BULLETIN DE LA S. M. F.

V.S. KRISHNAN

# Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extensions. II

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 79 (1951), p. 85-120
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1951__79__85_0>

# LES ALGÈBRES PARTIELLEMENT ORDONNÉES ET LEURS EXTENSIONS (*suite*) (*).

PAR M. V. S. KRISHNAN.

## UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES IDÉAUX.

**Introduction.** — Dans ce Mémoire nous considérons une théorie générale des idéaux valable dans les « ringoids » commutatifs et associatifs définis par M. G. Birkoff [1], algèbres plus générales que les anneaux commutatifs. Observant que les idéaux forment une sous-famille des modules, qui forment eux-mêmes une algèbre complètement additive avec une base additive formée par les modules principaux, nous développons une théorie des (éléments) idéaux d'une algèbre complètement additive, *avec une base additive finitaire* et *régulière*. Les idéaux forment une telle algèbre (th. 1). Les notions usuelles dans la théorie des idéaux d'un anneau commutatif (considérées, par exemple, par M. W. Krull [3]) sont étendues aux idéaux définis ici : en particulier, celles d'idéaux *premiers*, *primaires* ou *semi-premiers*, de *radical*, de *m-ensemble* (ensembles multiplicativement fermés) de composants $(a_M)$ d'un idéal $(a)$ définis par les $m$-ensembles (M), etc. (§ 3 et 4). Quand le $m$-ensemble $M = \Pi_p$ est formé par les éléments *premiers* à un idéal premier $p$, le composant $(a_{\Pi_p})$ qu'il définit est appellé *composant isolé* défini par $p$.

Nous montrons qu'il existe toujours des idéaux premiers contenant un idéal donné $a$, et en dehors d'un $m$-ensemble M qui ne contient pas $a$, et, parmi ceux-ci, des idéaux premiers maximaux et minimaux (th. 4 et son corollaire). Les idéaux premiers minimaux contenant $a$ sont appelés les *h-idéaux premiers de a* (¹), et les composants isolés définis par ces $h$-idéaux premiers sont les *composants primaires isolés de a*; ce sont, en effet, des idéaux primaires ayant pour radical l'idéal premier qui définit le composant (th. 7). Les idéaux premiers maximaux contenant $a$ et n'appartenant pas au $m$-ensemble $\Pi_a$ des éléments premiers à $a$, sont appelés *n-idéaux premiers de a* (¹); les composants isolés qu'ils définissent sont les *composants principaux de a*.

Nous voyons alors que chaque idéal $a$ est l'intersection de ses composants

(*) Ceci contient les 2ᵉ et 3ᵉ parties d'une thèse présentée pour le Doctorat ès Sciences mathématiques, sous le titre : *Contribution à l'étude des algèbres partiellement ordonnées et de quelques structures abstraites.*

(¹) Ils correspondent aux « höchste Primideale von A » et « niederste Primideale von A » de M. W. KRULL [3].

principaux (th. 6). Mais l'intersection des composants primaires isolés de $a$ est, en général, un idéal $\tilde{a}$ contenant $a$, appelé le *noyau* de $a$. Quand la base additive de l'algèbre donnée contient un élément-unité, un idéal $a$ est égal à son noyau dès que les $h$-idéaux premiers de $a$ sont des idéaux maximaux. En particulier, quand la base contient non seulement un élément unité, mais aussi o, si l'idéal o a les idéaux maximaux seulement pour les $h$-idéaux premiers, alors chaque idéal $a$ est égal a son noyau (th. 8). On a aussi une caractérisation d'un idéal primaire comme idéal possédant un idéal premier comme *seul* $h$-idéal premier et *seul* $n$-idéal premier (Corollaire du th. 5).

Cette théorie étend aux « ringoids » commutatifs et associatifs tous les résultats principaux de la théorie des idéaux d'un anneau commutatif sans conditions de chaînes dues à M. W. Krull [3]. Dans le cas particulier d'un treillis distributif, nous retrouvons les résultats de M. H. Stone [4] qui nous conduisent à la représentation d'un treillis distributif comme « anneau d'ensembles » (§ 8).

