BULLETIN DE LA S. M. F.

LEONCE LESIEUR

Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 161-193
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__161_0>

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 161 à 193.

SUR LES DEMI-GROUPES RÉTICULÉS SATISFAISANT A UNE CONDITION DE CHAINE

PAR M. L. LESIEUR.

Introduction.

En cherchant à obtenir une théorie unifiée des idéaux d'un anneau A ou d'un demi-groupe D satisfaisant à une condition de chaîne, j'ai été amené à étudier l'ensemble de ces idéaux au moyen de la théorie des treillis. Cet ensemble constitue en effet un *demi-groupe réticulé* [1] T quand on prend comme relation d'ordre la relation d'inclusion des ensembles. L'opération d'union est, pour un anneau, la réunion complétée, et, pour un demi-groupe, la réunion des idéaux. L'opération d'intersection est l'intersection au sens de la théorie des ensembles. L'opération de multiplication est celle des idéaux; elle est associative et distributive par rapport à l'union. T admet un *élément universel* u qui est l'idéal A ou D, tel que l'on ait pour tout idéal x la relation $x \leqq u$. T est *quasi-entier*, c'est-à-dire que le produit ab de deux idéaux quelconques a et b vérifie les relations $ab \leqq b$, $ab \leqq a$. T est *résidué*, le résiduel à droite $a \,.\!\cdot\, b$ étant l'idéal maximum x qui vérifie la relation $bx \leqq a$ et le résiduel à gauche $a \,\cdot\!.\, b$ étant l'idéal maximum x tel que $xb \leqq a$. Je suppose en outre que T satisfait à *une* condition de chaîne qui est soit la *condition de chaîne ascendante*, soit la condition de chaîne descendante pour les éléments d'un ensemble minoré, que j'appellerai *condition de chaîne descendante affaiblie*. Je désignerai l'ensemble de ces différentes hypothèses sous le nom de :

Condition (H). — T est un demi-groupe réticulé résidué quasi-entier avec élément universel, satisfaisant à la condition de chaîne ascendante ou à la condition de chaîne descendante affaiblie.

Cette condition (H) est remplie lorsque le mot résidué est remplacé par le mot *complet* [2] ([9], p. 130) [3]. Elle s'applique en particulier, comme nous l'avons vu, au treillis T_A des idéaux d'un anneau A, ou au treillis T_D des idéaux d'un demi-groupe D, lorsque A ou D satisfont à une condition de chaîne pour les idéaux.

---

(1) La terminologie est celle de M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot.
(2) On démontre que la condition ainsi obtenue est équivalente à la condition (H).
(3) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie indiquée à la fin.

On pourra se faire une idée des questions étudiées par le sommaire suivant :

1. Résiduels premiers d'un élément.
2. Radical.
3. Décomposition en éléments primaux.
4. Décomposition réduite. Théorème d'unicité.
5. Décomposition en éléments $\cap$-irréductibles.
6. Éléments primaires.
7. Premier cas de décomposition en éléments primaires.
8. Deuxième cas de décomposition en éléments primaires.
9. Troisième cas de décomposition en éléments primaires.
10. Théorèmes d'unicité.
11. Conditions suffisantes pour que la condition de chaîne descendante affaiblie entraîne la condition de chaîne ascendante.

Les quatre premiers paragraphes sont les plus généraux car ils ne font intervenir aucune autre hypothèse que la condition (H). Sauf en ce qui concerne T_A, dont la théorie est bien connue, les résultats obtenus sont pour la plupart originaux. Les références connues sont d'ailleurs indiquées.

Le paragraphe 5 établit l'existence d'une décomposition d'un élément $x \in T$ en intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles. Cette décomposition est immédiate lorsque T satisfait à la condition de chaîne ascendante ([9], p. 117). Lorsque T satisfait à la condition de chaîne descendante affaiblie, je l'établis moyennant une hypothèse supplémentaire : la relation

$$x \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} y_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (x \cap y_\alpha)$$

est supposée vérifiée pour les éléments y_α d'une chaîne minorée. Cette hypothèse est remplie quand T est $\cap$-continu; elle est donc valable pour T_A et pour T_D.

Le paragraphe 6 est une étude des éléments primaires du point de vue de leurs résiduels premiers.

Les paragraphes 7 et 8 établissent deux cas de décomposition en un nombre fini d'éléments primaires au moyen de la décomposition en éléments $\cap$-irréductibles et de deux conditions supplémentaires dont l'une est présentée au paragraphe 7 et l'autre au paragraphe 8. Lorsque la condition de chaîne descendante affaiblie est vérifiée, les théorèmes obtenus sont nouveaux. Lorsque la condition de chaîne ascendante est vérifiée, les théorèmes obtenus sont une amélioration des résultats de M. Ward et R. Dilworth [30], et J. Certaine [5], en ce sens que la modularité de T, supposée par ces auteurs, est ici remplacée par la semi-modularité. Ces théorèmes sont valables pour T_A et pour T_D dans des cas généraux comprenant le cas abélien.

Le troisième cas de décomposition en éléments primaires, traité au paragraphe 9, ne fait plus appel ni aux éléments $\cap$-irréductibles, ni à la semi-modularité, mais il est restreint à la condition de chaîne descendante affaiblie, et repose sur une condition supplémentaire vérifiée par T_A lorsque A est abélien, mais non par T_D.

On sait que si T_A vérifie la condition de chaîne descendante, il satisfait à la condition de chaîne ascendante. Par contre il n'en est pas de même pour T_D. Ce fait est expliqué au paragraphe 11 où il est montré que certaines des conditions rencontrées aux paragraphes précédents sont suffisantes pour que la condition de chaîne descendante affaiblie entraîne la condition de chaîne ascendante.

I. — Résiduels premiers d'un élément.

T est un demi-groupe réticulé satisfaisant à la condition (H) précisée dans l'introduction.

Propriété 1. 1. — *Toute chaîne de résiduels de a est finie* [3].

Supposons, par exemple, la condition de chaîne descendante pour les éléments $\geqq a$, et montrons qu'une chaîne ascendante de résiduels à gauche :

$$a \cdot. n_1 < a \cdot. n_2 < \ldots < a \cdot. n_k < \ldots$$

est finie. Formons les résiduels à droite :

$$a .\cdot (a \cdot. n_1) \geqq a .\cdot (a \cdot. n_2) \geqq \ldots \geqq a .\cdot (a \cdot. n_k) \geqq \ldots.$$

En vertu de la condition de chaîne descendante affaiblie, il existe k tel que

$$a .\cdot (a \cdot. n_k) = a .\cdot (a \cdot. n_{k'}) \qquad (k' > k).$$

D'où, en formant les résiduels à gauche de a par ces éléments :

$$a \cdot. (a .\cdot (a \cdot. n_k)) = a \cdot. (a \cdot. (a .\cdot n_{k'})) \qquad (k' > k),$$

c'est-à-dire, d'après un résultat établi dans [9] (exercice 1, p. 174),

$$a \cdot. n_k = a \cdot. n_{k'} \qquad (k' > k).$$

Définition 1. 1. — On appelle résiduel à gauche *propre* de $a \neq u$, un résiduel à gauche de la forme $a \cdot. n$ avec $n \nleqq a$.

Si T est *entier*, c'est-à-dire si u est élément unité, un résiduel à gauche propre est un résiduel à gauche différent de u. Si D est quasi-entier sans être entier, un résiduel à gauche propre peut être égal à u. Par exemple, si $u^2 \leqq a$, on a $a \cdot. u = u$, qui est donc un résiduel à gauche propre de a. Dans tous les cas, un résiduel à gauche non propre ne peut être que u, car $n \leqq a$ entraîne $a \cdot. n = u$.

Lemme 1. 1. — *Pour que x soit un résiduel à gauche, propre, de a, il faut et il suffit que*

$$x = a \cdot. (a .\cdot x), \qquad \text{avec} \quad a .\cdot x > a.$$

---

[3] Les propriétés 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 sont une généralisation de propriétés établies dans le cas commutatif entier noetherien par R. Apéry [1] en théorie des idéaux d'un anneau.

L'égalité est nécessaire et suffisante pour que x soit un résiduel à gauche de a ([9], exercice 1, p. 174); s'il est propre on a en plus $x = a \cdot . n$, avec $n \not\leqq a$, d'où $xn \leqq a$, et $n \leqq a . \cdot x$. La condition $n \not\leqq a$ entraîne donc $a . \cdot x \not\leqq a$, c'est-à-dire $a . \cdot x > a$.

On définit de façon analogue un résiduel x à droite, propre, de a. Il est caractérisé par la propriété

$$x = a . \cdot (a \cdot . x), \qquad \text{avec} \quad a \cdot . x > a.$$

Propriété 1. 2. — *Tout élément $a \neq u$ admet au moins un résiduel à gauche premier propre.*

En effet, l'ensemble des résiduels à gauche propres de a n'est pas vide puisqu'il contient $a \cdot . u$. D'après la propriété 1. 1, cet ensemble admet un élément maximal $p = a \cdot . n$. Si p n'était pas premier ([4]), il existerait b et c tels que $bc \leqq p$, $b \not\leqq p$, $c \not\leqq p$. On aurait ainsi : $b < p \cdot . c$, donc $p < p \cdot . c$. Or, $p \cdot . c = (a \cdot . n) \cdot . c = a \cdot . (cn)$ est un résiduel à gauche de a. Ce résiduel est propre, car $cn \leqq a$ entraînerait $c \leqq a \cdot . n = p$. Donc p ne serait pas maximal, et, par suite, p est premier.

Propriété 1. 3. — *Si p est un résiduel à gauche premier propre pour $a \neq u$, et si $b \not\leqq p$, p est un résiduel à gauche premier propre pour $a . \cdot b$.*

Formons

$$m = (a . \cdot b) \cdot . [(a . \cdot b) . \cdot p].$$

On a ([9], exercice 1, p. 174) : $p \leqq m$, puis

$$(a . \cdot b) . \cdot m = (a . \cdot b) . \cdot [(a . \cdot b) \cdot . ((a . \cdot b) . \cdot p)] = (a . \cdot b) . \cdot p = a . \cdot bp \geqq a . \cdot p.$$

D'où

$$a . \cdot bm \geqq a . \cdot p \qquad \text{et} \qquad bm \leqq a \cdot . (a . \cdot bm) \leqq a \cdot . (a . \cdot p) = p.$$

Or, p est premier et l'on a $b \not\leqq p$; on en déduit $m \leqq p$, d'où $p = m$.

De plus, p est propre pour $a . \cdot b$; en effet, si p n'était pas propre, on aurait d'après le lemme 1.1, $a . \cdot bp = a . \cdot b$, ce qui entraînerait $a . \cdot p \leqq a . \cdot b$, d'où $a \cdot . (a . \cdot p) \geqq a \cdot . (a . \cdot b) \geqq b$, c'est-à-dire $p \geqq b$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Propriété 1.4. — *Tout élément $a \neq u$ n'admet qu'un nombre fini de résiduels à gauche (ou à droite) premiers, propres.*

Parmi les résiduels à gauche de a, premiers et propres, choisissons en un maximal b_1, et formons $a_1 = a . \cdot b_1$.

