BULLETIN DE LA S. M. F.

KENTARO YANO

Quelques remarques sur les variétés à structure presque complexe

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 57-80
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__57_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
83, 1955, p. 57 à 80.

QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS A STRUCTURE PRESQUE COMPLEXE ;

PAR M. KENTARO YANO.

1. Introduction. — La théorie des variétés à structure analytique complexe, et surtout la géométrie de connexions affines dans de telles variétés a été inaugurée par J. A. Schouten [1] (1) et a été développée par lui avec la collaboration de D. Van Dantzig [1]. Ils ont montré qu'il existe, dans une variété à structure analytique complexe, une classe spéciale mais très importante de connexions affines et que, si la variété est munie d'une métrique hermitienne

$$ds^2 = 2\, g_{\mu\bar{\nu}}(z, \bar{z})\, dz^\mu\, d\bar{z}^\nu$$

et la connexion affine de Levi-Civita appartient à cette classe spéciale, alors les coefficients $g_{\mu\bar{\nu}}(z, \bar{z})$ de cette forme hermitienne doivent avoir la forme

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \frac{\partial^2 \Phi(z, \bar{z})}{\partial z^\mu \partial \bar{z}^\nu}, \tag{0.1}$$

où $\Phi(z, \bar{z})$ est une fonction scalaire à valeur réelle.

Cette métrique a été aussi indépendamment trouvée par E. Kaehler [1] et s'eppelle actuellement métrique kaehlérienne.

La théorie des variétés complexes à métrique kaehlérienne s'est récemment montrée la fécondité surtout dans la géométrie différentielle globale (S. Bochner [1], [2], [3]; S. S. Chern [1]; B. Eckmann et H. Guggenheimer [1], [2]; H. Guggenheimer [1], [2], [3]; A. Lichnerowicz [1], [2], [3], [4], [5], [6]; A. Weil [1]; K. Yano et S. Bochner [1]).

Or, une structure analytique complexe d'une variété donne, à chaque espace tangent en un point de la variété, une structure d'espace vectoriel complexe.

Inversement, si une variété réelle à un nombre pair de dimensions possède une « structure » qui associe, à chaque espace tangent en un point de la variété, une structure d'espace vectoriel complexe, cette variété s'appelle variété à structure presque complexe. L'idée de la structure presque complexe a été premièrement introduite par C. Ehresmann [1], [2].

Une structure presque complexe dans une variété réelle de dimension $2n$ est définie par un tenseur mixte réel $\varphi^i{}_j$ satisfaisant à $\varphi^i{}_j\, \varphi^j{}_k = -\delta^i_k$, ou par n formes

(1) Les nombres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

de Pfaff à valeur complexe ω^α formant avec leurs conjuguées $\overline{\omega}^\alpha$ un système de formes indépendantes.

G. de Rham, C. Ehresmann [1], [2] et P. Libermann [1], [2], [3] ont donné, en termes de ces formes de Pfaff, une condition nécessaire et aussi suffisante dans le cas où ces formes de Pfaff sont analytiques sur la variété, pour qu'une structure presque complexe soit induite par une structure complexe.

B. Eckmann et A. Frölicher [1] ont aussi donné, en termes du tenseur $\varphi^i{}_j$, une condition nécessaire et aussi suffisante dans le cas où le tenseur est analytique réel sur la variété.

Il est très intéressant de remarquer qu'il y a une relation close entre ce travail de B. Eckmann et A. Frölicher et celui de A. Nijenhuis [1] qui a étudié les conditions que certains vecteurs propres d'un tenseur de la forme $\varphi^i{}_j$ soient toujours tangents à une sous-variété. En effet, le premier membre de la condition d'Eckmann et Frölicher donne justement l'invariant trouvé par Nijenhuis (*voir* aussi J. A. Schouten [2], [3]).

On peut étudier la condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque complexe soit complexe du point de vue de la géométrie de connexions affines. Une telle étude a été tout récemment faite par W. V. D. Hodge [1] et E. M. Patterson [1].

Le présent Mémoire est un petit essai de clarifier les relations entre les travaux cités plus haut.

Il a été l'objet de deux conférences faites par l'auteur à la Faculté des Sciences de Marseille au mois de novembre 1953.

L'auteur voudrait exprimer ici sa profonde gratitude à MM. les Professeurs J. A. Schouten et A. Lichnerowicz — les conversations avec eux furent extrêmement précieuses pour ce travail — et aussi à M. le Professeur P. Vincensini qui lui a donné une heureuse chance de rester à Marseille et de faire deux conférences à la Faculté des Sciences de Marseille.

2. **Variété à structure analytique complexe.** — Considérons une variété V_{2n} à un nombre pair de dimensions tout entièrement recouvert par un ensemble de domaines ouverts munis d'une carte locale, c'est-à-dire d'un système de coordonnées locales. Une carte locale associe, à chaque point de son domaine, $2n$ nombres réels $x^i(i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n; \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n})$ ou n nombres complexes $z^\lambda = x^\lambda + ix^{\overline{\lambda}}(\lambda, \mu, \nu, \ldots = 1, 2, \ldots, n; \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}, \ldots = \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n})$. On appelle (x^i) les coordonnées réelles et (z^λ) les coordonnées complexes de ce point par rapport à cette carte.

Or, supposons qu'il existe un atlas, c'est-à-dire un ensemble de cartes locales, tel que la variété est entièrement recouverte par leurs domaines et, pour un point dans l'intersection de deux domaines de cartes locales, les coordonnées complexes z'^λ du point par rapport à une des cartes locales sont les fonctions analytiques complexes, à jacobien non nul, de coordonnées complexes z^λ du même point par rapport à l'autre carte locale :

$$z'^\lambda = f^\lambda(z^1, z^2, \ldots, z^n). \tag{2.1}$$

On dit alors que la variété admet une structure analytique complexe définie par cet atlas.

On appelle variété à structure analytique complexe, ou tout simplement variété complexe, une variété V_{2n} qui admet une structure analytique complexe et on la désigne quelquefois par C_n.

Cela étant, on appelle variété complexe conjuguée une variété $\overline{C}_n$ qui peut être mise en correspondance homéomorphe avec la variété C_n de telle manière que, si la carte locale (z^λ) de C_n correspond à la carte locale $(z^{\bar\lambda})$ de $\overline{C}_n$, il y a les relations $z^{\bar\lambda} = \overline{z}^\lambda$ entre les coordonnées complexes des points correspondants, $\overline{z}^\lambda$ désignant les nombres complexes conjugués de z^λ.

Or, si l'on a une fonction analytique réelle $f(x^i)$ des coordonnées réelles x^i, on peut la regarder comme fonction analytique $f(z, \overline{z})$ de coordonnées complexes z^λ et de coordonnées complexes conjuguées $\overline{z}^\lambda$. On développe cette fonction en série de z^λ et $\overline{z}^\lambda$ et l'on remplace $\overline{z}^\lambda$ par $z^{\bar\lambda}$. Alors on obtient une fonction analytique $f(z^\lambda, z^{\bar\lambda})$ de z^λ et de $z^{\bar\lambda}$. Donc, on peut toujours regarder la fonction analytique $f(z, \overline{z})$ sur la variété V_{2n} comme fonction analytique sur la variété $C_n \times \overline{C}_n$.

Pour définir les dérivés partielles d'une fonction $f(z, \overline{z})$ dans C_n, on la considère d'abord comme fonction de z^λ et $z^{\bar\lambda}$ et prend les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial z^\lambda}$ et $\frac{\partial f}{\partial z^{\bar\lambda}}$ et enfin on pose

$$z^{\bar\lambda} = \overline{z}^\lambda. \tag{2.2}$$

On désigne ces dérivées partielles par $\frac{\partial f}{\partial z^\lambda}$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}^\lambda}$.

Les équations $z^{\bar\lambda} = \overline{z}^\lambda$ peuvent être regardées comme celles qui définissent la variété originale V_{2n} dans $C_n \times \overline{C}_n$.

3. **Vecteurs et tenseurs dans une variété complexe.** — Un vecteur contrevariant dans une variété complexe V_{2n} de dimension topologique $2n$ est défini comme un être géométrique qui a, dans chaque système de coordonnées complexes locales, $2n$ composantes $v^i = (v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ dont la loi de transformation vis-à-vis d'une transformation de coordonnées complexes (2.1) est

$$v'^\lambda = \frac{\partial z'^\lambda}{\partial z^\rho} v^\rho, \qquad v'^{\bar\lambda} = \frac{\partial \overline{z}'^\lambda}{\partial \overline{z}^\rho} v^{\bar\rho}. \tag{3.1}$$

Donc, un vecteur contrevariant v^i de V_{2n} peut être regardé comme vecteur contrevariant dans $C_n \times \overline{C}_n$ défini sur la sous-variété $z^{\bar\lambda} = \overline{z}^\lambda$, une transformation de coordonnées complexes dans $C_n \times \overline{C}_n$ étant donnée par

$$z'^\lambda = f^\lambda(z^1, z^2, \ldots, z^n), \qquad z'^{\bar\lambda} = \overline{f}^\lambda(z^{\bar 1}, z^{\bar 2}, \ldots, z^{\bar n}), \tag{3.2}$$

où $\overline{f}^\lambda$ désignent les fonctions complexes conjuguées de f^λ.

De cette définition, il est évident que si $(v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ sont les composantes d'un vecteur contrevariant, alors $(v^\lambda, 0)$, $(0, v^{\bar\lambda})$ et $(\overline{v^{\bar\lambda}}, \overline{v^\lambda})$ le sont aussi.