**2. La M-algèbre et ses idéaux.** — Supposons que L est une M-algèbre, c'est-à-dire commutative $\left(\sum^{*}, .\right)$-algèbre avec une base additive finitaire $\Delta$ (²), qui est de plus *régulière* : la condition de régularité est

$$\text{(R)}\quad \delta \prec a +^{*} b \text{ dans L,} \qquad \text{où}\quad \delta \in \Delta \qquad \text{et} \qquad a, b, \in \text{L} \rightarrowtail \delta \prec \delta_1 +^{*} \delta_2 \text{ dans L,}$$

pour $\delta_1$, $\delta_2$ de $\Delta$ tels que $\delta_1 \prec a$, $\delta_2 \prec b$.

Alors L possède un plus grand élément $u \left(u = \sum_{\delta_i \in \Delta}^{*} \delta_i\right)$.

Un élément $a$ de L vérifiant $a.u\ (= u.a) \prec a$, est appelé un *élément-idéal de* L ou tout simplement *un idéal de* L. On peut évidemment caractériser aussi l'idéal $a$ par la condition : $a.\delta \prec a$ pour chaque $\delta \in \Delta$ (ou, encore, par $a.b \prec a$ pour chaque $b \in \text{L}$).

THÉORÈME 1. — *Les idéaux d'une* M-*algèbre* L *forment une sous-algèbre* $\bar{\text{L}}$ *pour* $\left(\sum, \prod, .\right)$ *et aussi une* M-*algèbre par rapport au même ordre* $\prec$ *et à même multiplication* (.); *la correspondance* $l (\in \text{L}) \rightarrow \bar{l} = f(l) =$ *le plus petit idéal contenant* $l$, *est une opération de fermeture et un homomorphisme de* L *sur* $\bar{\text{L}}$ *pour* $\left(\sum^{*}, .\right)$ *et* $\bar{\text{L}}$ *possède la base* $\bar{\Delta} = f(\Delta)$.

---

(²) *Voir*, partie I, paragraphe 6.4, *Bull. Soc. Math.*, t. 78, 1950 p. 251. $\Delta$ est un sous-ensemble multiplicativement fermée de L; chaque élément de L est une somme distributive d'éléments de $\Delta$; et une somme $\sum_{i}^{*} \delta_i$ d'éléments $\delta_i \in \Delta$ est $\succ$ un élément $\delta$ de $\Delta$ seulement si $\delta \prec$ une somme finie $\sum^{*} \delta_i(r)$ des $(\delta_i)$ dans L.

*Démonstration.* — Supposons que $(\bar{l}_i)$ soit une famille d'idéaux de L. Alors

$$\left(\sum_i \bar{l}_i\right).u = \left(\sum_i^{*} \bar{l}_i\right).u = \sum_i (\bar{l}_i.u) \prec \left(\sum_i \bar{l}_i\right);$$

$$\left(\prod_i \bar{l}_i\right).u \prec \text{chaque } \bar{l}_i.u \prec \text{chaque } \bar{l}_i;$$

d'où

$$\left(\prod_i \bar{l}_i\right).u \prec \left(\prod_i \bar{l}_i\right);$$

et

$$(\bar{l}_i \bar{l}_j).u = \bar{l}_i.(\bar{l}_j.u) \prec \bar{l}_i.\bar{l}_j.$$

$\bar{\mathrm{L}}$ est bien une sous-algèbre de L pour $\left(\sum, \prod, .\right)$, et par conséquent aussi une $\left(\sum^{*}, .\right)$-algèbre avec même ordre et même multiplication que L; et cette algèbre est commutative comme L.

Pour chaque élément $l$ de L définissons

$$f(l) = l + u.l; \qquad f(l).u = (l + u.l).u = l.u + l.u.u = l.(u + u.u) = l.u \prec f(l),$$

d'où $f(l)$ est un élément de $\bar{\mathrm{L}}$; nous écrivons $f(l) = \bar{l}$. Évidemment $l \prec \bar{l}$; et si $l \prec \bar{m} \in \bar{\mathrm{L}}$, alors $\bar{l} = l + u.l \prec \bar{m} + u.\bar{m} = \bar{m}$ (car $u.\bar{m} \prec \bar{m}$), d'où $\bar{l}$ est le plus petit idéal contenant $l$. De cette caractérisation, il est clair que la correspondance $l \to f(l) = \bar{l}$ est une opération de fermeture.