([4]) Rappelons que p est premier si les relations $bc \leqq p$, $b \not\leqq p$, $c \not\leqq p$ sont incompatibles ([9], p. 142). Même dans le cas des idéaux d'un anneau A non commutatif, cette définition est la mieux adaptée, et non pas celle où interviennent les éléments de l'anneau (*Cf.* N. Mac Coy, [23]).

On a, d'après le lemme 1.1 :

$$a < a_1.$$

Soit p un résiduel à gauche premier propre de a, distinct de b_1.

On a donc $b_1 \not\leqq p$, et p est un résiduel à gauche propre pour a_1, d'après la propriété 1.3. Tous les résiduels à gauche premiers propres de a, sauf peut-être b_1, sont donc des résiduels à gauche premiers propres de a_1. On choisit parmi eux un résiduel à gauche maximal premier propre, soit b_2, et l'on forme

$$a_2 = a_1 \mathbin{.\cdot} b_2 = a \mathbin{.\cdot} b_1 b_2$$

qui est tel que $a_1 < a_2$ et qui admet nécessairement parmi ses résiduels à gauche premiers et propres ceux de a_1, donc ceux de a.

En poursuivant ce raisonnement, on voit que l'existence d'une infinité de résiduels à gauche premiers et propres pour a entraînerait l'existence d'une chaîne infinie de résiduels à droite de a, ce qui est impossible d'après la propriété 1.1. La propriété 1.4 est donc démontrée ainsi que les deux suivantes :

Propriété 1.5. — *Il existe un nombre fini d'éléments premiers $p_i \geqq a$ tels que $\prod_{i=1}^{i=k} p_i \leqq a$.*

Il suffit de prendre pour p_i les éléments premiers intervenant dans la formation de la chaîne précédente $a < a_1 < a_2 < \ldots$. On aboutit nécessairement à un élément sans résiduel à gauche premier propre, donc égal à u, c'est-à-dire

$$a_{k-2} \mathbin{.\cdot} p_{k-1} = u = p_k \qquad \text{ou} \qquad a \mathbin{.\cdot} \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_i\right) = p_k,$$

d'où

$$\prod_{i=1}^{k} p_i \leqq a.$$

Parmi ces éléments p_i figurent tous les résiduels à gauche premiers propres de a et, éventuellement, d'autres éléments premiers qui sont tous des résiduels *mixtes* de la forme

$$(a \mathbin{.\cdot} b) \mathbin{\cdot.} c \quad (^5).$$

Propriété 1.6. — *Il n'existe qu'un nombre fini d'éléments premiers minimaux $p \geqq a$. Ce sont, dans le cas non commutatif, des résiduels ou des résiduels mixtes de a et, dans le cas commutatif, des résiduels de a.*

Considérons les éléments premiers $p_i \geqq a$ vérifiant la propriété 1.5.

Soit $p \geqq a$ un élément premier minimal.

---

(5) On peut se demander si les résiduels premiers mixtes de a sont en nombre fini. La réponse est affirmative dans le cas commutatif d'après la propriété 1.4. La question reste posée dans le cas non commutatif.

On a donc

$$\prod_{i=1}^{k} p_i \leqq p$$

et il existe un indice i tel que $p_i \leqq p$.

On en déduit $p = p_i$, et les éléments premiers minimaux $p \geqq a$ sont les éléments p_i minimaux qui figurent dans la propriété 1.5 ([6]).

Nous utiliserons en outre, la propriété suivante :

Propriété 1.7. — *Pour que $a \mathbin{.\cdot} n = a$, il faut et il suffit que*

$$n \not\leqq p_i$$

où les éléments $p_i (i = 1, 2, \ldots, k')$ sont les résiduels à gauche premiers maximaux propres de a.

Supposons $n \leqq p$, où p est un résiduel à gauche de a, premier et propre. On a donc d'après le lemme 1.1, $a \mathbin{.\cdot} p > a$.

Formons

$$a \mathbin{.\cdot} n \geqq a \mathbin{.\cdot} p > a, \qquad \text{d'où} \qquad a \mathbin{.\cdot} n > a.$$

Inversement, supposons $a \mathbin{.\cdot} n > a$; si $a_1 = a \mathbin{\cdot.} (a \mathbin{.\cdot} n) = u$, u est résiduel à gauche premier propre de a et la propriété est démontrée. Sinon, $a_1 \neq u$ admet un résiduel à gauche premier propre p et l'on a $n \leqq a_1 \leqq p$; de plus, p est résiduel à gauche de a, car

$$p = a_1 \mathbin{\cdot.} n_1 = (a \mathbin{\cdot.} (a \mathbin{.\cdot} n)) \mathbin{\cdot.} n_1 = a \mathbin{\cdot.} (n_1 (a \mathbin{.\cdot} n)).$$

C'est aussi un résiduel propre de a car $n_1 (a \mathbin{.\cdot} n) \leqq a$ entraîne $a \mathbin{.\cdot} n \leqq a \mathbin{.\cdot} n_1$, d'où $a \mathbin{\cdot.} (a \mathbin{.\cdot} n) \geqq a \mathbin{\cdot.} (a \mathbin{.\cdot} n_1) \geqq n_1$, soit $a_1 \geqq n_1$, ce qui est impossible.

La Propriété 1.7 est démontrée en faisant intervenir tous les résiduels à gauche premiers propres de a; la restriction aux résiduels à gauche premiers propres maximaux ne change rien.

L'élément n étant fixé, l'application $a \to (na) \mathbin{.\cdot} n$ est une application de fermeture considéré par P. Dubreil [31]. Pour que a soit fermé par rapport à n, c'est-à-dire ponr que $a = na \mathbin{.\cdot} n$, il suffit que $a = a \mathbin{.\cdot} n$. La propriété 1.7 donne une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

II. — Radical.

T est toujours un demi-groupe réticulé satisfaisant à la condition (H).

Théorème 2.1. — *Les éléments x pour lesquels il existe un nombre*

([6]) On en déduit l'unicité des p_i minimaux intervenant dans la propriété 1.5. Cette propriété 1.5 s'applique en particulier aux treillis T_A et T_D des idéaux d'un anneau A ou d'un demi-groupe D non commutatif satisfaisant à une condition de chaîne. Elle a été établie pour un anneau nœtherien non commutatif, par D. C. Murdoch [34].

naturel $m(x)$ tel que

$$x^m \leqq a$$

admettent un élément maximum r, et l'on peut prendre $m \leqq k$, où k est un nombre naturel fixe qui dépend de a.

Définition 2.1. — Cet élément r s'appelle le *radical* de a.

Supposons

$$x^m \leqq a.$$

Considérons les éléments premiers p_i intervenant dans la propriété 1.5, qui vérifient

$$p_i \geqq a \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{k} p_i \leqq a.$$

On a donc

$$x^m \leqq p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On en déduit, les p_i étant premiers,

$$x \leqq p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et par suite

$$x \leqq r = \bigcap_{i=1}^{k} p_i.$$

D'ailleurs, la relation

$$r \leqq p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad \text{entraîne} \quad r^k \leqq \prod_{i=1}^{k} p_i \leqq a,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Cette démonstration donne aussi l'interprétation suivante du radical.

Théorème 2.2. — *Le radical r de a est l'intersection des éléments premiers minimaux $p_i \geqq a$. Si le produit est commutatif, r est un résiduel de a.*

On a vu, en effet (propriétés 1.5 et 1.6), que chaque p_i est un résiduel de a, de la forme

$$(a \cdot\!\cdot b) \cdot\!\cdot c,$$

c'est-à-dire, dans le cas commutatif,

$$p_i = a : n_i, \quad \text{d'où} \quad r = \bigcap_{i=1}^{k} (a : n_i) = a : \left(\bigcup_{i=1}^{k} n_i \right).$$

Dans le cas particulier où le demi-groupe réticulé T possède un zéro ($0x = x0 = 0$, $x \geqq 0$), le théorème 2.1 donne le cas particulier suivant obtenu en prenant $a = 0$.

Théorème 2.3. — *L'union des éléments nilpotents de* T *est un élément nilpotent r. L'union b d'une infinité d'éléments nilpotents b_α est un élément nilpotent.*

On a, en effet, $b \leqq r$, d'où $b^k \leqq r^k = 0$ et $b^k = 0$.

Les hypothèses faites sur T peuvent être généralisées de la façon suivante :

Soit G un gerbier ([7]) avec élément maximum u. Considérons le sous-gerbier T des éléments quasi-entiers de G. Soit $a \in T$, et $x \in G$ un élément quasi-entier à gauche tel que $x^m \leqq a$. On a la propriété suivante, bien connue pour le cas $a = 0$ dans la théorie des idéaux à gauche d'un anneau ([8]).

Propriété 2.1. — *a étant un élément quasi-entier, l'élément x quasi-entier à gauche, tel que* $x^m \leqq a$, *est inférieur ou égal à l'élément* $x' = x \cup xu$, *quasi-entier, qui vérifie* $x'^m \leqq a$.

Montrons que x' est quasi-entier :

$$ux' = ux \cup uxu \leqq x \cup xu = x',$$
$$x'u = xu \cup xuu \leqq xu \leqq x'.$$

De plus :

$$x'^m = (x \cup xu)^m \leqq x^m \cup x^m u \leqq a \cup au = a.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.4. — *Si le sous-gerbier* T *des éléments quasi-entiers d'un gerbier* G *avec élément universel u constitue un demi- groupe* T *réticulé résidué, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie, il existe un élément maximum parmi les éléments x de* G *quasi-entiers à gauche (ou à droite) qui vérifient*

$$x^m \leqq a,$$

a étant un élément quasi-entier de G.

Cet élément maximum est, en effet, d'après le théorème 2.1 et la propriété 2.1, le radical r de a dans T.

En particulier, si T possède un zéro, on a le théorème suivant, où les hypothèses du théorème 2.4 sont conservées :

Théorème 2.5. — *L'union des éléments nilpotents de* G *quasi-entiers à gauche (ou à droite), est un élément nilpotent quasi-entier* ([9]).

Exemples. 1. En appliquant le théorème 2.5 aux idéaux à gauche d'un anneau, on retrouve le théorème suivant de Hopkins-Brauer ([10]) :

([7]) Un gerbier est un demi-groupe demi-réticulé (*voir* [9], p. 128).

([8]) *Cf.* par exemple, N. Jacobson [14], p. 63.

([9]) J'ai énoncé ce théorème dans les Notes [17] et [18] sous le nom de théorème de Hopkins, avec une démonstration différente.

([10]) Ce théorème a été établi par Ch. Hopkins [12] dans le cas non commutatif en supposant la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche. R. Brauer [4] a remarqué que la condition de chaîne descendante pour les idéaux bilatères suffisait. Leurs démonstrations ne s'appliquent pas ici, car elles font intervenir les éléments de l'anneau; il en est de même des autres démonstrations données par J. Levitzki [21], N. Jacobson [14], p. 63; P. Samuel [25] (chap. I, th. 1).

A *étant un anneau quelconque dont les idéaux bilatères satisfont à la condition de chaîne descendante, la réunion complétée des idéaux à gauche (ou à droite) nilpotents est un idéal bilatère nilpotent qu'on appelle le radical de* A.