Or, $(v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ étant regardé comme un vecteur dans $C_n \times \bar{C}_n$, $(v^\lambda, 0)$ est sa projection sur le plan γ_n tangent â C_n, et $(0, v^{\bar\lambda})$ est sa projection sur le plan $\bar\gamma_n$ tangent à $\bar{C}_n$.

Quant à $(\overline{v^{\bar\lambda}}, \overline{v^\lambda})$, on peut lui donner une interprétation suivante : on décompose d'abord $(v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ en $(v^\lambda, 0)$ et $(0, v^{\bar\lambda})$. Entre γ_n et $\bar\gamma_n$, il existe une correspondance. Par cette correspondance, le vecteur $(0, v^{\bar\lambda})$ correspond à $(\overline{v^{\bar\lambda}}, 0)$ et $(v^\lambda, 0)$ à $(0, \overline{v^\lambda})$. La somme des vecteurs correspondants donne $(\overline{v^{\bar\lambda}}, \overline{v^\lambda})$.

On appelle ce vecteur, vecteur conjugué du vecteur original. Si le vecteur original et son vecteur conjugué coïncident, on l'appelle vecteur autoconjugué. D'après l'interprétation précédente, un vecteur autoconjugué doit être tangent à la sous-variété $z^{\bar\lambda} = \bar{z}^\lambda$ dans $C_n \times \bar{C}_n$.

Or, un vecteur ayant pour composantes $(v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ dans un système de coordonnées complexes $(z^\lambda, \bar{z}^\lambda)$ si l'on passe du système de coordonnées complexes $(z^\lambda, \bar{z}^\lambda)$ au système de coordonnées réelles

$$x^\lambda = \frac{1}{2}(z^\lambda + \bar{z}^\lambda), \qquad x^{\bar\lambda} = \frac{1}{2i}(z^\lambda - \bar{z}^\lambda),$$

le vecteur aura les composantes

$$v'^\lambda = \frac{1}{2}(v^\lambda + v^{\bar\lambda}), \qquad v'^{\bar\lambda} = \frac{1}{2i}(v^\lambda - v^{\bar\lambda}).$$

Donc, un vecteur et son conjugué ont les composantes complexes conjuguées les unes aux autres et, par conséquent, un vecteur autoconjugué a les composantes réelles dans un système de coordonnées réelles. Donc, on appelle aussi un vecteur autoconjugué : vecteur réel.

Les mêmes considérations s'appliquent aux vecteurs covariants et aux tenseurs généraux.

Cela étant, de la loi de transformation (3.1) des composantes d'un vecteur contrevariant, on voit que si $(v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ sont les composantes d'un vecteur contrevariant, $(iv^\lambda, -iv^{\bar\lambda})$ le sont aussi, et si $(v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ est auto-conjugué, $(iv^\lambda, -iv^{\bar\lambda})$ le sont aussi.

On peut considérer que le vecteur $(iv^\lambda, -iv^{\bar\lambda})$ est obtenu de $v^i = (v^\lambda, v^{\bar\lambda})$ en le multipliant par la matrice

$$\varphi^i{}_j = \begin{bmatrix} i\,\delta^\lambda_\mu & 0 \\ 0 & -i\,\delta^{\bar\lambda}_{\bar\mu} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Puisque $\varphi^i{}_j$ change un vecteur contrevariant arbitraire v^i en un vecteur contrevariant $\varphi^i{}_j v^j$, on voit, d'après la loi de quotient, que $\varphi^i{}_j$ définissent un tenseur mixte de second degré. Il est auto-conjugué et satisfait aux

(3.4) $$\varphi^i{}_j\varphi^j{}_k = -\delta^i_k.$$

Nous appelons collinéation fondamentale la correspondance $v^i \rightarrow \varphi^i{}_j v^j$,

Or si l'on définit deux tenseurs $p^i{}_j$ et $q^i{}_j$ par

(3.5) $$p^i{}_j = \frac{1}{2}(\delta^i_j - i\varphi^i{}_j), \qquad q^i{}_j = \frac{1}{2}(\delta^i_j + i\varphi^i{}_j),$$

ils ont les composantes

(3.6) $$p^i{}_j = \begin{bmatrix} \delta^\lambda_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad q^i{}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^{\bar\lambda}_{\bar\mu} \end{bmatrix}.$$

Donc, on voit que, pour un vecteur contrevariant arbitraire $v^i = (v^\lambda, v^{\bar\lambda})$, on a

$$p^i{}_j v^j = (v^\lambda, 0) \qquad \text{et} \qquad q^i{}_j v^j = (0, v^{\bar\lambda})$$

et, par conséquent, $p^i{}_j$ est un opérateur qui projette un vecteur contrevariant sur le plan γ_n tangent à C_n et $q^i{}_j$ celui qui projette un vecteur contrevariant sur le plan $\bar\gamma_n$ tangent à $\bar C_n$.

Il va sans dire que

(3.7) $$p^i{}_j + q^i{}_j = \delta_j \qquad \text{et} \qquad p^i{}_j - q^i{}_j = -i\varphi^i{}_j.$$

4. La connexion affine dans une variété complexe. — Dans une variété complexe V_{2n}, une connexion affine est définie par les composantes $\Gamma^i_{jk}(z, \bar z)$ ayant la loi de transformation

(4.1) $$\Gamma'^i_{jk} = \frac{\partial z'^i}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^s}{\partial z'^j}\frac{\partial z^t}{\partial z'^k}\Gamma^n_{st} + \frac{\partial^2 z^r}{\partial z'^j \partial z'^k}\right).$$

De la forme spéciale (3.2) de transformations de coordonnées et de (4.1) on voit que les quantités

$$\Gamma^\lambda_{\mu\bar\nu}, \quad \Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu}, \quad \Gamma^\lambda_{\bar\mu\bar\nu}, \quad \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\nu}, \quad \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\bar\nu}, \quad \Gamma^{\bar\lambda}_{\bar\mu\nu}$$

sont toutes transformées comme les composantes de tenseurs.

Or, considérons la dérivée covariante $\varphi^i{}_{j;k}$ du tenseur $\varphi^i{}_j$. Par un calcul direct, on obtient

$$\varphi^\lambda{}_{\mu;k} = 0, \qquad \varphi^\lambda{}_{\bar\mu;k} = -2i\Gamma^\lambda_{\bar\mu;k}, \qquad \varphi^{\bar\lambda}{}_{\mu;k} = +2i\Gamma^{\bar\lambda}_{\mu;k}, \qquad \varphi^{\bar\lambda}{}_{\bar\mu;k} = 0.$$

Donc, on voit que si l'on définit une connexion affine par les fonctions telles que

(4.2) $$\Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\bar\mu\bar\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\bar\nu} = 0,$$

on a

(4.3) $$\varphi^i{}_{j;k} = 0$$

par rapport à cette connexion. Puisque le tenseur $\varphi^i{}_j$ définit une collinéation dans un espace vectoriel tangent, les équations (4.3) signifient que la connexion affine ne change pas cette collinéation fondamentale.

Il est à remarquer que les trois conditions

$$\varphi^i{}_{j;k} = 0, \qquad p^i{}_{j;k} = 0 \qquad \text{et} \qquad q^i{}_{j;k} = 0$$

sont toutes équivalentes. Donc, on a :

THÉORÈME 4.1. — *Dans une variété complexe, il est possible d'introduire une connexion affine telle que $\varphi^i{}_{j;k} = 0$, c'est-à-dire telle qu'elle ne change pas la collinéation fondamentale définie par le tenseur $\varphi^i{}_j$.*

De plus, puisque les composantes $\Gamma^\lambda_{\mu k}$ et $\Gamma^{\bar\lambda}_{\bar\mu k}$ sont encore arbitraires, on voit qu'il y a une classe assez large des connexions affines satisfaisant aux conditions

$$\varphi^i{}_{j;k} = 0, \qquad p^i{}_{j;k} = 0 \qquad \text{ou} \qquad q^i{}_{j;k} = 0.$$

Or, on sait que les équations

$$\Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu} = 0, \qquad \Gamma^\lambda_{\bar\mu\bar\nu} = 0, \qquad \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\nu} = 0, \qquad \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\bar\nu} = 0$$

ont séparément un sens géométrique qui ne dépend pas du choix de coordonnées.

Prenons, par exemple, la première équation $\Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu} = 0$. On peut lui donner une interprétation suivante : On considère un vecteur arbitraire $v^i = (0, v^{\bar\lambda})$ dans le plan $\bar\gamma_n$ tangent à $\bar C_n$ et l'on forme la différentielle covariante de ce vecteur le long de C_n :

$$\delta v^\lambda = v^{\bar\mu}\Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu}\, dz^\nu, \qquad \delta v^{\bar\lambda} = dv^{\bar\lambda} + v^{\bar\mu}\Gamma^{\bar\lambda}_{\bar\mu\nu}\, dz^\nu.$$

Donc, l'équation $\Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu} = 0$ signifie que le plan $\bar\gamma_n$ tangent à $\bar C_n$ est toujours parallèle le long de C_n par rapport à cette connexion affine.