Soit maintenant $(l_i)$ une famille des éléments de L; alors

$$f\left(\sum_i^{*} l_i\right) = \sum_i^{*} l_i + \left(\sum_i^{*} l_i\right).u = \sum_i^{*} l_i +^{*} \sum_i^{*} (l_i.u)$$
$$= \sum_i^{*} (l_i +^{*} l_i.u) = \sum_i^{*} f(l_i) \text{ dans L,}$$

et dans $\bar{\mathrm{L}}$, qui contient $f\left(\sum_i^{*} l_i\right)$ et les $\{f(l_i)\}$; et

$$f(l_i.l_j) = l_i.l_j + (l_i.l_j).u = l_i.l_j + l_i.l_j.(u + u.u)$$
$$= (l_i + l_i.u).(l_j + l_j.u) = f(l_i).f(l_j) \text{ dans L et dans } \bar{\mathrm{L}},$$

qui contient $f(l_i.l_j)$, $f(l_i)$ et $f(l_j)$; donc $f$ est un homomorphisme de L sur $\bar{\mathrm{L}}$ pour $\left(\sum^{*}, .\right)$.

Enfin, supposons que $\bar{\Delta} = f(\Delta) = \{f(\delta)\}_{\delta \in \Delta}$. $\Delta$ est une sous-algèbre de L pour $(.) \rightarrow \bar{\Delta}$ est une sous-algèbre de $\bar{\mathrm{L}}$ pour $(.)$. $l = \sum_i^{*} \delta_i$, où $\delta_i \in \Delta$, pour $l \in \mathrm{L} \rightarrow \bar{l} = f(l) = \sum_i^{*} f(\delta_i) = \sum_i^{*} \bar{\delta}_i$, où $\bar{\delta}_i \in \bar{\Delta}$, pour $\bar{l} \in \bar{\mathrm{L}}$; Donc $\bar{\Delta}$ est une sous-algèbre de $\bar{L}$ pour $(\,.\,)$ et une base additive. $\Delta$ étant une base finitaire pour L,

$$\bar{\delta} \prec \sum_i^* \bar{\delta}_i, \quad \text{où} \quad \bar{\delta},\ \bar{\delta}_i \in \bar{\Delta} \text{ entraîne que } \bar{\delta} = f(\delta),\ \bar{\delta}_i = f(\delta_i), \quad \text{où} \quad \delta,\ \delta_i \in \Delta,$$

et

$$\delta \prec \bar{\delta} \prec \sum_i^* (\delta_i + u.\delta_i) = \sum_i^* \left\{ \delta_i + \left( \sum_{\delta_j \in \Delta} \delta_j \right) . \delta_i \right\},$$

d'où

$$\delta \prec \sum_{r=l,\dots,n}^* \delta_{i(r)} + \sum_{s=n+1,\dots,m}^* \delta_{j(s)}\, \delta_{i(s)};$$

il en résulte que

$$u.\delta \prec u.\left( \sum_r^* \delta_{i(r)} \right) + u.\left( \sum_s^* \delta_{j(s)}.\delta_{i(s)} \right)$$

$$= \sum_r^* (u.\delta_{i(r)}) +^* \sum_s^* .(u.\delta_{j(s)}.\delta_{i(s)})$$

et

$$\bar{\delta} = \delta + u.\delta \prec \sum_r^* (\delta_{i(r)} +^* u.\delta_{i(r)}) +^* \sum_s^* (\delta_{j(s)}.\delta_{i(s)} + u.\delta_{j(s)}.\delta_{i(s)})$$

$$\prec \sum_r^* (\delta_{i(r)} + u.\delta_{i(r)}) +^* \sum_s^* (u.\delta_{i(s)})$$

$$\prec \sum_{r=1,\dots,m}^* (\delta_{i(r)} + u\,\delta_{i(r)}) = \sum_{r=1,\dots,m}^* \bar{\delta}_{i(r)}.$$

La base $\bar{\Delta}$ de $\bar{L}$ est aussi finitaire. Enfin, $\bar{\delta} \prec \bar{a} +^* \bar{b}$ dans $\bar{L}$, pour $\bar{\delta} = f(\delta) \in \bar{\Delta}$ et $\bar{a}$, $\bar{b}$ de $\bar{L}$, entraîne que $\delta \prec \bar{a} +^* \bar{b}$, d'où $\delta \prec \delta_1 +^* \delta_2$ dans L, où $\delta_1$, $\delta_2 \in \Delta$ et $\delta_1 \prec a$ et $\delta_2 \prec \bar{b}$. Il en résulte que

$$\bar{\delta} \prec \bar{\delta}_1 +^* \bar{\delta}_2,\ \bar{\delta}_1,\ \bar{\delta}_2, \in \bar{\Delta} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_1 \prec \bar{a},\ \ \bar{\delta}_2 \prec \bar{b}.$$

$\bar{\Delta}$ est donc une base régulière de $\bar{L}$.