2. Le théorème 2.5 s'applique aussi aux idéaux à gauche (ou à droite) d'un demi-groupe avec zéro. On obtient alors le théorème de Hopkins pour les idéaux à gauche d'un demi groupe avec zéro, dont les idéaux satisfont à la condition de chaîne descendante. Il a été signalé aussi par M. Teissier [27], postérieurement à ma Note [17], et, plus récemment, par K. Iseki [13].

Le théorème 2.4 s'applique aux idéaux à gauche (ou à droite) d'un demi-groupe quelconque, avec ou sans zéro, dont les idéaux bilatères satisfont à la condition de chaîne descendante affaiblie. Il en est ainsi, en particulier pour les demi-groupes D ayant un noyau de Suschkewitch N et ne possédant pas d'autres idéaux bilatères que N et D, ou demi-groupes *simples* au sens de S. Schwarz [26].

On énoncera de même les théorèmes obtenus en remplaçant les idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe par les ensembles suivants :

3. L'ensemble des idéaux particuliers d'un demi-groupe considérés par A. Clifford [6] et M. Ward et R. Dilworth [29], sous le nom *ova*.

4. L'ensemble des idéaux à gauche (ou à droite) d'un *annoïde* ([11]).

5. Le sous-treillis des éléments $x \leq e$ appartenant à un demi-groupe réticulé résidué avec élément unité e.

6. Considérons un *treillis distributif pseudo-relativement complémenté* (G. Birkhoff, [2], p. 147) avec élément universel, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie. En prenant pour multiplication l'opération d'intersection, on obtient un demi-groupe réticulé satisfaisant à la condition (H). Le radical de a est a; un élément premier est un élément $\cap$-irréductible et réciproquement. Le théorème 2.2 donne alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6. — T *étant un treillis distributif pseudo-relativement complémenté avec élément universel, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie, tout élément a est l'intersection d'un nombre fini d'éléments p_i $\cap$-irréductibles. Ceux-ci sont les éléments $\cap$-irréductibles minimaux $\geq a$; ce sont aussi des pseudo-compléments relatifs de la forme $p_i = a : n_i$.*

Le treillis T satisfait à la loi de $\cap$-distributivité générale et la décomposition obtenue devient un cas particulier du théorème 5.1 qui sera établi plus loin.

([11]) Un annoïde est un demi-groupe muni d'une ou de plusieurs autres opérations distribuées par la multiplication (« ringoïd » de G. Birkhoff [2] p. 203). Ses idéaux à gauche sont des complexes fermés pour ces opérations et permis à gauche pour la multiplication. Ils ont été étudiés dans le cas commutatif par V. S. Krishnan [15].

III. — Décomposition en éléments primaux.

Étant donné un treillis T, les problèmes de décomposition consistent à chercher une représentation de tout élément $x \in T$ par l'intersection d'un nombre fini d'éléments d'un sous-ensemble S de T. On dit alors que x est $\cap$-*expressible* par rapport à S, et que S est $\cap$-*générateur* de T ([12]).

Nous allons résoudre ce problème d'existence, sans autres hypothèses sur T que la condition (H), lorsque S est l'ensemble des éléments primaux de T.

Définition 3.1. — On dit qu'un élément est *primal* ([13]) à droite si les relations

$$a \mathbin{.\cdot} n_1 > a, \qquad a \,.\, n_2 > a$$

entraînent

$$(a \mathbin{.\cdot} n_1) \cap (a \mathbin{.\cdot} n_2) > a.$$

On définit de même un élément primal à gauche et un élément primal, c'est-à-dire un élément primal à droite et à gauche.

On sait ([9], p. 117) qu'un ensemble S $\cap$-générateur de T doit contenir l'ensemble des éléments $\cap$-irréductibles.

Il en est bien ainsi pour l'ensemble des éléments primaux à droite, d'après la propriété suivante :

Propriété 3.1. — *Tout élément $\cap$-irréductible est primal.*

Si a n'était pas primal à droite, il existerait deux éléments n_1 et n_2 vérifiant les relations

$$a \mathbin{.\cdot} n_1 > a, \qquad a \mathbin{.\cdot} n_2 > a, \qquad (a \mathbin{.\cdot} n_1) \cap (a \mathbin{.\cdot} n_2) = a,$$

ce qui est impossible lorsque a est supposé $\cap$-irréductible.

Il est facile de caractériser un élément primal à droite au moyen de ses résiduels premiers à gauche et propres.

Propriété 3.2. — *Pour que a soit primal à droite, il faut et il suffit qu'il n'admette qu'un résiduel premier à gauche maximal propre.*

En effet, si a n'admet qu'un résiduel premier à gauche maximal propre p, la condition $a \mathbin{.\cdot} n > a$ équivaut à $n \leq p$, d'après la propriété 1.7. On a donc

$$(a \mathbin{.\cdot} n_1) \cap (a \mathbin{.\cdot} n_2) = a \mathbin{.\cdot} (n_1 \cup n_2) > a.$$

La condition est donc suffisante.

Elle est aussi nécessaire, car si a admettait deux résiduels premiers maximaux distincts propres p_1 et p_2, on aurait d'après la propriété 1.7 :

$$a \mathbin{.\cdot} p_1 > a, \qquad a \mathbin{.\cdot} p_2 > a, \qquad (a \mathbin{.\cdot} p_1) \cap (a \mathbin{.\cdot} p_2) = a \,.\, (p_1 \cup p_2) = a.$$

([12]) *Voir* [9], p. 116.

([13]) La notion d'idéal primal a été introduite dans la théorie des idéaux d'un anneau commutatif par L. Fuchs [11].

Définition 3.2. — Le résiduel premier à gauche propre maximal de a, supposé primal à droite, sera désigné par *résiduel premier* p_a *associé à* a.

THÉORÈME 3.1. — *Tout élément a non primal à droite est intersection d'un nombre fini d'éléments primaux à droite, qui sont des résiduels à droite de a.*

L'élément a n'étant pas primal à droite, on a

$$a = (a \mathbin{.\!\cdot} n_1) \cap (a \mathbin{.\!\cdot} n_2), \qquad a \mathbin{.\!\cdot} n_1 > a, \qquad a \mathbin{.\!\cdot} n_2 > a.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant le théorème faux pour a; il en résulte que $a \mathbin{.\!\cdot} n_1$ ou $a \mathbin{.\!\cdot} n_2$ sont non primaux à droite et que le théorème ne s'applique pas à l'un au moins d'entre eux, soit $a_1 = a \mathbin{.\!\cdot} n_1$.

En répétant ce raisonnement, on trouverait une chaîne infinie $a < a_1 < a_2 < \ldots$ d'éléments dont chacun est résiduel à droite du précédent, donc d'éléments résiduels à droite de a, ce qui est contraire à la propriété 1.1.

THÉORÈME 3.2. — *Tout élément a non primal est intersection d'un nombre fini d'éléments primaux (à droite et à gauche) qui sont des résiduels ou des résiduels mixtes de a.*

La démonstration du théorème 3.2 utilise la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.3. — *Toute chaîne ascendante $a < a_1 < a_2 < \ldots$ d'éléments dont chacun est résiduel d'un côté ou résiduel mixte du précédent est finie.*

La propriété est immédiate avec la condition de chaîne ascendante. Supposons donc vérifiée la condition de chaîne descendante affaiblie. On a, en prenant des résiduels mixtes :

$$a_1 = (a \mathbin{.\!\cdot} b) \mathbin{\cdot\!.} c, \qquad a_2 = (a_1 \mathbin{.\!\cdot} b_1) \mathbin{\cdot\!.} c_1, \qquad a_3 = (a_2 \mathbin{.\!\cdot} b_2) \mathbin{\cdot\!.} c_2, \qquad \ldots.$$

ou

$$a_2 = (a \mathbin{.\!\cdot} bb_1) \mathbin{\cdot\!.} c_1 c, \qquad a_3 = (a \mathbin{.\!\cdot} bb_1 b_2) \mathbin{\cdot\!.} c_2 c_1 c, \qquad \ldots$$

La chaîne descendante

$$a \cup b \geqq a \cup bb_1 \geqq a \cup bb_1 b_2 \geqq \ldots$$

d'éléments $\geqq a$ a ses termes tous égaux à partir d'un certain rang. Il en est donc de même pour les termes de la chaîne ascendante constituée par les éléments

$$a \mathbin{.\!\cdot} (a \cup b) = a \mathbin{.\!\cdot} b, \qquad a \mathbin{.\!\cdot} (a \cup bb_1) = a \mathbin{.\!\cdot} bb_1, \qquad a \mathbin{.\!\cdot} (a \cup bb_1 b_2) = a \mathbin{.\!\cdot} bb_1 b_2, \qquad \ldots.$$

La chaîne donnée se présente donc à partir d'un certain rang comme une chaîne de résiduels à gauche d'un même élément, et cette chaîne est finie d'après la propriété 1.1.

Revenons à la démonstration du théorème. L'élément a n'étant pas primal n'est pas primal à droite, par exemple, et l'on a

$$a = a \,.\, n_1 \cap a \mathbin{.\!\cdot} n_2, \qquad a \mathbin{.\!\cdot} n_1 > a, \qquad a \mathbin{.\!\cdot} n_2 > a.$$

En supposant le théorème faux pour a, les éléments $a_1 = a \mathbin{.\!\cdot} n_1$ et $a'_1 = a \mathbin{.\!\cdot} n_2$

auraient la propriété suivante : l'un au moins d'entre eux n'est pas primal et le théorème ne lui est pas applicable. Soit a_1 cet élément. En répétant ce raisonnement, on trouverait une chaîne infinie $a < a_1 < \ldots < a_k < \ldots$ d'éléments dont chacun serait résiduel à droite ou à gauche du précédent, ce qui serait contraire à la propriété 3.3.

IV. — Décomposition réduite. Théorème d'unicité.

Sous la forme précédente, il n'y a pas unicité des composantes, ni même de leur nombre, comme le montre un exemple emprunté à la théorie des idéaux d'un anneau, donné par L. Fuchs [11]. Pour obtenir une décomposition plus précise, nous allons comparer les résiduels à gauche premiers propres de a à ceux des éléments a_i qui interviennent dans la décomposition.

Propriété 4.1. — *Dans une décomposition quelconque $a = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_m$, tout résiduel à gauche premier propre de a est un résiduel à gauche premier propre de l'un des $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$.*

On peut évidemment se ramener au cas de deux composantes. Soit $a = a_1 \cap a_2$. Formons

$$a \mathbin{.\!\cdot} p = (a_1 \mathbin{.\!\cdot} p) \cap (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p),$$

puis

$$p = a \mathbin{\cdot\!.} (a \mathbin{.\!\cdot} p) = [a_1 \mathbin{\cdot\!.} ((a_1 \mathbin{.\!\cdot} p) \cap (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p))] \cap [a_2 \mathbin{\cdot\!.} ((a_1 \mathbin{.\!\cdot} p) \cap (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p))],$$

d'où

$$p \geqq (a_1 \mathbin{\cdot\!.} (a_1 \mathbin{.\!\cdot} p)) \cap (a_2 \mathbin{\cdot\!.} (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p)) \geqq p,$$

et par conséquent :

$$p = (a_1 \mathbin{\cdot\!.} (a_1 \mathbin{.\!\cdot} p)) \cap (a_2 \mathbin{\cdot\!.} (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p)).$$

Or un élément premier p est $\cap$-irréductible ([14]). On en déduit :

$$p = a_1 \mathbin{\cdot\!.} (a_1 \mathbin{.\!\cdot} p) \qquad \text{ou} \qquad p = a_2 \mathbin{\cdot\!.} (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p)$$

et p est un résiduel premier à gauche de a_1 ou a_2, soit par exemple a_1. Si p n'était pas propre pour a_1, on aurait $a_1 \mathbin{.\!\cdot} p = a_1$; on en déduirait

$$u = p = a_2 \mathbin{\cdot\!.} (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p);$$

p serait donc un résiduel à gauche premier de a_2. Si p était impropre pour a_2 on aurait $a_2 \mathbin{.\!\cdot} p = a_2$ et

$$a \mathbin{.\!\cdot} p = (a_1 \mathbin{.\!\cdot} p) \cap (a_2 \mathbin{.\!\cdot} p) = a,$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse.