De même on peut facilement vérifier les interprétations suivantes :

$$(4.4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu} = 0, & \bar\gamma_n \text{ est parallèle le long de } C_n; \\ \Gamma^\lambda_{\bar\mu\bar\nu} = 0, & \bar C_n \text{ est totalement géodésique}; \\ \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\nu} = 0, & C_n \text{ est totalement géodésique}; \\ \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\bar\nu} = 0, & \gamma_n \text{ est parallèle le long de } \bar C_n, \end{array}\right.$$

et

$$(4.5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Gamma^\lambda_{\bar\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\bar\mu\bar\nu} = 0, & \bar\gamma_n \text{ est un champ de plans parallèles}; \\ \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\bar\lambda}_{\mu\nu} = 0, & \gamma_n \text{ est un champ de plans parallèles}. \end{array}\right.$$

Donc, on a :

THÉORÈME 4.2. — *La condition $\varphi^i{}_{j;k} = 0$ est équivalente au fait que γ_n et $\bar\gamma_n$ sont tous les deux champs de plans parallèles.*

THÉORÈME 4.3. — *Dans une variété complexe, il est possible d'introduire une connexion affine telle que γ_n et $\bar{\gamma}_n$ sont tous les deux champs de plans parallèles.* (Schouten et Dantzig [1]).

5. Métrique hermitienne et métrique kaehlérienne. — Supposons qu'on se donne, dans une variété complexe, une métrique définie positive

$$ds^2 = g_{jk}(z, \bar{z})\, dz^j\, dz^k, \tag{5.1}$$

où les coefficients $g_{jk} = g_{kj}$ satisfont aux

$$g_{\mu\nu} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0, \tag{5.2}$$

et sont autoconjugués

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \overline{g_{\bar{\mu}\nu}}. \tag{5.3}$$

Alors la métrique (5.1) prend la forme

$$ds^2 = 2 g_{\mu\bar{\nu}}(z, \bar{z})\, dz^\mu\, dz^{\bar{\nu}} \tag{5.4}$$

et s'appelle métrique hermitienne.

Puisque le tenseur $g_{jk}\varphi^j{}_s\varphi^k{}_t$ a les composantes

$$g_{jk}\varphi^j{}_s\varphi^k{}_t = \begin{bmatrix} -g_{\mu\nu} & g_{\mu\bar{\nu}} \\ g_{\bar{\mu}\nu} & -g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \end{bmatrix},$$

les équations (5.2) sont équivalentes aux

$$g_{rj}\varphi^r{}_i\varphi^j{}_k = g_{ik}. \tag{5.5}$$

Si l'on pose

$$g_{rj}\varphi^r{}_i = \varphi_{ji}, \tag{5.6}$$

l'équation (3.4) prend la forme

$$\varphi_{ji}\varphi^j{}_k = -g_{ik}$$

et l'équation (5.5) la forme

$$\varphi_{ij}\varphi^j{}_k = +g_{ik},$$

d'où l'on voit que le tenseur φ_{ij} est antisymétrique dans ces deux indices. En effet, le tenseur φ_{jk} a les composantes

$$\varphi_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & -i g_{\mu\bar{\nu}} \\ i g_{\bar{\mu}\nu} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Si l'on considère (5.4) comme une métrique

$$ds^2 = 2 g_{\mu\bar{\nu}}\, dz^\mu\, dz^{\bar{\nu}}$$

dans $C_n \times \overline{C}_n$, alors C_n et $\overline{C}_n$ deviennent les variétés isotropes.

Si l'on reste sur V_{2n} définie par $z^{\bar{\lambda}} = \bar{z}^{\lambda}$ dans $C_n \times \bar{C}_n$, le plan γ_n tangent à C_n et le plan $\bar{\gamma}_n$ tangent à $\bar{C}_n$ deviennent les plans isotropes.

Or, si les coefficients g_{jk} de (5.4) satisfont aux

$$\frac{\partial g_{\bar{\mu}\nu}}{dz^{\omega}} = \frac{\partial g_{\bar{\mu}\omega}}{dz^{\nu}}, \qquad \frac{\partial g_{\mu\bar{\nu}}}{d\bar{z}^{\omega}} = \frac{\partial g_{\mu\bar{\omega}}}{d\bar{z}^{\nu}}, \tag{5.8}$$

(5.4) s'appelle métrique kaehlérienne.

Or on peut aisément vérifier que la condition (5.8) est équivalente à

$$\varphi^{i}{}_{j;k} = 0 \tag{5.9}$$

ou à

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \left\{ {\lambda \atop \bar{\mu}\bar{\nu}} \right\} = \left\{ {\bar{\lambda} \atop \mu\nu} \right\} = \left\{ {\bar{\lambda} \atop \mu\bar{\nu}} \right\} = 0, \tag{5.10}$$

ou encore à

$$\varphi_{ij;k} = (g_{is}\varphi^{s}{}_{j})_{;k} = 0, \tag{5.11}$$

les $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ étant les symboles de Christoffel formés avec les g_{jk}. Donc, les théorèmes 4.1 et 4.3 nous donnent :

THÉORÈME 5.1. — *Pour qu'une variété complexe à métrique hermitienne soit à métrique kaehlérienne, il faut et il suffit que le parallélisme de Levi-Civita ne change pas la collinéation fondamentale.*

THÉORÈME 5.2. — *Pour qu'une variété complexe à métrique hermitienne soit à métrique kaehlérienne, il faut et il suffit que le champ de plans nuls γ_n et, par conséquent, le champ de plans nuls $\bar{\gamma}_n$ aussi, soient tous les deux champs parallèles par rapport au parallélisme de Levi-Civita* (E. M. Patterson [1]).

D'autre part, si l'on considère la forme extérieure

$$\varphi = \varphi_{ij}\, dz^{i} \wedge dz^{j} = -2ig_{\lambda\bar{\mu}}\, dz^{\lambda} \wedge d\bar{z}^{\mu}, \tag{5.12}$$

on trouve

$$\begin{aligned} d\varphi = & -i\left(\frac{\partial g_{\lambda\bar{\mu}}}{dz^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\bar{\mu}}}{dz^{\lambda}}\right) dz^{\lambda} \wedge d\bar{z}^{\mu} \wedge dz^{\nu} \\ & - i\left(\frac{\partial g_{\lambda\bar{\mu}}}{d\bar{z}^{\nu}} - \frac{\partial g_{\lambda\bar{\nu}}}{d\bar{z}^{\mu}}\right) dz^{\lambda} \wedge d\bar{z}^{\mu} \wedge d\bar{z}^{\nu}. \end{aligned}$$

Donc, on voit que (5.8) est aussi équivalente à $d\varphi = 0$.

6. Variété presque complexe. — Considérons une variété à un nombre pair $2n$ de dimensions de classe C^{r+1}. S'il y existe un champ de tenseur mixte $\varphi^{i}{}_{j}(x)$ de classe C^{r} satisfaisant aux relations

$$\varphi^{i}{}_{j}\varphi^{j}{}_{k} = -\delta^{i}_{k}, \tag{6.1}$$

on dit que ce tenseur donne une structure presque complexe à la variété et l'on appelle la variété : variété presque complexe.

Cela étant, considérons la valeur propre a et le vecteur propre λ^i du tenseur $\varphi^i{}_j$:

$$\varphi^i{}_j \lambda^j = a\lambda^i. \tag{6.2}$$

En multipliant (6.2) par $\varphi^r{}_i$ et en sommant par rapport à i, on trouve $a^2 = -1$, d'où $a = +i$ ou $a = -i$. Puisque le tenseur $\varphi^i{}_j$ est réel, on voit qu'il y a n valeurs propres $+i$ et n valeurs propres $-i$.

Désignons par $\xi^i_\alpha(x)$ ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1', 2', \ldots, n'$) n vecteurs propres correspondant à la valeur propre $+i$ et linéairement indépendants. Alors ses conjugués complexes $\xi^i_{\bar\alpha}(x)$ $(\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma, \ldots = \bar{1}', \bar{2}', \ldots, \bar{n}')$ sont n vecteurs propres correspondants à la valeur propre $-i$ et linéairement indépendants.

Dans ce cas, $2n$ vecteurs ξ^i_α et $\xi^i_{\bar\alpha}$ sont linéairement indépendants, parce que si l'on a les relations de la forme

$$\gamma^\alpha \xi^i_\alpha + \gamma^{\bar\alpha} \xi^i_{\bar\alpha} = 0$$

pour certains γ^α et $\gamma^{\bar\alpha}$ non tous nuls, en le multipliant par $\varphi^r{}_i$ et en sommant par rapport à i, on trouve

$$\gamma^\alpha \xi^i_\alpha - \gamma^{\bar\alpha} \xi_{\bar\alpha} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma^\alpha \xi^i_\alpha = \gamma^{\bar\alpha} \xi^i_{\bar\alpha} = 0,$$

ce qui est une contradiction à notre supposition que ξ^i_α et $\xi^i_{\bar\alpha}$ soient respectivement linéairement indépendants.

Les n vecteurs ξ^i_α déterminent un champ de plans γ_n de dimension complexe n et n vecteurs $\xi^i_{\bar\alpha}$ un champ de plans complexe conjugué $\bar\gamma_n$ et les plans γ_n et $\bar\gamma_n$ n'ont pas de direction commune.

