séance du 10 avril 1878.)

Le théorème que nous voulons démontrer ici est le suivant :

Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan suivant une loi quelconque, si l'on considère à un instant donné tous les points situés sur une droite quelconque issue du centre instantané de rotation, les diamètres des trajectoires que décrivent ces points à l'instant considéré enveloppent une conique inscrite dans le triangle rectangle formé par le diamètre de la circonférence des inflexions issu du centre instantané de rotation, par la droite considérée et par la perpendiculaire à cette droite menée par son point d'intersection avec la circonférence des inflexions.

Soient C le centre instantané de rotation, O le centre de la circonférence des inflexions, A le point de cette circonférence diamétralement opposé à C, CM la droite considérée, M un point quelconque de cette droite, MP le diamètre de la trajectoire de M, γ l'angle que forme ce diamètre avec CM, m le point de rencontre de CM avec la circonférence des inflexions, P le point de rencontre du diamètre MP avec la perpendiculaire mA à CM, x la longueur Mm, y la longueur mP, a le diamètre de la circonférence des inflexions, ρ le rayon de courbure en M de la trajectoire de M, s l'arc de cette trajectoire, r la longueur CM.

On a

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\gamma,$$

et comme, d'après une propriété connue,

$$\frac{d\rho}{ds} = 3\operatorname{tang}\gamma,$$

on en déduit

$$\frac{r}{x} = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}.$$

Mais on sait que le rayon de courbure en un point M est donné par

$$\rho = \frac{r^2}{r - a\cos\theta};$$

on a donc

$$d\rho = \frac{r}{(r - a\cos\theta)^2}[(r - a\cos\theta)\,dr + r\cos\theta\,da - ra\sin\theta\,d\theta].$$

Il faut calculer les quantités dr, da et $d\theta$.

Or, à l'instant qui suit l'instant considéré, le point O est venu en O′, le point C en C′; la droite O′C′ coupe la droite CA en un point B, et, si l'on représente par α l'angle de OO′ avec CC′, par dc la longueur CC′, par b la longueur CB, on a

$$\begin{aligned}
dr &= -\,dc\sin\theta,\\
\frac{da}{2} &= \mathrm{OO'}\sin\alpha = dc\,\frac{a+2b}{2b}\,\mathrm{tang}\,\alpha,\\
d\theta &= -\,(\mathrm{CBC'} + \mathrm{CMC'}) = -\,dc\left(\frac{1}{b} + \frac{\cos\theta}{r}\right).
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $d\rho$, on trouve

$$d\rho = \frac{r\,dc}{(r - a\cos\theta)^2} \times\left(3a\sin\theta\cos\theta + r\frac{a-b}{b}\sin\theta + r\frac{a+2b}{b}\cos\theta\,\mathrm{tang}\,\alpha\right),$$

Remarquons maintenant que l'angle dont tourne la figure pour passer de la position correspondant à C à la position correspondant à C′ est $\frac{dc}{a}$, et que, par suite,

$$ds = r\frac{dc}{a};$$

on a alors

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{a}{(r - a\cos\theta)^2} \times\left(3a\sin\theta\cos\theta + r\frac{a-b}{b}\sin\theta + r\frac{a+2b}{b}\cos\theta\,\mathrm{tang}\,\alpha\right),$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{a}{x^2}(\mathrm{A}x + \mathrm{B}),$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{a-b}{b}\sin\theta + \frac{a+2b}{b}\cos\theta\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\mathrm{B} = a\frac{a+2b}{b}\,\frac{\cos\theta\sin(\theta+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Les quantités A et B sont des constantes à l'instant considéré, car a, b et α sont les mêmes à cet instant pour tous les points de la figure, et θ a la même valeur pour tous les points de la droite CM.

En portant cette valeur de $\frac{d\rho}{ds}$ dans $\frac{y}{x}$, on a

$$\frac{xy}{a} = \frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}{3}.$$

Les points M et P décrivent, par conséquent, deux divisions homographiques, et, dès lors, le diamètre MP enveloppe une conique tangente aux deux droites CM et mP.

Si maintenant nous cherchons le diamètre de la trajectoire du point C considéré comme un point marqué de la figure mobile, c'est-à-dire si nous cherchons la valeur de tangγ pour x égal à

$$-a\cos\theta,$$

nous avons, puisque r est nul,

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{1}{3}\,\frac{a}{a^2\cos^2\theta}\,3a\sin\theta\cos\theta = \operatorname{tang}\theta;$$

le diamètre du point C est donc CA, et par suite la conique trouvée est tangente à cette droite CA, ce qui complète le théorème énoncé.