La réciproque de la propriété 4.1 n'est pas vraie, mais les décompositions suivantes, appelées réduites, vont jouer un rôle important dans les théorèmes d'unicité.

([14]) En effet, si l'on avait $p = b \cap c$, avec $b > p$, $c > p$, on en déduirait $bc \leqq b \cap c = p$, d'où puisque p est premier, $b \leqq p$ ou $c \leqq p$.

Définition 4.1. — On appelle *décomposition réduite* à droite

$$a = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_m$$

une décomposition en éléments $a_i \neq u$ dans laquelle $a_i \cdot\cdot\, n > a_i$ entraîne $a \cdot\cdot\, n > a$.

On définit de même une décomposition réduite à gauche, ainsi qu'une décomposition réduite (à droite et à gauche).

On a immédiatement la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4.2. — *Pour qu'une décomposition soit réduite à droite, il faut et il suffit que tout résiduel à gauche premier maximal propre de $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ soit contenu* ([15]) *dans l'un au moins des résiduels à gauche premiers maximaux propres de a.*

Une décomposition réduite quelconque permet d'obtenir une décomposition réduite plus particulière satisfaisant à la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4.3. — *S'il existe une décomposition réduite à droite de $a \neq u$ en éléments primaux à droite, on peut trouver une décomposition de a réduite à droite en éléments primaux à droite tels que leurs résiduels premiers associés soient incomparables* ([16]).

Soit p_i le résiduel premier associé à a_i. Parmi les $p_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, considérons les maximaux $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}$. L'indice i_j étant fixé, soit A_{i_j} l'intersection des a_i pour lesquels on a $p_i \leqq p_{i_j}$. On peut donc écrire :

$$a = \bigcap_{j=1, 2, \ldots, s} A_{i_j}, \qquad \text{avec} \quad A_{i_j} \neq u.$$

Nous allons montrer que cette décomposition satisfait à la propriété 4.3. Vérifions d'abord que A_{i_1} est primal à droite avec p_{i_1} comme résiduel premier associé. D'après la propriété 4.1, tout résiduel à gauche premier propre maximal de A_{i_1} est contenu dans p_{i_1}. D'autre part, on a

$$a = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}.$$

Si p_{i_1} n'était pas contenu dans un résiduel à gauche premier propre maximal de A_{i_1}, on aurait $A_{i_1} \cdot\cdot\, p_{i_1} = A_{i_1}$, et en vertu de $A_{i_j} \cdot\cdot\, p_{i_1} = A_{i_j} (j > 1)$, $a \cdot\cdot\, p_{i_1} = a$. Comme on a $a_{i_1} \cdot\cdot\, p_{i_1} > a_{i_1}$, la décomposition donnée ne serait pas réduite à droite. Il en résulte que p_{i_1} est bien le seul résiduel à gauche premier propre maximal de A_{i_1}. On démontre de même que tous les A_{i_j} sont primaux à droite, avec p_{i_j} comme résiduel premier associé. De plus la décomposition $a = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}$ est réduite à droite d'après la propriété 4.2.

THÉORÈME 4.1. (Unicité). — *Deux décompositions de a réduites à droite, en éléments primaux à droite dont les résiduels premiers associés sont incom-*

([15]) b est contenu dans c signifie $b \leqq c$.

([16]) b et c sont incomparables lorsque $b \nleqq c$, $c \nleqq b$.

parables, admettent le même nombre de composantes avec les mêmes éléments premiers associés.

Soit

$$a = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_m$$

une décomposition en éléments a_i primaux à droite dont les résiduels premiers associés satisfont aux hypothèses du théorème. Nous allons montrer que ces éléments p_i sont les résiduels à gauche premiers propres maximaux de a. En effet, la décomposition étant réduite à droite, p_i est contenu dans un résiduel à gauche p'_i premier propre maximal de a (propriété 4.2). D'après la propriété 4.1, p'_i est un résiduel à gauche premier propre de l'un des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_m$. On a donc

$$p_i \leqq p'_i \leqq p_j.$$

Comme p_i et p_j sont incomparables, on a

$$p_i = p_j = p'_i.$$

Inversement, tout résiduel à gauche p'_i premier propre maximal de a est, d'après la propriété 4.1, un résiduel à gauche propre de l'un des éléments a_i et il est par suite contenu dans l'un des p_i qui à son tour est contenu dans un résiduel à gauche premier propre maximal de a, soit p''_i. On a donc

$$p'_i \leqq p_i \leqq p''_i,$$

d'où résulte $p'_i = p_i$.

Théorème 4.2. (Existence). — *Tout élément a non primal à droite admet une décomposition réduite à droite en éléments a_i primaux à droite et résiduels à droite de a, dont les résiduels premiers associés sont incomparables.*

D'après la propriété 4.3, il suffit d'établir l'existence d'une décomposition réduite à droite en résiduels primaux à droite pour tout élément a non primal à droite. On utilise à cet effet le lemme suivant :

Lemme 4.1. — *Tout élément a non primal à droite admet une décomposition réduite à droite en deux résiduels à droite $> a$.*

L'élément a n'étant pas primal à droite, on peut écrire :

$$a = (a \cdot\!\cdot\, n_1) \cap (a \cdot\!\cdot\, n_2), \qquad \text{avec} \quad a \cdot\!\cdot\, n_1 > a, \qquad a \cdot\!\cdot\, n_2 > a.$$

Si un résiduel à gauche premier propre maximal p_1 de $a \cdot\!\cdot\, n_1$ vérifie $a \cdot\!\cdot\, p_1 = a$, on a

$$a = (a \cdot\!\cdot\, n_1 p_1) \cap (a \cdot\!\cdot\, n_2 p_1) = (a \cdot\!\cdot\, n_1 p_1) \cap (a \cdot\!\cdot\, u_2),$$

avec

$$a < a \cdot\!\cdot\, n_1 < a \cdot\!\cdot\, n_1 p_1.$$

En répétant ce raisonnement, on aboutit d'après la propriété 1.1 à une décomposition

$$a = (a \cdot\!\cdot\, m_1) \cap (a \cdot\!\cdot\, n_2)$$

dans laquelle les résiduels à gauche propres p de $a \,.\!\cdot m_1$ vérifient tous $a \,.\!\cdot p > a$. De même on peut trouver une décomposition

$$a = (a \,.\!\cdot m_1) \cap (a \,.\!\cdot m_2)$$

pour laquelle les résiduels relatifs à $a \,.\!\cdot m_2$ ont la même propriété. Cette décomposition est bien une décomposition réduite à droite.

Appliquons le lemme 4.1 à la démonstration du théorème. Si le théorème n'était pas vrai pour a, l'un au moins des éléments $a \,.\!\cdot m_1$ ou $a \,.\!\cdot m_2$ aurait la propriété suivante : cet élément, par exemple $a_1 = a \,.\!\cdot m_1$, n'est pas primal à droite et il n'admet pas de décomposition réduite à droite en résiduels primaux à droite. En poursuivant ce raisonnement, on aurait une chaîne infinie de résiduels à droite de a, contrairement à la propriété 1.1.

On établira de même en s'appuyant sur la propriété 3.3 le théorème suivant :

Théorème 4.3. — *Tout élément a non primal admet une décomposition réduite en éléments primaux qui sont des résiduels ou des résiduels mixtes de a.*

V. — Décomposition en éléments $\cap$-irréductibles.

Il nous faut distinguer ici la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante affaiblie. La décomposition dans le premier cas est bien connue ([9], p. 117). Dans le deuxième cas on ne peut l'obtenir sans une hypothèse supplémentaire.

Définition 5.1. — On dit que T est *faiblement* $\cap$*-continu* si la relation

$$x \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} y_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (x \cap y_\alpha)$$

est vérifiée pour les éléments y_α d'une chaîne minorée. Cette condition est vérifiée si T est $\cap$-continu ([9], p. 42), et, en particulier, si T satisfait à la condition de chaîne ascendante.

Théorème 5.1. — *Si* T *est un treillis avec élément universel, faiblement* $\cap$*-continu, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie, tout élément $a \in$* T *est l'intersection d'un nombre fini d'éléments* $\cap$*-irréductibles* (17).

En vertu des hypothèses, T est complet pour l'union et complet pour l'intersection des éléments $x \geqq a$, a étant un élément quelconque. L'ensemble des éléments $\cap$-irréductibles $x \geqq a$ n'est pas vide puisqu'il contient u. L'intersection i de ces éléments existe; elle vérifie $i \geqq a$. Nous allons montrer l'égalité $i = a$. D'après la condition de chaîne descendante affaiblie, l'hypothèse $i > a$ entraînerait

(17) J'ai énoncé ce résultat dans la Note [20].

l'existence d'un élément p tel que $i \geqq p \succ a$ [18]. L'ensemble F des éléments $x \in T$ qui vérifient $p \cap x = a$ est inductif; en effet, si l'on a $p \cap x_\alpha = a$ pour les éléments d'une chaîne $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, cette chaîne est minorée par a et l'on peut écrire, T étant faiblement $\cap$-continu :

$$p \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (p \cap x_\alpha) = a.$$

D'après le théorème de Zorn, cet ensemble F admet donc un élément maximal y. Supposons $y = y_1 \cap y_2 (y_1 > y, y_2 > y)$. On aurait donc : $y_1 \cap p > a, y_2 \cap p > a$, et, puisque $p \succ a$, $y_1 \cap p = y_2 \cap p = p$, c'est-à-dire $y \cap p = p$, ce qui serait contraire à l'hypothèse $y \cap p = a$. Donc y serait $\cap$-irréductible. Il en résulterait, d'après la définition de i, $y \geqq i$, d'où $y \geqq p$, et $y \cap p = p$, ce qui est impossible. On a bien $i = a$ et le théorème est démontré, puisque l'intersection i d'un nombre quelconque d'éléments $\cap$-irréductibles $> a$ est égale à l'intersection d'un nombre fini d'entre eux.

Tout élément $\cap$-irréductible étant primal (propriété 3.1), le théorème 5.1 nous redonne l'existence d'une décomposition de a en un nombre fini d'éléments primaux (*cf.* théorème 3.2) lorsque T satisfait à la condition (H), du moins dans le cas où T est faiblement $\cap$-continu.