Or, $2n$ vecteurs contrevariants ξ^i_α et $\xi^i_{\bar\alpha}$ étant linéairement indépendants, le déterminant de la matrice $(\xi^i_\alpha, \xi^i_{\bar\alpha})$ est différent de zéro. Donc, on peut définir la matrice inverse $(\xi^\alpha_j, \xi^{\bar\alpha}_j)$ de cette matrice. Alors, on a

$$\xi^\alpha_i \xi^i_\beta = \delta^\alpha_\beta, \qquad \xi^\alpha_i \xi^i_{\bar\beta} = 0, \qquad \xi^{\bar\alpha}_i \xi^i_\beta = 0, \qquad \xi^{\bar\alpha}_i \xi^i_{\bar\beta} = \delta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} \tag{6.3}$$

et

$$\xi^i_\alpha \xi^\alpha_j + \xi^i_{\bar\alpha} \xi^{\bar\alpha}_j = \delta^i_j. \tag{6.4}$$

Cela étant, dans une variété à structure presque complexe, si l'on pose

$$p^i{}_j = \frac{1}{2}(\delta^i_j - i\varphi^i{}_j), \qquad q^i{}_j = \frac{1}{2}(\delta^i_j + i\varphi^i{}_j), \tag{6.5}$$

on voit qu'un vecteur propre u^i correspondant à la valeur propre $+i$ satisfait à

$$p^i{}_j u^j = u^i, \qquad q^i{}_j u^j = 0,$$

et le vecteur propre v^i correspondant à la valeur propre $-i$ satisfait à

$$p^i{}_j v^j = 0, \qquad q^i{}_j v^j = v^i.$$

Donc, on a

$$\begin{cases} p^i{}_j \xi^j_\alpha = \xi^i_\alpha, & q^i{}_j \xi^j_\alpha = 0, \\ p^i{}_j \xi^j_{\bar\alpha} = 0, & q^i{}_j \xi^j_{\bar\alpha} = \xi^i_{\bar\alpha}. \end{cases} \tag{6.6}$$

En multipliant $p^i{}_k \xi^k_{\bar\alpha} = 0$ par $\xi^{\bar\alpha}_j$ et en sommant par rapport à $\bar\alpha$, on trouve

$$p^i{}_j = \xi^i_\alpha \xi^\alpha_j \tag{6.7}$$

et, de même,

$$q^i{}_j = \xi^i_{\bar\alpha} \xi^{\bar\alpha}_j \tag{6.8}$$

grâce aux relations (6.4) et (6.6).

De ces deux équations, on obtient

$$\varphi^i{}_j = i(p^i{}_j - q^i{}_j) = i\left(\xi^i_\alpha \xi^\alpha_j - \xi^i_{\bar\alpha} \xi^{\bar\alpha}_j\right). \tag{6.9}$$

Un vecteur arbitraire dx^i peut s'écrire sous la forme

$$dx^i = \delta^i_j\, dx^j = (p^i{}_j + q^i{}_j)\, dx^j = \xi^i_\alpha \omega^\alpha + \xi^i_{\bar\alpha} \omega^{\bar\alpha},$$

où

$$\omega^\alpha = \xi^\alpha_j\, dx^j, \qquad \omega^{\bar\alpha} = \xi^{\bar\alpha}_j\, dx^j.$$

Donc :

Si dx^i satisfait à $q^i{}_j\, dx^j = 0$, il a la forme $dx^i = \xi^i_\alpha \omega^\alpha$;
Si dx^i satisfait à $p^i{}_j\, dx^j = 0$, il a la forme $dx^i = \xi^i_{\bar\alpha} \omega^{\bar\alpha}$.

Or, on sait que, dans une variété presque complexe, il existe un champ de plans γ_n de dimension complexe n et un champ de plans complexes conjugués $\bar\gamma_n$ qui n'a pas de direction commune avec le premier.

Inversement, supposons que, dans une variété à un nombre pair $2n$ de dimensions, il existe un champ de plans γ_n de dimension complexe n et un champ de plans complexes conjugués $\bar\gamma_n$ qui n'a pas de direction commune avec le premier.

On prend n vecteurs ξ^i_α linéairement indépendants dans le plan γ_n, alors n vecteurs complexes conjugués $\xi^i_{\bar\alpha}$ sont aussi linéairement indépendants et dans le plan $\bar\gamma_n$. De plus, on sait que $2n$ vecteurs ξ^i_α et $\xi^i_{\bar\alpha}$ sont linéairement indépendants. Donc, on peut définir la matrice inverse $\left(\xi^\alpha_j, \xi^{\bar\alpha}_j\right)$ de la matrice $\left(\xi^i_\alpha, \xi^i_{\bar\alpha}\right)$, et l'on a les relations (6.3) et (6.4).

Donc, si l'on définit un champ de tenseur $\varphi^i{}_j$ par (6.9), on vérifie aisément qu'il a les composantes réelles et satisfait à (6.1) grâce aux relations (6.3) et (6.4), ξ^i_α étant les vecteurs propres de $\varphi^i{}_j$ correspondant à la valeur propre $+i$ et $\xi^i_{\bar\alpha}$ ceux correspondant à la valeur propre $-i$.

Par conséquent, la variété a une structure presque complexe. Donc, nous avons :

Théorème 6.1. — *Pour qu'une variété à un nombre pair $2n$ de dimensions soit à structure presque complexe, il faut et il suffit qu'elle contienne un champ de plans γ_n de dimension complexe n et son conjugué complexe $\bar{\gamma}_n$ qui n'a pas de direction commune avec le premier.*

Or, dans une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j$, on a (6.9). Donc, si l'on pose

$$g_{ij} = \xi_i^\alpha \xi_j^{\bar{\alpha}} + \xi_i^{\bar{\alpha}} \xi_j^\alpha, \tag{6.10}$$

alors la métrique $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ est définie positive et l'on a

$$g_{rs}\varphi^r{}_i \varphi^s{}_j = g_{ij}. \tag{6.11}$$

Donc, si l'on pose

$$\varphi_{ij} = g_{ir}\varphi^r{}_j, \tag{6.12}$$

on trouve

$$\varphi_{ij} = -i\left(\xi_i^\alpha \xi_j^{\bar{\alpha}} - \xi_i^{\bar{\alpha}} \xi_j^\alpha\right) = -\varphi_{ji}. \tag{6.13}$$

On peut facilement voir que le déterminant $|\varphi_{ij}|$ est différent de zéro.

Inversement, supposons qu'il existe, dans une variété de dimension paire, un tenseur antisymétrique φ_{ij} dont le déterminant est différent de zéro. Alors on peut transformer la forme quadratique extérieure $\varphi_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ dans une forme canonique :

$$\varphi_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = 2\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\alpha}},$$

où

$$\theta^\alpha = \lambda_i^\alpha\, dx^i, \qquad \theta^{\bar{\alpha}} = \lambda_i^{\bar{\alpha}}\, dx^i,$$

d'où

$$\varphi_{ij} = \lambda_i^\alpha \lambda_j^{\bar{\alpha}} - \lambda_i^{\bar{\alpha}} \lambda_j^\alpha. \tag{6.14}$$

Donc, en posant

$$\xi_i^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_i^\alpha - i\lambda_i^{\bar{\alpha}}\right), \qquad \xi_i^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_i^\alpha + i\lambda_i^{\bar{\alpha}}\right),$$

on trouve (6.13) et, par conséquent, si l'on définit g_{ij} par (6.10) et $\varphi^i{}_j$ par $\varphi^i{}_j = g^{ir}\varphi_{rj}$, on voit bien que $\varphi^i{}_j$ satisfait à $\varphi^i{}_j\varphi^j{}_k = -\delta^i_k$. Donc, on a

Théorème. 6.2. — *Pour qu'une variété soit à structure presque complexe, il faut et il suffit qu'il existe un champ de tenseur antisymétrique φ_{ij} dont le déterminant est différent de zéro* (A. Lichnerowicz [7]).

7. Intégrabilité de structure presque complexe. — Considérons une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j(x)$. S'il existe un système de coordonnées complexes $z^\lambda = z^\lambda(x)$ dans lequel le tenseur mixte a les composantes de la forme :

$$\varphi^i{}_j = \begin{bmatrix} i\delta^\lambda_\mu & 0 \\ 0 & -i\delta^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}} \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

on dit que la structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par un système de coordonnées complexes (z^λ).

Si la structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par deux systèmes de coordonnées complexes (z'^λ) et (z^λ), des équations

$$\varphi'^i{}_j = \frac{\partial z'^i}{\partial z^r}\frac{\partial z^s}{\partial z'^j}\varphi^r{}_s$$

et du fait que $\varphi'^i{}_j$ et $\varphi^r{}_s$ ont tous les deux les composantes de la forme (7.1), on voit que les z'^λ sont les fonctions analytiques complexes des variables z^λ, c'est-à-dire que $\varphi^i{}_j$ est induite par une même structure complexe.

Or, si une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par un système de coordonnées complexes (z^λ), on a, dans ce système de coordonnées, (3.6), donc,

$$p^i{}_j\, dz^j = 0 \qquad \text{ou} \qquad dz^\lambda = 0$$

sont intégrables et donnent n solutions $z^\lambda =$ const.

Inversement, $\varphi^i{}_j$ étant de classe C^ω et, par conséquent, $p^i{}_j$ pouvant être considérés comme fonctions complexes de variables complexes x^i, supposons que les équations

$$p^i{}_j\, dx^j = 0 \tag{7.2}$$

soient complètement intégrables. Alors, le rang de la matrice $(p^i{}_j)$ étant n, les équations (7.2) donnent n solutions indépendantes $z^\lambda(x)$ telles que

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^k}\, dx^k = 0$$

pour toutes les valeurs de dx^k satisfaisant aux (7.2).