On peut donner une autre démonstration du théorème 5.1 en utilisant un résultat de G. Birkhoff et O. Frink, ou intervient la notion d'élément $\cup$-inaccessible.

Définition 5.2. — On dit qu'un élément x est $\cup$*-inaccessible* (mod a) si la relation

$$x = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha$$

est impossible pour une chaîne d'éléments $x_\alpha > a$ tels que l'on ait $x_\alpha < x$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Le théorème de G. Birkhoff et O. Frink ([3], théorème 7, p. 304), légèrement généralisé, s'énonce alors :

Si T *est un treillis complet pour l'union, faiblement* $\cap$*-continu, dans lequel tout élément* $> a$ *est union d'éléments* $\cup$*-inaccessibles* (mod a), *a est intersection d'éléments* $\cap$*-irréductibles.*

Pour démontrer le théorème 5.1, il suffit donc d'établir le lemme suivant :

LEMME 5.1. — *Si* T *est un treillis avec élément universel, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie, tout élément* $> a$ *est union d'éléments* $\cup$*-inaccessibles* (mod a).

---

[18] La notation $p \succ a$ signifie p couvre a, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun élément x vérifiant $p > x > a$ ([9], p. 5).

Pour le démontrer, nous passons par l'intermédiaire des éléments *complètement* $\cup$*-irréductibles* (mod a), c'est-à-dire des éléments x tels que la relation

$$x = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha, \qquad \text{avec} \quad a < x_\alpha < x$$

est impossible pour les éléments x_α d'un ensemble formant ou non une chaîne. Un élément complètement $\cup$-irréductible (mod a) est donc $\cup$-inaccessible (mod a) et le lemme sera démontré si l'on remplace « $\cup$-inaccessible » par « complètement $\cup$-irréductible ».

Raisonnons par l'absurde. En supposant le lemme non vrai, il existerait, d'après la condition de chaîne descendante affaiblie, un élément minimal $b > a$ pour lequel le lemme est faux. En particulier, b ne serait pas complètement $\cup$-irréductible (mod a); on aurait donc :

$$b = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha, \qquad a < x_\alpha < x.$$

Mais x_α serait, d'après l'hypothèse b minimal, l'union d'éléments complètement $\cup$-irréductibles (mod a); il en serait donc de même de b, ce qui est contraire à l'hypothèse.

VI. — Éléments primaires.

T désigne à nouveau un demi-groupe réticulé satisfaisant à la condition (H). Rappelons la définition d'un élément q *primaire à droite* ([9], p. 143) : les relations

$$xy \leq q, \qquad y \not\leq q$$

entraînent l'existence d'un nombre naturel k tel que $x^k \leq q$.

En appelant r le radical de q, défini et étudié au paragraphe 2, cette définition peut être mise sous l'une des formes équivalentes suivantes :

(1) $\qquad xy \leq q, \quad y \not\leq q \quad$ entraînent $\quad x \leq r$;

(2) $\qquad xy \leq q, \quad x \not\leq r \quad$ entraînent $\quad y \leq q$;

(3) $\qquad x \not\leq r \quad$ entraînent $\quad q \cdot\!\cdot x = q$.

Nous allons caractériser un élément primaire à droite du point de vue de ses résiduels à gauche premiers propres.

Lorsque $q = r$, q est premier. Son seul résiduel à gauche (ou à droite) propre est égal à q. Supposons donc $q < r$.

Propriété 6.1. — *r est un résiduel à gauche propre de q.*

D'après le théorème 2.1, il existe un nombre naturel k tel que $r^k \leq q$. On a $k > 1$ et l'on peut supposer $r^{k-1} \not\leq q$. On a donc $rr^{k-1} \leq q$, c'est-à-dire

$$r \leq q \cdot . \, r^{k-1} = x.$$

De plus, $xr^{k-1} \leqq q$, avec $r^{k-1} \nleqq q$, entraînent, puisque q est primaire à droite, $x \leqq r$. On en déduit :

$$r = q \cdot\!. \, r^{k-1}, \quad \text{avec} \quad r^{k-1} \nleqq q.$$

Propriété 6.2. — *Tout élément primaire à droite est primal à droite, le résiduel à gauche premier associé étant égal à r.*

D'après la forme (3) de la définition et la propriété 1.7, il suffit de démontrer la relation $q \cdot\!. \, r > q$. Or, on a $r^{k-1} \leqq q \cdot\!. \, r$ et $r^{k-1} \nleqq q$, d'où résulte $q \cdot\!. \, r > q$.

Propriété 6.3. — *r est un élément premier minimum $\geqq q$.*

Soit p' un élément premier tel que $p' \geqq q$. Les relations

$$r^k \leqq q \leqq p'$$

entraînent, p' étant premier : $r \leqq p'$.

Propriété 6.4. — *r est l'unique résiduel à gauche premier propre de q.*

En effet, tout résiduel p à gauche premier propre de q vérifie la relation $p \leqq r$ d'après la propriété 6.2 et la relation $p \geqq r$ d'après la propriété 6.3. On a donc $p = r$.

Les propriétés précédentes sont caractéristiques d'un élément primaire à droite, d'après le théorème suivant :

Théorème 6.1. — *Pour que q soit primaire à droite, il faut et il suffit qu'il n'admette qu'un résiduel à gauche premier propre p, cet élément p étant un élément premier minimum $\geqq q$.*

Ces conditions sont nécessaires d'après les propriétés 6.3 et 6.4. Montrons qu'elles sont suffisantes. Elles entraînent $p = r$ d'après la propriété 1.6. L'élément q est donc primal avec r pour résiduel premier associé. La propriété 1.7 donne alors :

$$x \nleqq r \quad \text{entraîne} \quad q \cdot\!. \, x = q,$$

ce qui est la définition d'un élément primaire à droite sous la forme (3).

L'énoncé se simplifie quand la multiplication est commutative puisque, dans ce cas, tout élément premier minimal $\geqq q$ est un résiduel de q d'après la propriété 1.6. Il devient :

Théorème 6.2. — *Quand la multiplication est commutative, q est primaire si et seulement s'il n'admet qu'un résiduel premier propre.*

Comme application, signalons le théorème suivant, ou théorème de structure établi par W. Krull ([16], p. 9) dans le cas de T_A.

Théorème 6.3. — *L'élément p étant premier minimal $\geqq a$, il existe un résiduel primaire q de a admettant p pour résiduel premier associé. L'élément q est de la forme $a : l$, avec $l \nleqq p$, et c'est l'élément primaire minimum du segment $[a, p]$ ayant p pour associé.*

La propriété 1.3 et la recherche des résiduels premiers de a exposée au paragraphe 1 montrent dans le cas commutatif l'existence d'un résiduel $q = a : l$, avec $l \nleq p$, n'admettant que p pour résiduel premier. L'élément q est donc primaire avec p pour résiduel premier associé. Soit x un élément primaire vérifiant $a \leq x \leq p$ et admettant p pour résiduel premier associé. On a

$$lq \leq a \leq x \quad \text{et} \quad l \nleq p, \quad \text{d'où} \quad q \leq x.$$

Remarquons en outre que q est l'élément maximum parmi les éléments y qui vérifient

$$a : y \nleq p.$$

VII. — Premier cas de décomposition en éléments primaires.

La décomposition en éléments primaires que nous allons obtenir repose sur la décomposition en éléments $\cap$-irréductibles. Nous supposerons donc T faiblement $\cap$-continu (§ 5), et satisfaisant à la condition (H). Mais ces hypothèses ne suffisent pas pour que la décomposition en éléments primaires soit valable, comme le montrent certains demi-groupes réticulés résidués de longueur finie donnés comme exemple par R. P. Ward et M. Dilworth [30]. Pour obtenir des théorèmes de décomposition, ces auteurs ajoutent deux hypothèses dont l'une est la modularité de T. Nous allons remplacer ici la modularité par la semi-modularité, et donner d'abord une propriété utile d'un treillis semi-modulaire quelconque.

Propriété 7.1. — *a étant un élément $\cap$-irréductible d'un treillis* T *semi-modulaire, les relations $a \cap b = a' \cap b$, $a' > a$, entraînent $b \leq a$* (19).

Considérons l'élément $c = a' \cap (a \cup b)$. Si T est modulaire,

$$c = a \cup (a' \cap b) = a \cup (a \cap b) = a.$$

On a donc $a = a' \cap (a \cup b)$ et, puisque a est $\cap$-irréductible, la relation $a' > a$ entraîne $a \cup b = a$, c'est-à-dire $b \leq a$.

Supposons maintenant T semi-modulaire, sans être modulaire.

Considérons à nouveau l'élément

$$c = a' \cap (a \cup b)$$

et montrons qu'on a encore $c = a$. On peut écrire :

$$a' \cap b \leq a < a' \leq a' \cup b.$$

Les signes d'égalité peuvent d'ailleurs être supprimés lorsque $c > a$. En effet,

(19) On en déduit en particulier une conséquence intéressante : toute décomposition d'un élément x d'un treillis semi-modulaire comme intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles, aucun d'eux n'étant superflu, est telle qu'une composante quelconque a ne peut être remplacée par un élément $a' > a$.

de $a' = a' \cup b$ on déduirait $b \leq a'$, d'où $a \cap b = a' \cap b = b$ et $b \leq a$, c'est-à-dire $a \cup b = a$ et $c = a$. D'autre part, la relation $a' \cap b = a$ entraînerait $a \cap b = a$ d'où $a \leq b$ et $a \cup b = b$, donc $c = a' \cap b = a \cap b$; par suite $c \leq a$, et, comme $c \geq a$, $c = a$.

On aurait donc, en supposant $c > a$,

$$a' \cap b < a < a' < a' \cup b.$$

Mais, le treillis étant semi-modulaire ([20]), la condition (S_2) ([9], p. 85) entraîne l'existence d'un élément t vérifiant

$$a' \cap b < t \leq b \quad \text{et} \quad a = (a \cup t) \cap a'.$$

On a nécessairement $a \cup t > a$, car, si l'on avait $a \cup t = a$ d'où $t \leq a$, on en déduirait $t \leq a'$ et, puisque $t \leq b$, $t \leq a' \cap b$. Ce résultat serait en contradiction avec la relation $a' \cap b < t$. En définitive, on obtiendrait $a = (a \cup t) \cap a'$ avec $a \cup t > a$, $a' > a$, et l'élément a ne serait pas $\cap$-irréductible.

Il en résulte $a = a' \cap (a \cup b)$, ce qui entraîne, comme dans le cas modulaire, $b < a$.

Nous allons appliquer ces résultats à un premier cas de décomposition en éléments primaires.

Théorème 7.1. — *Si* T, *supposé semi-modulaire et faiblement* $\cap$*-continu, satisfait à la condition* (H) *et à la condition suivante :*

Condition (I). — a et d étant donnés, il existe un nombre naturel s tel que $a^s \cap d \leq ad$ et un nombre naturel k tel que, $a \cap d^k \leq ad$,

tout élément x est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires.

D'après le théorème 5.1, il suffit de montrer que tout élément q $\cap$-irréductible est primaire. Supposons $ab \leq q$, $b \not\leq q$. On a donc

$$d = b \cup q > q \quad \text{et} \quad ad = ab \cup aq \leq q.$$

La condition (I) entraîne l'existence d'un nombre naturel s tel que

$$a^s \cap d \leq ad.$$

On a donc

$$a^s \cap d \leq q$$

et par suite

$$a^s \cap d \leq a^s \cap q.$$

D'autre part, $q < d$ entraîne $a^s \cap q \leq a^s \cap d$. D'où

$$a^s \cap d = a^s \cap q, \qquad d > q, \qquad (q \cap\text{-irréductible}).$$

([20]) La définition de la semi-modularité est celle qui est donnée dans [9], p. 85. La semi-modularité est caractérisée par la condition (S_2) : les relations $y \cap z < x < z < y \cup z$ impliquent l'existence de t tel que $y \cap z < t \leq y$ et $x = (x \cup t) \cap z$. Cette condition, utilisée par R. Croisot [8], a été donnée par S. Mac-Lane [24].

Le treillis étant semi-modulaire, la propriété 7.1 s'applique et donne

$$a^s \leqq q.$$

q est bien primaire à droite.

On démontre de même que q est primaire à gauche, et par suite, primaire.

VIII. — Deuxième cas de décomposition en éléments primaires.

Pour présenter le deuxième cas, nous allons considérer dans T des éléments qui jouent le rôle des idéaux principaux dans la théorie des idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe commutatif.

Envisageons, dans un gerbier quelconque, l'application opératoire $x \to x' = ax$, définie par l'élément a. Elle fait correspondre aux éléments $x \leqq b$ des éléments $x' \leqq ab$. Elle applique par conséquent la section principale commençante ([21]) (b) *dans* la section principale commençante (ab). Si, pour tout élément b, (b) est appliquée *sur* (ab), l'élément a est dit principal à droite. Cela revient donc à la définition suivante :

Définition 8.1. — Dans un gerbier quelconque, un élément *a est principal à droite* si, pour tout élément b, la relation $x' \leqq ab$ entraîne l'existence d'un élément $x \leqq b$ tel que $x' = ax$.

On définit de même un élément principal à gauche, et un élément principal (à droite et à gauche).

Ces éléments principaux satisfont aux propriétés suivantes :

Propriété 8.1. — *Dans un gerbier quelconque, le produit d'un nombre fini d'éléments principaux à droite est principal à droite.*

En effet supposons a_1 et a_2 principaux à droite, et $x' \leqq a_1 a_2 b$. Il existe, a_1 étant principal, un élément $c \leqq a_2 b$, tel que $x' = a_1 c$. Mais, a_2 étant principal, il existe $x \leqq b$ tel que $c = a_2 x$. On a donc $x' = a_1 a_2 x$ et $a_1 a_2$ est principal à droite.

Propriété 8.2. — *a étant un élément principal à droite d'un gerbier résidué à droite, la relation $x \leqq ab$ entraîne $x = a(x \cdot\!\cdot\, a)$.*

En effet, $x \leqq ab$ entraîne $x = ax'$, avec $x' \leqq b$. On a donc

$$x' \leqq x \cdot\!\cdot\, a \qquad \text{et} \qquad x = ax' \leqq a(x \cdot\!\cdot\, a).$$

Comme $a(x \cdot\!\cdot\, a) \leqq x$, on a bien

$$x = a(x \cdot\!\cdot\, a).$$

Propriété 8.3. — *L'élément a étant principal à droite, dans un gerbier quelconque, la relation $b \succ c$ entraîne $ab \succ ac$ ou $ab = ac$.*

([21]) Ensemble des éléments $x \leqq b$.

Supposons $ab \neq ac$ et soit $ab \geqq x' \geqq ac$. L'élément a étant principal à droite, il existe $x \leqq b$ tel que $x' = ax$. On a donc

$$x' = ax \cup ac = a(x \cup c) \qquad \text{avec} \quad b \geqq x \cup c \geqq c.$$

Il en résulte, puisque $b \succ c$,

$$x \cup c = b \qquad \text{ou} \qquad x \cup c = c,$$

c'est-à-dire $x' = ab$ ou $x' = ac$, donc $ab \succ ac$.

THÉORÈME 8.1. — *Si* T, *supposé semi-modulaire et faiblement* $\cap$*-continu, satisfait à la condition* (H) *et à la condition suivante :*

Condition (II). — Tout élément est l'union d'éléments principaux,

tout élément x quelconque est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires.

Montrons encore que tout élément q $\cap$-irréductible est primaire à droite. Soit $ab \leqq q$, $b \nleqq q$. Il faut montrer qu'il existe un nombre naturel s tel que $a^s \leqq q$. S'il n'en est pas ainsi, considérons les éléments principaux à droite a_α tels que $a = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} a_\alpha$; il existe nécessairement un indice α tel que $a_\alpha \nleqq r$, r étant le radical de q; sinon on aurait $a = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} a_\alpha \leqq r$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut donc supposer :

$$ab \leqq q, \qquad b \nleqq q, \qquad a \nleqq r \qquad (a \text{ principal à droite}).$$

Considérons $d = b \cup q > b$. On a

$$ad = ab \cup aq \leqq q.$$

Soit k le plus petit entier tel que

$$q \mathbin{.\cdot} a^k = q \mathbin{.\cdot} a^{k+1},$$

son existence étant assurée par la propriété 1.1.

L'élément a^k est, d'après la propriété 8.1, un élément principal à droite, comme l'élément a. Nous allons en déduire :

$$d \cap a^k u \leqq q.$$

a^k étant principal, la relation $d \cap a^k u \leqq a^k u$ entraîne d'après la propriété 8.2 :

$$d \cap a^k u = a^k((d \cap a^k u) \mathbin{.\cdot} a^k) = a^k(d \mathbin{.\cdot} a^k).$$

Formons

$$a^{k+1}(d \mathbin{.\cdot} a^k) = a . a^k(d \mathbin{.\cdot} a^k) \leqq ad \leqq q.$$

On en déduit

$$d \mathbin{.\cdot} a^k \leqq q \mathbin{.\cdot} a^{k+1} = q \mathbin{.\cdot} a^k,$$

c'est-à-dire

$$a^k(d \mathbin{.\cdot} a^k) \leqq q \qquad \text{ou} \qquad d \cap a^k u \leqq q.$$

Par suite

$$d \cap a^k u \leqq q \cap a^k u.$$

D'autre part, la relation $q < d$ entraîne $q \cap a^k u \leqq d \cap a^k u$. Il en résulte :

$$d \cap a^k u = q \cap a^k u, \qquad d > q \qquad (q \cap\text{-irréductible}).$$

Le treillis étant semi-modulaire, la propriété 7.1 s'applique et donne

$$a^k u \leqq q,$$

d'où

$$a^{k+1} \leqq q \qquad \text{et} \qquad a \leqq r,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Le théorème est démontré.

Applications. — La condition (II) est vérifiée dans le cas des idéaux d'un anneau (ou d'un demi-groupe) quelconque commutatif; les éléments principaux étant les idéaux principaux de la forme aA (ou aD), si A désigne l'anneau (ou le demi-groupe) et si a est un élément quelconque de A (ou D). La semi-modularité est vérifiée aussi puisque le treillis des idéaux d'un anneau (ou d'un demi-groupe) est modulaire (ou distributif). Enfin ces deux treillis sont également $\cap$-continus.

On obtient donc, en particulier, le théorème suivant :

THÉORÈME 8.2. — *Si les idéaux d'un demi-groupe abélien* [22] *vérifient la condition de chaîne descendante affaiblie, tout idéal est intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires.*

La condition (II) est également vérifiée dans un demi-groupe réticulé entier satisfaisant à la condition (Φ') [23]. En effet, *si la condition* (Φ') *à droite est vérifiée dans un demi-groupe réticulé entier* T, *tout élément a est principal à droite* car $x < ab$ entraîne l'existence de c tel que $x = abc$; en posant $b' = bc$ on a bien $x = ab'$ avec $b' \leqq b$. Il en résulte que T est distributif ([5], théorème 10.6), donc modulaire, et, en particulier, semi-modulaire.

Supposons en outre que T soit résidué. La méthode utilisée par J. Certaine pour établir la distributivité ([5], théorème 10.6) permet d'établir aussi la loi de $\cap$-distributivité générale :

$$a \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} b_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (a \cap b_\alpha),$$

d'où résulte que T est $\cap$-continu. On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 8.3 — *Si un demi-groupe réticulé entier résidué satisfait à la condition* (Φ') *et à la condition de chaîne descendante affaiblie, tout élément*

---

(22) Le théorème 8.2 s'applique aussi aux idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe non commutatif A lorsque la condition $a\text{A} = \text{A}a$ est vérifiée pour tout $a \in \text{A}$.

(23) Condition utilisée par R. P. Dilworth et M. Ward [30], J. Certaine [5], M. L. Dubreil-Jacotin [10]. Rappelons la définition ([9], p. 219) : T satisfait à la condition (Φ') à droite si la relation $a \leqq b$ implique l'existence de c tel que $a = bc$.

est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires. De plus, tout élément primaire est une puissance d'un élément premier.

La première partie du théorème résulte de ce qui précède. Démontrons de plus que tout élément primaire q est une puissance de son élément premier associé p. On a en effet, si q n'est pas premier

$$p^k \leqslant q < p.$$

On en déduit, d'après la condition (Φ') :

$$q = ap.$$

q étant primaire, $p \not\leqslant q$ entraîne $a \leqslant p$. On a donc $a = a_1 p$, d'où

$$q = a_1 p^2.$$

Si $p^2 \not\leqslant q$, on a $a_1 \leqslant p$, d'où $a_1 = a_2 p$ et

$$q = a_2 p^3.$$

Finalement on arrive à $q = a_{k-1} p^k$; ce qui entraîne $q \leqslant p^k$ et par suite $q = p^k$.

Donnons un autre exemple, représenté par le diagramme suivant (*fig.* 1) :

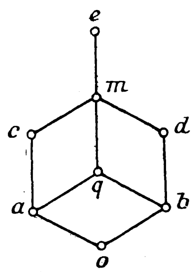

Fig. 1.

avec une multiplication commutative donnée par la table :

	o	a	b	c	d	m	q	e
o	o	o	o	o	o	o	o	o
a	o	a	o	a	o	a	a	a
b	o	o	b	o	b	b	b	b
c	o	a	o	a	o	a	a	c
d	o	o	b	o	b	b	b	d
m	o	a	b	a	b	q	q	m
q	o	a	b	a	b	q	q	q
e	o	a	b	c	d	m	q	e

Le treillis T vérifie la condition (H); il est semi-modulaire sans être modulaire. Les éléments principaux sont o, a, b, c, d, e; donc T vérifie la condition (II). Les éléments $\cap$-irréductibles sont c, d, q, m, e. Or c, d, m et e sont premiers, et q est primaire (son seul résiduel premier propre est $m = q : m$). Tout élément $\cap$-irréductible est bien primaire.

Montrons sur un autre exemple que la semi-modularité est essentielle dans l'énoncé du théorème 8.1.