Mais, dx^i satisfaisant aux (7.2) pouvant être écrites sous la forme $dx^i = \xi^i_{\bar\alpha}\,\omega^{\bar\alpha}$ et $\omega^{\bar\alpha}$ étant arbitraires, on en tire

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^k}\xi^k_{\bar\alpha} = 0,$$

d'où, en le multipliant par $\xi^{\bar\alpha}_j$ et en sommant par rapport à $\bar\alpha$,

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^k}\, q^k{}_j = 0.$$

De ces équations, on trouve

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^j} + i\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i}\varphi^i{}_j = 0,$$

de même

$$\frac{\partial \bar z^\lambda}{\partial x^j} - i\frac{\partial \bar z^\lambda}{\partial x^i}\varphi^i{}_j = 0.$$

Ces deux équations nous montrent que $\varphi^i{}_j$ a les composantes (7.1) dans le système de coordonnées (z^λ), c'est-à-dire que la structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par une structure complexe. Donc, on a :

THÉORÈME 7.1. — *Pour qu'une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit induite par une structure complexe, il faut et il suffit que les équations $p^i{}_j\,dx^j = 0$ soient complètement intégrables.*

Pour cette raison, si une structure presque complexe est induite par une structure complexe, on dit que cette structure presque complexe est intégrable.

On peut exprimer le même fait aussi sous la forme suivante :

Si une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par un système de coordonnées complexes, les équations $p^i{}_j\,dx^j = 0$ sont complètement intégrables et donnent n solutions indépendantes, donc, n vecteurs propres du tenseur $\varphi^i{}_j$ correspondant à la valeur propre $-i$ sont tangents à la famille de variétés de dimension complexe n.

Inversement, si n vecteurs propres du tenseur $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω correspondant à la valeur propre $-i$ sont tangents à une famille de variétés de dimension complexe n, les équations $p^i{}_j\,dx^j = 0$ sont complètement intégrables et, par conséquent, la structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par une structure complexe. Donc, on a :

THÉORÈME 7.2. — *Pour qu'une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit induite par une structure complexe, il faut et il suffit que n vecteurs propres du tenseur $\varphi^i{}_j$ correspondant à la valeur propre $-i$ soient tangents à une famille de variétés de dimension complexe n, ou d'une manière équivalente que n vecteurs propres du tenseur $\varphi^i{}_j$ correspondant à la valeur propre $+i$ soient tangents à une famille de variétés conjuguées de dimension complexe n.*

Or, si $\varphi^i{}_j$ est de classe C^ω, pour que les équations $p^i{}_j\,dx^j = 0$ soient complètement intégrables, il faut et il suffit que

$$d(p^i{}_k\,dx^k) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p^i{}_k}{\partial x^l} - \frac{\partial p^i{}_l}{\partial x^k}\right) dx^k \wedge dx^l$$

soient satisfaites pour toutes les valeurs de dx^i satisfaisant aux $p^i{}_j\,dx^j = 0$, d'où

$$\text{(7.3)} \qquad T^i{}_{kl} \equiv \left(\frac{\partial p^i{}_t}{\partial x^u} - \frac{\partial p^i{}_u}{\partial x^t}\right) q^t{}_k\, q^u{}_l = 0.$$

Donc, on a :

THÉORÈME 7.3. — *Pour qu'une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe ω^ω soit intégrable, il faut et il suffit que le tenseur $\varphi^i{}_j$ satisfasse à* (7.3).

Or étant donnée une forme différentielle extérieure

$$\xi_{i_1 i_2 \ldots i_r}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r},$$

on désigne par C, P et Q les opérations qui consistent à remplacer respectivement dx^i par $\varphi^i{}_j\,dx^j$, dx^i par $p^i{}_j\,dx^j$ et dx^i par $q^i{}_j\,dx^j$. Alors, pour une forme linéaire $\xi = \xi_i\,dx^i$, on a

$$\text{(7.4)} \qquad \begin{cases} Q\,dP\xi = -\dfrac{1}{2}\xi_i T^i{}_{kl}\,dx^k \wedge dx^l, \\[2ex] P\,dQ\xi = -\dfrac{1}{2}\xi_i \overline{T}^i{}_{kl}\,dx^k \wedge dx^l. \end{cases}$$

Donc, on a :

THÉORÈME 7.4. — *Pour qu'une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe* C^ω *soit intégrable, il faut et il suffit qu'on ait* $Q\, dP\xi = 0$ (ou $P\, dQ\xi = 0$) *pour n'importe quelle forme linéaire* ξ.

En substituant (6.5) dans (7.3), on trouve

$$T^i{}_{kl} \equiv -\frac{1}{8}(t^i{}_{kl} + i t^i{}_{ks}\varphi^s{}_l), \tag{7.5}$$

où nous avons posé

$$t^i{}_{kl} \equiv \left(\frac{\partial\varphi^i{}_t}{\partial x^k} - \frac{\partial\varphi^i{}_k}{\partial x^t}\right)\varphi^t{}_l - \left(\frac{\partial\varphi^i{}_t}{\partial x^l} - \frac{\partial\varphi^i{}_l}{\partial x^t}\right)\varphi^t{}_k. \tag{7.6}$$

De (7.5) on voit que $T^i{}_{kl} = 0$ et $t^i{}_{kl} = 0$ sont équivalentes, d'où l'on obtient :

THÉORÈME 7.5. — *Pour qn'une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe* C^ω *soit intégrable, il faut et il suffit que* $t^i{}_{kl} = 0$ (Eckmann et Frölicher [1]).

Le tenseur $t^i{}_{kl}$ a été aussi trouvé indépendamment par A. Nijenhuis [1] du point de vue du théorème 7.2 (Schouten [2], [3]).

H. Guggenheimer [3] a démontré que la condition $t^i{}_{kl} = 0$ est équivalente au fait que

$$(dC\, dC + C\, dC\, d)f = 0 \tag{7.7}$$

pour n'importe quel scalaire f. W. V. D. Hodge [1] a montré que la condition $t^i{}_{kl} = 0$ est équivalente au fait que

$$(dC\, dC + C\, dC\, d)\xi = 0 \tag{7.8}$$

pour n'importe quelle forme ξ d'un degré fixe.

8. Intégrabilité de structure presque complexe (*suite*). — Si une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par un système de coordonnées complexes (z^λ), on a (7.1) dans ce système de coordonnées complexes donc, on peut prendre comme ξ^i_α et $\xi^i_{\bar\alpha}$ les vecteurs suivants :

$$\xi^i_\alpha = \delta^i_\alpha, \qquad \xi^i_{\bar\alpha} = \delta^i_{\bar\alpha}.$$

Par conséquent, les équations aux dérivées partielles

$$X_{\bar\alpha} f \equiv \xi^i_{\bar\alpha}\frac{\partial f}{\partial z^i} = 0 \tag{8.1}$$

sont complètement intégrables et admettent n solutions indépendantes $z^1, z^2, \ldots, z^n$.

Inversement, dans une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j(x)$ de classe C^ω, si le système des équations aux dérivées partielles

$$X_{\bar\alpha} f \equiv \xi^i_{\bar\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

est complètement intégrable et admet n solutions indépendantes z^λ, on a

$$\xi^i_{\bar\alpha} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} = 0. \tag{8.2}$$

et, de même,

$$\xi^i_\alpha \frac{\partial \bar z^\lambda}{\partial x^i} = 0 \tag{8.3}$$

Donc, en multipliant (8.2) par $\xi^{\bar\alpha}_j$, on trouve

$$q^i{}_j \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^j} + i \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} \varphi^i{}_j = 0,$$

de même

$$\frac{\partial \bar z^\lambda}{\partial x^j} - i \frac{\partial \bar z^\lambda}{\partial x^i} \varphi^i{}_j = 0.$$

Ces équations montrent que, dans le système de coordonnées complexes (z^λ), le tenseur $\varphi^i{}_j$ a les composantes (7.1). Donc, la structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ est induite par ce système de coordonnées complexes. Donc, nous avons :

Théorème 8.1. — *Pour qu'une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit induite par une structure complexe, il faut et il suffit que les équations $X_{\bar\alpha} f = 0$ soient complètement intégrables.*

Or, si les fonctions $\varphi^i{}_j$ sont de classe C^ω, les conditions d'intégrabilité complète de $X_{\bar\alpha} f = 0$ sont données par

$$(X_{\bar\beta} X_{\bar\gamma}) f = \gamma^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta\bar\gamma} X_{\bar\alpha} f,$$

ou

$$\xi^j_{\bar\beta} \frac{\partial \xi^i_{\bar\gamma}}{\partial x^j} - \xi^j_{\bar\gamma} \frac{\partial \xi^i_{\bar\beta}}{\partial x^j} = \gamma^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta\bar\gamma} \xi^i_{\bar\alpha}, \tag{8.4}$$

où $\gamma^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta\bar\gamma}$ sont certaines fonctions.

Les équations (8.4) sont équivalentes aux

$$\Omega^\alpha{}_{\bar\beta\bar\gamma} \equiv -\left(\frac{\partial \xi^\alpha_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^\alpha_k}{\partial x^j}\right) \xi^j_{\bar\beta} \xi^k_{\bar\gamma} = 0, \tag{8.5}$$

d'où

$$\Omega^{\bar\alpha}{}_{\beta\gamma} \equiv -\left(\frac{\partial \xi^{\bar\alpha}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^{\bar\alpha}_k}{\partial x^j}\right) \xi^j_\beta \xi^k_\gamma = 0, \tag{8.6}$$

ce qui montre que

$$X_\alpha f \equiv \xi^i_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

sont aussi complètement intégrables. Donc, nous avons :

Théorème 8.2. — *Pour qu'une structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω*

soit induite par une structure complexe, il faut et il suffit que les conditions (8.5) *ou* (8.6) *soient verifiées.* (C. Ehresmann [1], P. Libermann [1]).