Soit T le treillis représenté par le diagramme suivant (*fig.* 2) :

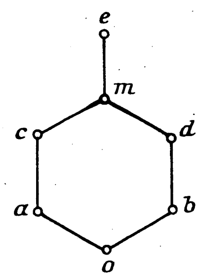

Fig. 2.

avec une multiplication commutative donnée par la table :

	o	a	b	c	d	m	e
o	o	o	o	o	o	o	o
a	o	a	o	a	o	a	a
b	o	o	b	o	b	b	b
c	o	a	o	a	o	a	c
d	o	o	b	o	b	b	d
m	o	a	b	a	b	m	m
e	o	a	b	c	d	m	e

Le treillis T vérifie la condition (H). Les éléments principaux sont o, a, b, c, d, e et la condition (II) est vérifiée. T n'est pas semi-modulaire. Or, l'élément a est $\cap$-irréductible, mais non primaire :

$$cm \leq a, \qquad c \not\leq a, \qquad m^k = m \not\leq a.$$

Par contre, *a est primal*, conformément à la propriété 3.1; ses résiduels premiers propres sont $c = a : m$ et $m = a : c$; le résiduel premier associé à a est m.

IX. — Troisième cas de décomposition en éléments primaires.

Ce dernier cas ne fait plus appel ni aux éléments $\cap$-irréductibles, ni à la semi-modularité, ni à l'$\cap$-continuité; il s'appuie sur la condition de chaîne descendante affaiblie et sur une condition faisant intervenir de nouveaux éléments du treillis, que nous appellerons essentiels.

Soit T un demi-groupe entier réticulé résidué; fixons un élément $a \in T$ et considérons deux éléments b et c qui vérifient la relation

$$ab \cup h = ac \cup h,$$

h étant également fixé, cette égalité détermine entre b et c une relation d'équivalence R_h dont la classe de h est déterminée par l'ensemble I des éléments $x \leqq h \mathbin{.\cdot} a$; or, on sait ([9], p. 197) que la plus fine équivalence, régulière par rapport à l'union et à la multiplication, admettant I pour classe, est la relation d'équivalence R'_h définie par :

$b \equiv c(R'_h)$ si et seulement si $b \cup i = c \cup i'$, $i \in I$, $i' \in I$, c'est-à-dire
$b \equiv c(R'_h)$ si et seulement si $b \cup (h \mathbin{.\cdot} a) = c \cup (h \mathbin{.\cdot} a)$.

On a donc $R'_h \leqq R_h$. Nous dirons que a est essentiel à droite si l'on a $R_h = R'_h$ quel que soit h. On a donc la définition suivante :

Définition 9.1. — T étant un demi-groupe entier réticulé résidué, on dit que a est *essentiel à droite*(24) si la relation $ab \cup h = ac \cup h$ entraîne $b \cup (h \mathbin{.\cdot} a) = c \cup (h \mathbin{.\cdot} a)$. On définit de même un élément *a essentiel à gauche*, et un élément essentiel.

Exemples. — 1° A étant un anneau commutatif avec élément unité, tout idéal principal est essentiel.

2° D étant un demi-groupe de Dedekind (25), tout élément de D est essentiel.

PROPRIÉTÉ 9.1. — *Le produit d'un nombre fini d'éléments essentiels à droite est essentiel à droite.*

Supposons a_1 et a_2 essentiels à droite. De

$$a_1 a_2 b \cup h = a_1 a_2 c \cup h,$$

on déduit, a_1 étant essentiel à droite :

$$a_2 b \cup (h \mathbin{.\cdot} a_1) = a_2 c \cup (h \mathbin{.\cdot} a_1),$$

---

(24) *cf.* L. Lesieur [19]. Cette notion est également signalée par L. A. Hostinsky [32] et J. Kerstan [33].

(25) La définition d'un demi-groupe de Dedekind a été introduite par M. L. Dubreil-Jacotin [10]; *voir* aussi [9], p. 223. Un demi-groupe de Dedekind est un demi-groupe réticulé entier commutatif tel que tout élément soit produit d'un nombre fini d'éléments maximaux (couverts par l'élément unité), avec unicité.

puis, a_2 étant essentiel à droite :

$$b \cup (h \mathbin{.\!\cdot} a_1 a_2) = c \cup (h \mathbin{.\!\cdot} a_1 a_2).$$

L'élément $a_1\, a_2$ est donc essentiel à droite.

Théorème 9.1. — *Si* T *est un demi-groupe réticulé entier, résidué, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie et à la condition suivante* :

Condition (III). — Tout élément est union d'éléments essentiels,

un élément x quelconque de T *est l'intersection d'un nombre fini d'éléments primaires.*

D'après le théorème 3.2, il suffit d'établir dans T le lemme suivant :

Lemme 9.1. — *Avec les hypothèses du théorème* 9.1 *tout élément primal est primaire.*

Supposons $ab \leqq q$, $b \not\leqq q$, q étant supposé primal à droite. Appelons r le radical de q. En supposant $a \not\leqq r$ il existerait, d'après la condition (III) et le théorème 2.1, un élément essentiel $a_\alpha \leqq a$ tel que $a_\alpha \not\leqq r$. Comme on a $a_\alpha b \leqq ab \leqq q$, on peut donc prendre

$$ab \leqq q, \qquad b \not\leqq q, \qquad a \not\leqq r \qquad (a \text{ essentiel}).$$

Mais en vertu de la condition de chaîne descendante affaiblie, on a, pour un certain nombre naturel k :

$$q \cup a^k = q \cup a^{k+1}.$$

Or, $u = e$ étant unité, cette relation s'écrit encore :

$$q \cup e a^k = q \cup a a^k.$$

D'après la propriété 9.1, a^k est essentiel ; il en résulte :

$$e = e \cup (q \mathbin{.\!\cdot} a^k) = a \cup (q \mathbin{\cdot\!.} a^k)$$

et, par suite :

$$q = q \mathbin{.\!\cdot} e = q \mathbin{.\!\cdot} (a \cup (q \mathbin{\cdot\!.} a^k)) = (q \mathbin{.\!\cdot} a) \cap (q \mathbin{.\!\cdot} (q \mathbin{\cdot\!.} a^k)).$$

On a $q \mathbin{.\!\cdot} a > q$ puisque $b \leqq q \mathbin{.\!\cdot} a$, avec $b \not\leqq q$. On en déduit, q étant primal à droite :

$$q \mathbin{.\!\cdot} (q \mathbin{\cdot\!.} a^k) = q \qquad \text{et} \qquad a^k \leqq q \mathbin{.\!\cdot} (q \mathbin{\cdot\!.} a^k) = q,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $a \not\leqq r$.

Le théorème 9.1 s'applique à T_A lorsque l'anneau A est commutatif avec élément unité. Donnons un autre exemple où le treillis ne vérifie pas la condition (II) et n'est pas semi-modulaire. Il s'agit du treillis T dont le diagramme est le suivant (*fig.* 3) avec la loi de multiplication : $xy = 0$, $x \neq e$, $y \neq e$; $xe = ex = x$. Le théorème 9.3 s'applique car la condition (III) est vérifiée. On constate d'ailleurs que tout élément est primaire.

Cependant le treillis n'est pas semi-modulaire et il ne vérifie pas la condition (II) : l'élément c par exemple n'est pas l'union d'éléments principaux ; pour

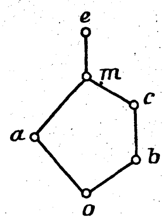

Fig. 3.

qu'il le soit il faudrait qu'il soit lui-même principal, ce qui n'est pas ([26]).

X. — Théorèmes d'unicité.

Les théorèmes d'unicité classiques de la théorie des idéaux d'un anneau, tels qu'ils sont présentés par exemple par B. L. Van der Waerden ([28], t. 2, chap. 12, §88, p. 34) sont valables pour T lorsque le théorème d'existence a été établi, c'est-à-dire dans les trois cas des paragraphes précédents. On peut alors obtenir une décomposition en éléments primaires non superflus admettant des éléments premiers associés distincts. Une telle décomposition sera dite *décomposition réduite en éléments primaires*. Les théorèmes d'unicité s'énoncent alors :

Théorème 10.1. — *Deux décompositions réduites d'un même élément a en éléments primaires à droite q_i ont le même nombre de composantes et les mêmes éléments premiers p_i associés.*

Théorème 10.2. — *Les composantes primaires isolées* ([27]) *de a sont déterminées de façon unique par leurs résiduels premiers associés.*

On démontre aussi (*voir* [28], t. 2, p. 36) : pour que $a .\cdot n = a$, il faut et il suffit que $n \not\leq p_j$, où les p_j sont les résiduels maximaux premiers associés aux éléments primaires à droite d'une décomposition réduite en éléments primaires. On en déduit, d'après la propriété 1.7 :

Propriété 10.1. — *Les résiduels maximaux à gauche ou à droite premiers propres de a sont les résiduels premiers maximaux parmi les éléments premiers p_i associés aux éléments d'une décomposition réduite en éléments primaires.*

Nous pouvons préciser ce résultat lorsque la multiplication est commutative.

([26]) En effet, on a $b < c = ec$ et il n'existe pas d'élément x tel que $b = xc$.

([27]) Une composante q_i est isolée si son résiduel premier propre associé est minimal parmi les $p_i (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Théorème 10.3. — *Lorsque la multiplication est commutative, les résiduels premiers de a sont les résiduels premiers p_i associés aux éléments primaires q_i d'une décomposition réduite en éléments primaires*

Pour le démontrer, raisonnons par induction sur le nombre m des composantes q_i. La propriété est vraie pour $m = 1$. Supposons la propriété vraie pour $m - 1$. Soit $a = q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_m$ une décomposition de a en éléments primaires. Supposons p_1 maximal parmi les p_i associés aux éléments primaires q_i. L'élément p_1 est donc, d'après la propriété 10.1, un résiduel premier maximal propre de a. D'après la propriété 1.3, les autres résiduels premiers de a sont ceux de $a : p_1$ et par suite de $a : p_1^k$, avec $p_1^k \leq q_1$. Mais on a

$$a : p_1^k = q_2 \cap \ldots q_m.$$

Donc, d'après l'hypothèse d'induction, ces résiduels sont $p_2, \ldots, p_m$.

Les théorèmes d'unicité prennent une forme plus précise dans le troisième cas de décomposition :

Théorème 10.3. — *Si* T *est un demi-groupe réticulé entier résidué satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie et à la condition* (III), *il y a unicité dans la décomposition réduite en éléments primaires et cette décomposition est aussi, dans le cas commutatif, une décomposition en produit d'éléments primaires.*

Soit

$$a = q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_m$$

une décomposition réduite en éléments primaires. Si toutes les composantes sont primaires isolées, la propriété d'unicité résulte du théorème 10.2. Or les composantes primaires sont toutes isolées d'après le lemme suivant :

Lemme 10.1. — *Avec les hypothèses du théorème 10.3, tout élément premier p est couvert par e.*

Soit $p \neq e$ un élément premier. Considérons un élément quelconque y tel que $p < y \leq e$. D'après la condition de chaîne descendante affaiblie, il existe x tel que

$$p \prec x \leq y \leq e.$$

On en déduit

$$x^2 \cup p = x.$$

En effet, les relations $p \leq x^2 \cup p \leq x$ et $x \succ p$ entraînent $x^2 \cup p = p$ ou $x^2 \cup p = x$. Le premier cas est à exclure car il entraîne $x^2 \leq p$, d'où, p étant premier, $x \leq p$.