On peut aussi obtenir le théorème 8.2 de la manière suivante : D'après le théorème 7.1, pour qu'une structure presque complexe soit complexe, il faut et il suffit que $p^i{}_j\, dx^j = 0$ soit complètement intégrable. Mais puisque $p^i{}_j = \xi^i_\alpha \xi^\alpha_j$ et les vecteurs ξ^i_α sont linéairement indépendants, $p^i{}_j\, dx^j = 0$ sont équivalentes aux

$$(8.7) \qquad \omega^\alpha \equiv \xi^\alpha_j\, dx^j = 0.$$

La différentiation extérieure de (8.7) nous donne

$$(8.8) \qquad d\omega^\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi^\alpha_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^\alpha_k}{\partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^k.$$

Mais on a, d'autre part,

$$dx^i = \xi^i_\alpha \omega^\alpha + \omega_{\bar\alpha} \omega^{\bar\alpha},$$

et, par conséquent, (8.8) nous donne

$$(8.9) \qquad d\omega^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Omega^\alpha{}_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \Omega^\alpha{}_{\bar\beta\gamma}\,\omega^{\bar\beta} \wedge \omega^\gamma + \Omega^\alpha{}_{\beta\bar\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^{\bar\gamma} + \Omega^\alpha{}_{\bar\beta\bar\gamma}\,\omega^{\bar\beta} \wedge \omega^{\bar\gamma}\right),$$

où nous avons posé

$$(8.10) \qquad \Omega^a{}_{bc} = -\left(\frac{\partial \xi^a_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^a_k}{\partial x^j}\right) \xi^j_b \xi^k_c.$$

Les formes ω^α et $\omega^{\bar\alpha}$ étant linéairement indépendantes, d'après un théorème de Frobenius, on a le théorème 8.2.

Les $\Omega^a{}_{bc}$ définies par (8.10) peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$(8.11) \qquad \Omega^a{}_{bc} = \xi^a_i \left(\frac{\partial \xi^i_b}{\partial x^j}\xi^j_c - \frac{\partial \xi^i_c}{\partial x^j}\xi^j_b\right).$$

On appelle $\Omega^a{}_{bc}$ l'objet de non-holonomie du système de $2n$ vecteurs ξ^i_a.

L'équivalence de deux conditions $T^i{}_{jk} = 0$ et $\Omega^{\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} = 0$ se voit de la manière suivante :

En substituant $p^i{}_s = \xi^i_\alpha \xi^\alpha_s$ et $q^s{}_j = \xi^s_{\bar\alpha} \xi^{\bar\alpha}_j$ dans

$$T^i{}_{jk} \equiv \left(\frac{\partial p^i{}_s}{\partial x^t} - \frac{\partial p^i{}_t}{\partial x^s}\right) q^s{}_j q^t{}_k,$$

on trouve

$$(8.12) \qquad T^i{}_{jk} = -\xi^i_\alpha \xi^{\bar\beta}_j \xi^{\bar\gamma}_k \Omega^\alpha{}_{\bar\beta\bar\gamma}.$$

ou inversement

$$(8.13) \qquad \Omega^\alpha{}_{\bar\beta\bar\gamma} = -\xi^\alpha_i \xi^j_{\bar\beta} \xi^k_{\bar\gamma} T^i{}_{jk}.$$

Donc, $T^i{}_{jk} = 0$ et $\Omega^\alpha{}_{\bar\beta\bar\gamma} = 0$ sont équivalentes.

9. Connexion affine dans une variété presque complexe. — On sait qu'il est possible d'introduire, dans une variété complexe, une connexion affine de telle manière que $\varphi^i{}_{j;k} = 0$, c'est-à-dire, de telle manière que les champs de plans γ_n et $\bar{\gamma}_n$ sont tous les deux parallèles.

Cela étant, supposons qu'il soit possible d'introduire, dans une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j(x)$, une connexion affine de telle manière que $\varphi^i{}_{j;k} = 0$.

On sait que le tenseur $\varphi^i{}_j$ définit, dans chaque espace tangent, un plan γ_n de dimension complexe n déterminé par les vecteurs propres ξ^i_α correspondant à la valeur propre $+i$ et un plan complexe conjugué $\bar{\gamma}_n$ déterminé par les vecteurs propres $\xi^i_{\bar{\alpha}}$ correspondant à la valeur $-i$.

En dérivant les équations $\varphi^i{}_j \xi^j_\alpha = i\xi^i_\alpha$ covariantement, et tenant compte de $\varphi^i{}_{j;k} = 0$, on trouve $\varphi^i{}_j \xi^j_{\alpha;k} = i\xi^i_{\alpha;k}$, ce qui montre que $\xi^i_{\alpha;k}$ sont des combinaisons linéaires de ξ^i_α. Donc, on obtient

$$\xi^i_{\beta;k} = \xi^i_\alpha \Phi^\alpha_{\beta k}, \tag{9.1}$$

de même

$$\xi^i_{\bar{\beta};k} = \xi^i_{\bar{\alpha}} \Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}k}. \tag{9.2}$$

Ces équations montrent que le champ de plans γ_n et le champ de plans $\bar{\gamma}_n$ sont tous les deux champs parallèles par rapport à la connexion affine introduite.

Inversement, si γ_n et $\bar{\gamma}_n$ sont parallèles par rapport à une connexion affine, on a (9.1) et (9.2).

Or, des équations $\xi^\alpha_j \xi^j_\beta = \delta^\alpha_\beta$ et $\xi^\alpha_j \xi^j_{\bar{\beta}} = 0$, on trouve, par la dérivation covariante,

$$\xi^\alpha_{j;k}\xi^j_\beta + \Phi^\alpha_{\beta k} = 0,$$
$$\xi^\alpha_{j;k}\xi^j_{\bar{\beta}} \qquad = 0,$$

d'où

$$\xi^\alpha_{j;k} = -\xi^\beta_j \Phi^\alpha_{\beta k}. \tag{9.3}$$

De même on a

$$\xi^{\bar{\alpha}}_{j;k} = -\xi^{\bar{\beta}}_j \Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}k}. \tag{9.4}$$

Des équations (9.1), (9.2), (9.3) et (9.4), on obtient

$$\varphi^i{}_{j;k} = i\left(\xi^i_\alpha \xi^\alpha_j - \xi^i_{\bar{\alpha}} \xi^{\bar{\alpha}}_j\right)_{;k} = 0.$$

Donc, nous avons :

Théorème 9.1. — *Pour que $\varphi^i{}_{j;k} = 0$, il faut et suffit que les champs de plans γ_n et $\bar{\gamma}_n$ soient tous les deux parallèles par rapport à cette connexion.*

Or, la condition $\varphi^i{}_{j;k} = 0$ est équivalente à

$$p^t{}_{s;t} = \frac{\partial p^t{}_s}{\partial x^t} + p^r{}_s \Gamma^t_{rt} - p^t{}_r \Gamma^r_{st} = 0.$$

Donc, si l'on a $\varphi^i{}_{j;k} = 0$ et, par conséquent, $p^i{}_{j;k} = 0$, on en tire

$$\text{(9.5)} \qquad T^i{}_{jk} \equiv \left(\frac{\partial p^i{}_s}{\partial x^t} - \frac{\partial p^i{}_t}{\partial x^s}\right) q^s{}_j q^t{}_k = p^i{}_r q^s{}_j q^t{}_k S^r{}_{st},$$

où nous avons posé

$$\text{(9.6)} \qquad S^r{}_{st} = \Gamma^r_{st} - \Gamma^r_{ts},$$

et, par conséquent, si la connexion affine est telle que son tenseur de torsion satisfait à

$$\text{(9.7)} \qquad p^i{}_r q^s{}_j q^t{}_k S^r{}_{st} = 0,$$

la condition d'intégrabilité de la structure presque complexe est satisfaite. Donc, on a :

THÉORÈME 9.2. — *Pour qu'une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit à structure complexe, il faut et il suffit qu'on puisse y introduire une connexion affine telle que $\varphi^i{}_{j;k} = 0$ (ceci est équivalent au fait que les champs de plan γg_n et $\bar{\gamma}_n$ sont parallèles par rapport à cette connexion affine) et que $p^i{}_r g^s{}_j g^t{}_k S^r{}_{st} = 0$, où $S^r{}_{st}$ est le tenseur de torsion de cette connexion affine.*

Si l'on substitue (6.5) dans (9.7), on obtient

$$\begin{aligned} S^i{}_{jk} &- \varphi^s{}_j \varphi^t{}_k S^i{}_{st} + \varphi^i{}_r \varphi^s{}_j S^r{}_{sk} + \varphi^i{}_r \varphi^t{}_k S^r{}_{jt} \\ &- i(\varphi^i{}_r S^r{}_{jk} - \varphi^s{}_j S^i{}_{sk} - \varphi^t{}_k S^i{}_{jt} - \varphi^i{}_r \varphi^s{}_j \varphi^t{}_k S^r{}_{st}) = 0, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{(9.8)} \qquad S^i{}_{jk} = \varphi^s{}_j \varphi^t{}_k S^i{}_{st} - \varphi^i{}_r \varphi^s{}_j S^r{}_{sk} - \varphi^i{}_r \varphi^t{}_k S^i{}_{jt}$$

ou à

$$\text{(9.9)} \qquad \varphi^i{}_r \varphi^s{}_j \varphi^t{}_k S^r{}_{sk} = \varphi^i{}_r S^r{}_{jk} - \varphi^s{}_j S^i{}_{sk} - \varphi^t{}_k S^i{}_{jt}.$$

Or, si la connexion affine est semi-symétrique, c'est-à-dire si le tenseur de torsion de cette connexion affine a la forme

$$\text{(9.10)} \qquad S^i{}_{jk} = \delta^i_j \varphi_k - \delta^i_k \varphi_j,$$

φ_j étant un certain vecteur covariant, on voit facilement que la condition (9.7) est toujours satisfaite. Donc, on a

THÉORÈME 9.3. — *Pour qu'une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit à structure complexe, il faut et il suffit qu'on puisse y introduire une connexion affine semi-symétrique telle que $\varphi^i{}_{j;k} = 0$, ou d'une manière équivalente, telle que les champs de plans γ_n et $\bar{\gamma}_n$ soient parallèles par rapport à cette connexion affine.*

Il va sans dire que si la connexion affine est sans torsion, la condition (9.7) est toujours satisfaite. Donc, on a:

Théorème 9.4. — *Pour qu'une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit à structure complexe, il faut et il suffit qu'on puisse y introduire une connexion affine symétrique telle que* $\varphi^i{}_{j;k} = 0$ (W. V. D. Hodge [1]; E. M. Patterson [1]).

En combinant les théorèmes 9.1 et 9.4, on a :

Théorème 9.5. — *Pour qu'une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j$ de classe C^ω soit à structure complexe, il faut et il suffit qu'on puisse y introduire une connexion affine symétrique par rapport à laquelle les champs de plans γ_n et $\bar{\gamma}_n$ sont parallèles* (E. M. Patterson [1]).

10. Variété presque complexe à métrique hermitienne et celle à métrique kaehlérienne. — Considérons une variété à structure presque complexe $\varphi^i{}_j(x)$:

$$\varphi^i{}_j \varphi^j{}_k = -\delta^i_k, \tag{10.1}$$

et supposons qu'elle soit munie d'une métrique riemannienne définie positive

$$ds^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k. \tag{10.2}$$

Si la métrique satisfait à

$$g_{st} \varphi^s{}_j \varphi^t{}_k = g_{jk}, \tag{10.3}$$

elle s'appelle métrique hermitienne dans la variété presque complexe.

Si l'on pose

$$\varphi_{ij} = g_{ir} \varphi^r{}_j, \tag{10.4}$$

les équations (10.1) et (10.3) s'écrivent respectivement

$$\varphi_{ij} \varphi^j{}_k = -g_{ik} \quad \text{et} \quad \varphi_{ji} \varphi^j{}_k = +g_{ik}.$$

Donc, on voit que

$$\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}. \tag{10.5}$$

Il est facile de voir que (10.3) et (10.5) entraînent (10.1). Donc, on peut dire que la variété presque complexe à métrique hermitienne est caractérisée par un tenseur antisymétrique φ_{ij} et un tenseur symétrique g_{ij} satisfaisant à (10.3).

Si l'on a, de plus,

$$\varphi_{jk;l} = 0, \tag{10.6}$$

alors la variété s'appelle variété presque complexe à métrique kaehlérienne.

Dans une telle variété, le tenseur $t^i{}_{kl}$ s'annule :

$$t^i{}_{kl} \equiv (\varphi^i{}_{j;k} - \varphi^i{}_{k;j}) \varphi^j{}_l - (\varphi^i{}_{j;l} - \varphi^i{}_{l;j}) \varphi^j{}_k = 0. \tag{10.7}$$

Donc, si les composantes $\varphi^i{}_j$ sont fonctions analytiques réelles de coordonnées x^i, la variété presque complexe à métrique kaehlérienne est à structure analytique complexe et, par conséquent, une variété kaehlérienne.

Mais, si les composantes $\varphi^i{}_j$ sont seulement de classe $C^r(r \neq \omega)$, on ne sait pas encore si la variété presque complexe à métrique kaehlérienne est à structure analytique complexe ou non. Dans ce cas on l'appelle variété pseudokaehlérienne.

Donc, une variété pseudokaehlérienne est caractérisée par un tenseur antisymétrique φ_{jk} et un tenseur symétrique g_{jk} satisfaisant aux (10.3) et (10.6).

Il va sans dire que, dans une variété pseudokaehlérienne, on a

$$(10.8) \qquad \varphi_{ijk} \equiv \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial x^j}\right) = \varphi_{ij;k} + \varphi_{jk;i} + \varphi_{ki;j} = 0.$$

Inversement, supposons qu'on a, dans une variété presque complexe à métrique hermitienne, (10.3), (10.7) et (10.8). On a, en général,

$$\begin{aligned} t_{ikl} &\equiv (\varphi_{ij;k} - \varphi_{ik;j})\varphi^j{}_l - (\varphi_{ij;l} - \varphi_{il;j})\varphi^j{}_k \\ &= (\varphi_{ijk} - \varphi_{jk;i})\varphi^j{}_l - (\varphi_{ijl} - \varphi_{jl;i})\varphi^j{}_k \\ &= (\varphi_{ijk}\varphi^j{}_l - \varphi_{ijl}\varphi^j{}_k) - 2\varphi_{jk;i}\varphi^j{}_l. \end{aligned}$$

Donc, si l'on a $t_{ikl} = 0$ et $\varphi_{ijk} = 0$, on en tire (10.6).

Donc, on peut dire qu'une variété pseudokaehlérienne est caractérisée par φ_{jk} antisymétrique et g_{ik} symétrique satisfaisant aux (10.3), (10.7) et (10.8).

Cela étant, considérons une variété à $2n$ dimensions à métrique riemannienne $ds^2 = g_{jk}\,dx^j\,dx^k$ définie positive et irréductible, et supposons qu'il existe un tenseur antisymétrique φ_{jk} de rang $2n$ telle que $\varphi_{jk;l} = 0$.

Alors le tenseur $g_{st}\varphi^s{}_j\varphi^t{}_k$ donne une forme quadratique définie positive telle que

$$(g_{st}\varphi^s{}_j\varphi^t{}_k)_{;l} = 0.$$

Donc, d'après notre supposition sur l'irréductibilité, on doit avoir

$$g_{st}\varphi^s{}_j\varphi^t{}_k = c^2 g_{jk},$$

c^2 étant une constante positive. Donc, en écrivant $\varphi^s{}_j$ au lieu de $\frac{1}{c}\varphi^s{}_j$, on a

$$g_{st}\varphi^s{}_j\varphi^t{}_k = g_{jk},$$

et de plus $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$ et $\varphi_{ij;k} = 0$. Donc la variété est kaehlérienne. Donc si une variété à un nombre pair $2n$ de dimensions à métrique riemannienne définie positive irréductible contient un tenseur antisymétrique de rang $2n$ dont la dérivée covariante s'annule, elle est kaehlérienne (A. Lichnerowicz [7]).

Cela étant, revenons à une variété presque complexe à métrique hermitienne. Si l'on considère, dans chaque espace tangent vectoriel, une transformation $v^i \to \varphi^i{}_j v^j$, l'équation (10.3) montre que cette transformation ne change pas la longueur de ce vecteur. De plus l'équation (10.5) montre que cette transformation change un vecteur en un vecteur orthogonal au premier.

Or, il est assez facile de voir qu'on peut choisir $2n$ vecteurs λ^i_α et $\lambda^i_{\bar\alpha}$ unitaires et orthogonaux entre eux tels que

$$(10.9) \qquad \varphi^i{}_j\lambda^j_\alpha = +\lambda^i_{\bar\alpha}, \qquad \varphi^i{}_j\lambda^j_{\bar\alpha} = -\lambda^i_\alpha.$$

En posant

(10.10) $$\xi^i_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^i_\alpha - i\lambda^i_{\bar\alpha}\right), \qquad \xi^i_{\bar\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^i_\alpha + i\lambda^i_{\bar\alpha}\right)$$

on trouve

(10.11) $$\varphi^i{}_j \xi^j_\alpha = i\xi^i_\alpha, \qquad \varphi^i{}_j \xi^j_{\bar\alpha} = -i\xi^i_{\bar\alpha}$$

et

(10.12) $$g_{jk}\xi^j_\beta \xi^k_\gamma = 0, \qquad g_{jk}\xi^j_\beta \xi^k_{\bar\gamma} = \delta_{\beta\gamma}, \qquad g_{jk}\xi^j_{\bar\beta}\xi^k_{\bar\gamma} = 0.$$

Ces équations nous montrent que le plan γ_n déterminé par ξ^i_α et le plan $\bar\gamma_n$ déterminé par $\xi^i_{\bar\alpha}$ sont tous les deux nuls.