D'après la condition (III), $x = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} a_\alpha$ est l'union d'éléments essentiels a_α. Si l'on avait $a_\alpha x \leq p$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, on en déduirait $a_\alpha \leq p \cdot\!\!. \, x$, d'où $x \leq p \cdot\!\!. \, x$, c'est-à-dire $x^2 \leq p$ et $x \leq p$. Il existe donc un élément $a_\alpha = a$ essentiel pour lequel on a $ax \not\leq p$. Par suite,

$$p < ax \cup p \leq x^2 \cup p = x,$$

d'où, puisque $x \succ p$,

$$ax \cup p = x.$$

Mais on a aussi

$$x \geqq a = ae \geqq ax, \quad \text{d'où} \quad ae \cup p = x,$$

et, a étant essentiel à gauche,

$$e = x \cup (p \,.\, a).$$

De la relation $a = ae \not\leqq p$, on tire, p étant premier, $p \,.\!\cdot\, a = p$, d'où

$$e = x \cup (p \,.\!\cdot\, a) = x \cup p = x.$$

L'élément p est bien couvert par e. Le lemme est démontré.

Pour compléter la démonstration du théorème, remarquons que la relation $p_i \cup p_j = e$ entraîne $q_i \cup q_j = e$. En effet, p_i est premier avec $p_j^{k'} \leqq q_j$ ([9], corollaire 1, p. 141), d'où $p_i \cup q_j = e$; q_j est alors premier avec $p_i^{k_i}$, d'où $q_i \cup q_j = e$. Il en résulte d'après un résultat classique ([9], corollaire 2, p. 141),

$$q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_m = q_1 q_2 \ldots q_m.$$

En particulier, si T vérifie la condition (Φ'), on a vu (théorème 7.3) que tout élément primaire q_i est une puissance de l'élément premier associé p_i. L'élément p_i étant maximal (c'est-à-dire couvert par e), on a le résultat suivant :

Propriété 10.2. — *Pour qu'un demi-groupe réticulé entier commutatif résidué soit un demi-groupe de Dedekind, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions* (Φ') *et* (III) *et la condition de chaîne descendante affaiblie.*

Il vérifie alors la condition (Φ) et la condition de chaîne ascendante ([9], p. 224).

XI. — Conditions suffisantes pour que la condition de chaîne descendante affaiblie entraîne la condition de chaîne ascendante.

Dans le cas des idéaux d'un anneau commutatif avec élément unité, la condition de chaîne descendante affaiblie entraîne la condition de chaîne ascendante (*voir* par exemple I. S. Cohen [7]). Nous venons de voir qu'il en est de même d'un demi-groupe réticulé résidué entier commutatif vérifiant la condition (Φ') et la condition (III). Par contre il existe des demi-groupes vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux sans vérifier la condition de chaîne ascendante ([28]). Dans ce dernier exemple, si la condition (II) est bien vérifiée, la condition (III) ne l'est pas ([29]), tandis que dans les deux

([28]) Par exemple, le demi-groupe D formé par la suite dénombrable infinie d'éléments distincts $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ avec la loi multiplicative $a_i a_j = a_j a_i = a_i (i \leqq j)$.

([29]) On en déduit, en rapprochant ce résultat de l'exemple qui termine le paragraphe 9, que les conditions (II) et (III) sont indépendantes.

premiers exemples les deux conditions (II) et (III) sont remplies. Plus généralement, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 11.1. — *Soit* T *un demi-groupe réticulé entier résidué satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie et aux deux hypothèses suivantes :*

1° T *est semi-modulaire et faiblement* $\cap$*-continu;*

2° T *vérifie les conditions* (II) *et* (III).

Alors T *vérifie la condition de chaîne ascendante.*

Il faut montrer que toute chaîne ascendante

$$a < a_1 < a_2 < \ldots$$

est finie.

Nous avons vu au paragraphe 1 (propriété 1.5) qu'il existe un nombre fini d'éléments premiers $p_i \geqq a$ tels que

$$p_1 p_2 \ldots p_k \leqq a.$$

Posons

$$u_i = p_1 p_2 \ldots p_i.$$

On a donc la chaîne

$$u_k < u_{k-1} < \ldots < u_i < u_{i-1} < u_1 < u = e.$$

Considérons le segment $T_i = [u_i, u_{i-1}]$, dans lequel $u_i = u_{i-1} p_i$. Soit $x \in T_i$. On a donc

$$u_i \leqq x \leqq u_{i-1}.$$

On sait (lemme 10.1) que p_i est un élément maximal : $e \succ p_i$. D'autre part, d'après la condition (II), il existe des éléments principaux a_α tels que

$$x = \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} a_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (a_\alpha e) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (a_\alpha e \cup u_i).$$

D'après la propriété 8.3, la relation $e \succ p_i$ entraîne $a_\alpha e \succ a_\alpha p_i$ ou $a_\alpha e = a_\alpha p_i$. On en déduit, le treillis étant semi-modulaire ([30]) :

$$a_\alpha e \cup u_i \succ a_\alpha p_i \cup u_i \qquad \text{ou} \qquad a_\alpha e \cup u_i = a_\alpha p_i \cup u_i.$$

Or, $a_\alpha \leqq x \leqq u_{i-1}$ entraîne

$$a_\alpha p_i \leqq x p_i \leqq u_{i-1} p_i = u_i.$$

Par suite, on a

$$a_\alpha p_i \cup u_i = u_i \qquad \text{et} \qquad a_\alpha e \cup u_i \succ u_i \qquad \text{ou} \qquad a_\alpha e \cup u_i = u_i.$$

Dans le segment T_i, tout élément $x \neq u_i$ est donc union de points.

([30]) On applique ici une propriété connue d'un treillis semi-modulaire ([9], remarque, p. 188).

De plus, T_i est supposé semi-modulaire et $\cap$-continu. Il en résulte que T_i est un treillis géométrique ([9], p. 289). La condition de chaîne descendante affaiblie dans T entraîne la condition de chaîne descendante dans T_i. Or, dans un treillis géométrique, la condition de chaîne descendante entraîne la condition de chaîne ascendante et le treillis est de longueur finie ([9], conséquence, p. 272). Par conséquent il existe dans T_i une chaîne maximale allant de u_i à u_{i-1}. La même propriété ayant lieu pour tout i, on en déduit qu'il existe une chaîne maximale de longueur finie allant de u_k à u. La semi-modularité de T entraîne alors que toutes les chaînes du segment $[u_k, u]$ sont finies et que toutes les chaînes maximales allant de u_k à u ont la même longueur ([9], p. 88). Comme on a $u_k \leq a < u$, la chaîne donnée $a < a_1 < a_2 < \ldots$ est bien finie et la condition de chaîne ascendante est vérifiée.

Le théorème **11**.1 s'applique immédiatement au cas du treillis T_A des idéaux d'un anneau commutatif avec élément unité. On peut aussi obtenir une théorie valable pour le cas où A n'est pas commutatif en remplaçant la semi-modularité par la modularité et en généralisant la notion d'élément principal ou essentiel par celle d'endomorphisme principal ou essentiel (*voir* L. Lesieur [19]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Apery, *Thèse*, Paris, 1947.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory* (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, vol. 25, New York, 1948).

[3] G. Birkhoff et O. Frink, *Representation of lattices by sets* [*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 64, (2), 1948, p. 299-316].

[4] R. Brauer, *On the nilpotency of the radical of a ring* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 48, 1942, p. 752-758).

[5] J. Certaine, *Lattice ordered groupoids and some related problems* (*Harvard Doctoral Thesis*, 1943).

[6] A. H. Clifford, *Arithmetic and ideal theory of commutative semi-groups* [*Ann. Math.*, t. 39, (3), 1938, p. 594-630].

[7] I. S. Cohen, *Commutative rings with restricted minimum condition* [*Duke Math. J.*, t. 17, (1), 1950, p. 27-42].

[8] R. Croisot, *Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 68, 1951, p. 203-265).

[9] M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis* (*Cahiers Scientifiques* de la Collection G. Julia, fasc. 21, Paris, 1953).

[10] M. L. Dubreil-Jacotin, *Quelques propriétés arithmétiques dans un demi-groupe réticulé entier* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1174-1176).

[11] L. Fuchs, *On primal ideals* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 1-6).

[12] C. Hopkins, *Rings with minimal conditions for left ideals* [*Ann. Math.*, t. 40, (2), 1939, p. 712-739].

[13] K. Iseki, *Sur les demi-groupes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1524-1525).

[14] N. Jacobson, *The theory of rings* (*Math. Surveys*, New York, 1943).

[15] V. S. Krishnan, *Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extensions* (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 78, 1950, p. 234-263 et t. 79, 1951, p. 85-120).

[16] W. Krull, *Idealtheorie* (*Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete*, 1935).

[17] L. Lesieur, *Sur les treillis multiplicatifs complets à condition minimale* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 290-292).

[18] L. LESIEUR, *Hopkins'Satz in einem vollständigen Multiplikativerband mit Minimalbedingung* (*Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung*, Berlin, t. 56, 1951, fasc. 1).

[19] L. LESIEUR, *Conditions suffisantes pour que, dans un treillis multiplicatif complet, la condition de chaîne descendante entraîne la condition de chaîne ascendante* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1017-1019).

[20] L. LESIEUR, *Théorèmes de décomposition dans certains demi-groupes réticulés satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 2250-2252).

[21] J. LEVITZKI, *On rings with minimal condition* (*Compositio. Math.*, t. 7, 1939, p. 214-222).

[22] J. LEVITZKI, *On multiplicative systems* (*Compositio. Math.*, 1950).

[23] N. H. MAC-COY, *Prime ideals in general rings* (*Amer. J. Math.*, t. 71, 1949, p. 823-833).

[24] S. MAC-LANE, *A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases* (*Duke Math. J.*, t. 4, 1938, p. 455-468).

[25] P. SAMUEL, *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique* (*Thèse*, Paris, 1949 et *J. Math. pures et appl.*, 1951).

[26] S. SCHWARZ, *On semi-groups having a kernel* [*Czechosl. Math. J.*, t. 1. (76), 1951, p. 229-264].

[27] M. TEISSIER, *Sur les demi-groupes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1524-1525).

[28] R. I. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, 2e édit., Berlin, 1940.

[29] M. WARD et R. P. DILWORTH, *The lattice theory of ova* [*Ann. Math.*, t, 40, (3), 1939, p. 600-608].

[30] M. WARD et R. P. DILWORTH, *Residuated lattices* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 45, 1939, p. 335-354).

[31] P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (III) (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 81, 1953, p. 289-306).

[32] L. A. HOSTINSKY, *Endomorphisms of latrices* (*Duke Math. J.*, t. 18, 1951, p. 331-342).

[33] J. KERSTAN, *Elementfreie Begründung der allgemeinen Ideal-und Modultheorie* (*Ber. Math.*, *Tagung*, *Berlin*, 1953, p. 49-57).

[34] D. C. MURDOCH, *Contributions to non commutative idealtheory* (*Canadian J. Math.*, t. 4, 1952, p. 43-57).