En désignant par $\left(\xi^\alpha_j, \xi^{\bar\alpha}_j\right)$ la matrice inverse de la matrice $\left(\xi^i_\alpha, \xi^i_{\bar\alpha}\right)$, on obtient

(10.13) $$g_{jk} = \xi^\alpha_j \xi^{\bar\alpha}_k + \xi^{\bar\alpha}_j \xi^\alpha_k,$$

et

(10.14) $$\varphi^i{}_j = i\left(\xi^i_\alpha \xi^\alpha_j - \xi^i_{\bar\alpha}\xi^{\bar\alpha}_j\right)$$

et, par conséquent,

(10.15) $$\varphi_{ij} = i\left(\xi^\alpha_i \xi^{\bar\alpha}_j - \xi^{\bar\alpha}_i \xi^\alpha_j\right).$$

Des équations (10.13) et (10.15), on trouve

(10.16) $$g_{jk}\,dx^j\,dx^k = 2\,\omega^\alpha\,\omega^{\bar\alpha}$$

et

(10.17) $$\varphi_{jk}\,dx^j \wedge dx^k = 2i\,\omega^\alpha \wedge \omega^{\bar\alpha}$$

respectivement,

Cela étant, nous allons considérer un système de coordonnées non holonomes défini par $2n$ vecteurs contrevariants ξ^i_α et $\xi^i_{\bar\alpha}$. Si l'on désigne par g_{bc} et φ_{bc} respectivement les composantes de g_{ik} et φ_{ik} par rapport à ce système, les équations (10.16) et (10.17) montrent que

(10.18) $$g_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\beta\nu} & 0 \end{bmatrix}$$

et

(10.19) $$\varphi_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & i\delta_{\beta\nu} \\ -i\delta_{\beta\nu} & 0 \end{bmatrix}.$$

Or, les composantes Γ^a_{bc} de la connexion $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ par rapport à ce système de coordonnées non holonomes sont données par

(10.20) $$\Gamma^a_{bc} = \xi^a_i\left(\xi^j_b \xi^k_c \left\{ {i \atop jk} \right\} + \frac{\partial \xi^i_b}{\partial x^j}\xi^j_c\right).$$

Donc, l'objet de non-holonomie (8.11) est donné par

(10.21) $$\Omega^a{}_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}.$$

Or, le fait que $g_{ik;l} = 0$ est exprimé par

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\xi^j_c - g_{eb}\Gamma^e_{ac} - g_{ae}\Gamma^e_{bc} = 0$$

ou par

$$\Gamma^a_{bc} + \Gamma^{\bar b}_{\bar a c} = 0, \tag{10.22}$$

où l'on convient que si l'on ajoute la barre à un indice déjà barré, ceci signifie de supprimer la barre,

Donc, des trois relations

$$\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} = +\Omega^a{}_{bc} \qquad \Gamma^{\bar b}_{c\bar a} - \Gamma^{\bar b}_{\bar a c} = +\Omega^{\bar b}{}_{c\bar a}, \qquad -\Gamma^{\bar c}_{\bar a b} + \Gamma^{\bar c}_{\bar b a} = -\Omega^{\bar c}{}_{\bar a b},$$

et (10.22), on obtient

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}\left(\Omega^a{}_{bc} + \Omega^{\bar b}{}_{c\bar a} - \Omega^{\bar c}{}_{\bar a b}\right) \tag{10.23}$$

(G. Vranceanu [1]).

De cette équation, on tire

$$\Gamma^{\bar\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\Omega^{\bar\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Omega^{\bar\beta}{}_{\gamma\alpha} - \Omega^{\bar\gamma}{}_{\alpha\beta}\right). \tag{10.24}$$

Donc, on voit que si la variété presque complexe à métrique hermitienne est intégrable, on a $\Gamma^{\bar\alpha}_{\beta\gamma} = 0$. Inversement si l'on a $\Gamma^{\bar\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, alors il est clair que $\Omega^{\bar\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$, d'après (10.21). Donc, on a :

Théorème 10.1. — *Pour qu'une variété presque complexe à métrique hermitienne soit intégrable, il faut et il suffit que $\Gamma^{\bar\alpha}_{\beta\gamma}$ soient nuls.*

Or, la condition $\varphi_{ij;k} = 0$ s'exprime par

$$\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial x^j}\xi^j_c - \varphi_{eb}\Gamma^e_{ac} - \varphi_{ae}\Gamma^e_{bc} = 0$$

ou par

$$\Gamma^\alpha_{\beta c} + \Gamma^{\bar\beta}_{\bar\alpha c} = 0, \qquad \Gamma^\alpha_{\bar\beta c} - \Gamma^\beta_{\bar\alpha c} = 0. \tag{10.25}$$

Donc, si les conditions $g_{ij;k} = 0$ et $\varphi_{ij;k} = 0$ sont toutes les deux satisfaites, on obtient, de (10.22) et (10.25),

$$\Gamma^\alpha_{\bar\beta c} = \Gamma^\beta_{\bar\alpha c} = 0, \tag{10.26}$$

donc,

$$\Omega^\alpha{}_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma} - \Gamma^\alpha_{\bar\gamma\bar\beta} = 0, \tag{10.27}$$

et, par conséquent, la variété est intégrable.

Les équations (10.26) montrent que les espaces non holonomes déterminés par (ξ^i_α) et $(\xi^i_{\bar\alpha})$ sont tous les deux parallèles.

Inversement, si les espaces non holonomes sont tous les deux parallèles, alors on a (10.26) et, par conséquent, $\varphi_{ij;k} = 0$, et la variété est intégrable et kaehlérienne. Donc, on a :

Théorème 10.2. — *Pour qu'une variété presque complexe à métrique hermitienne soit à métrique kaehlérienne, il faut et il suffit que* $\Gamma^{\alpha}_{\bar\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} = 0$. *Dans ce cas, la structure presque complexe est intégrable.*

Théorème 10.3. — *Dans une variété presque complexe à métrique hermitienne, si deux sous-espaces non holonomes déterminés par* ξ^i_α *et* $\xi^i_{\bar\alpha}$ *sont parallèles, la métrique est kaehlérienne et la structure presque complexe est intégrable* (E. M. Patterson [1]).

BIBLIOGRAPHIE.

S. Bochner :

[1] *Vector fields and Ricci curvature* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1946, p. 776-797).
[2] *Curvature in Hermitian metric* (*Ibid.*, t. 53, 1947, p. 179-195).
[3] *Curvature and Betti numbers* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 379-390).

S. S. Chern :

[1] *Characteristic classes of Hermitian manifolds* (*Ann. Math.*, t. 47, 1946, p. 85-121).

B. Eckmann et A. Frölicher :

[1] *Sur l'intégrabilité des structures presque complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 2284-2286).

B. Eckmann et H. Guggenheimer :

[1] *Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion* I, II (*Ibid.*, t. 229, 1949, p. 464-466 et 489-491).
[2] *Sur les variétés closes à métrique hermitienne sans torsion* (*Ibid.*, t. 229, 1949, p. 503-505).

C. Ehresmann :

[1] *Sur la théorie des espaces fibrés* (*Coll. de Top. alg.*, C. N. R. S., Paris, 1947, p. 3-15).
[2] *Sur les variétés presque complexes* (*Proc. Int. Congr. Math.*, 1950, p. 412-419).

C. Ehresmann et P. Libermann :

[1] *Sur les structures presque hermitiennes isotropes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1281-1283).

H. Guggenheimer :

[1] *Sur les variétés qui possèdent une forme extérieure quadratique fermée* (*Ibid.*, t. 232, 1951, p. 470-472).
[2] *Ueber komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kaehlerscher Metrik* (*Comm. Math. Helv.*, t. 25, 1951, p. 257-297).
[3] *Ueber Kaehlersche und symplektische Differentialalgebren* (*Tôhoku Math. J.*, t. 4 1952, p. 157-171).
[4] *Geometria pseudo-Kähleriana* (*Rend. Naz. dei Lincei*, t. 14, 1953, p. 220-222).

W. V. D. Hodge :

[1] *Structure problems for complex manifolds* (*Rend. Mat.*, 5ᵉ série, t. 11, 1952, p. 101-110).

E. Kaehler :

[1] *Ueber eine bemerkenswerte Hermitische Metrik* (*Abh. Math. Sem.*, Hamburg, t. 9, 1933, p. 173-186).

P. Libermann :

[1] *Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe* (*Bull. des Sc. Acad. Roy. Belgique*, 1950, p. 742-755).

[2] *Sur la courbure et la torsion des variétés presque hermitiennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 17-19).

[3] *Sur les variétés presque complexe* V_{2n} *munies d'un champ de n-éléments réels* (*Ibid.*, t. 233, 1951, p. 1571-1573).

A. Lichnerowicz :

[1] *Théorèmes de réductibilité des variétés kaehlériennes et applications* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 2,31 1950, p. 1280-1282).

[2] *Sur les variétes riemaniennes admettant une forme quadratique extérieure à derivée covariante nulle* (*Ibid.*, p. 1413-1415).

[3] *Formes à dérivée covariante nulle sur une variété riemanienne* (*Ibid.*, t. 232, 1951, p. 146-147).

[4] *Sur les variétés riemaniennes admettant une forme à dérivée covariante nulle* (*Ibid.*, p. 677-679).

[5] *Sur les formes harmoniques des variétés riemaniennes localement réductibles* (*Ibid.*, p. 1634-1636).

[6] *Sur les variétés symplectiques* (*Ibid.*, t. 233, 1951, p. 723-725).

[7] *Généralisations de la géométrie kaehlérienne globale* (*Coll. de Géom. Diff.*, 1951, p. 99-122).

A. Nijenhuis :

[1] X_{n-1}*-forming sets of eigenvectors* (*Proc. Kon. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, A 4, 1951, p. 200-212).

E. M. Patterson :

[1] *A characterization of Kaehler manifolds in terms of parallel fields of planes* (*J. London Math. Soc.*, t. 28, 1953, p. 260-269).

J. A. Schouten :

[1] *Ueber unitäre Geometrie* (*Proc. Kon. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, t. 32, 1929, p. 457-465).

[2] *Sur les tenseurs de* V_n *aux directions principales* V_{n-1} *normales* (*Coll. de Géom. Diff.*, 1951, p. 67-70).

[3] *Ricci Calculus*, à paraître.

J. A. Schouten et D. van Dantzig :

[1] *Ueber unitäre Geometrie* (*Math. Ann.* t. 103, 1930, p. 319-346).

G. Vranceanu :

[1] *Les espaces non holonomes* (*Mém. Sc. Math.*, 1936).

A. Weil :

[1] *Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe* (*Com Math. Helv.*, t. 20, 1947, p. 110-116).

K. Yano et S. Bochner :

[1] *Curvature and Betti numbers*, Princeton University Press, 1953.