Donc $\bar{\Delta}$ est bien une base additive finitaire et régulière de $\bar{L}$, et $\bar{L}$ est une M-algèbre.

Observons que, *le complément relatif* (ou résiduel) $\frac{a}{b}$ d'un élément $b$ de L par rapport à un *idéal* $a$ $\left[\text{défini par } x.b \prec a \rightleftharpoons x \prec \left(\frac{a}{b}\right),\ \text{pour tous } x \in L\right]$ existe toujours : car $a.b \prec a$ assure qu'il existe des éléments $x$ vérifiant $x.b \prec a$; et leur somme $\sum^* x$, vérifiant aussi $\left(\sum^* x\right).b = \sum^* (x.b) \prec a$, satisfait la définition de l'élément $\frac{a}{b}$.

Quand $a$ est un idéal et $b$, $c$, $b_i$ des éléments arbitraires de L, on peut vérifier facilement que

$$\frac{a}{b.c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, \qquad \frac{a}{\left(\sum_i b_i\right)} = \prod_i \left(\frac{a}{b_i}\right).$$

**3. Éléments premiers, primaires et semi-premiers. Radical d'un élément.** — *Définition.* — Un élément $p$ de la M-algèbre L avec base $\Delta$ est appelé un :

1° *Élément premier*, si

$$(\delta, \delta' \in \Delta, \delta \not\prec p, \delta' \not\prec p) \Rightarrow \delta.\delta' \not\prec p \quad (^3);$$

2° *Élément primaire*, si

$$(\delta, \delta' \in \Delta, \delta.\delta' \prec p, \delta \not\prec p) \Rightarrow (\delta')^n \prec p \text{ pour un entier naturel } n;$$

3° *Élément semi-premier*, si

$$(\delta \in \Delta, \delta^n \prec p \text{ pour un entier naturel } n) \Rightarrow \delta \prec p.$$

Évidemment, les éléments premiers sont ceux qui sont à la fois primaires et semi-premiers.

*Définition.* — Le radical $a_r$ d'un élément $a$ de L est la somme des éléments de $\Delta$ pour lesquels une puissance intégrale est contenue dans $a$; c'est-à-dire, $a_r = \sum_i \delta_i \left(= \sum_i^* \delta_i\right)$, où $\delta_i^{n_i} \prec a$, pour un entier $n_i$.

Théorème 2. — 1° *Un élément idéal* $\bar{p}$ *de* L *est un élément premier, primaire ou semi-premier dans* L *si, et seulement si, il est un tel élément dans* $\bar{\mathrm{L}}$ (*avec la base* $\bar{\Delta}$); *nous appelons alors* $\bar{p}$ *un idéal premier, primaire ou semi-premier de* L.

2° *Les éléments semi-premiers de* L *forment un demi-treillis complètement additif et une sous-algèbre de* L *pour* (II); *pour chaque élément a de* L, *il existe un élément semi-premier minimal contenant a, dénoté par* $a_s$ *et appelé l'élément semi-premier associé à a.*

3° *Pour chaque élément a de* L *nous avons* $a_s \succ a_r$; *pour un idéal a de* L, $a_s = a_r =$ *un idéal de* L; *et pour un idéal primaire a de* L, $a_s = a_r =$ *un idéal premier de* L, *appelé l'idéal premier associé à l'idéal primaire a.*

*Démonstration.* — 1° Pour montrer cette partie il suffit d'observer que pour $b$, $c$ quelconque de L et $\bar{p}$ de $\bar{\mathrm{L}}$,

$$b \prec \bar{p} \rightleftharpoons b \prec p \qquad \text{et} \qquad b.c. \prec \bar{p} \rightleftharpoons \bar{b}.\bar{c} \prec \bar{p}.$$

2° Observons que $u$ est un idéal semi-premier de L. Et quand $(a_i)$ est une famille d'éléments semi-premiers de L pour laquelle l'intersection $a \doteq \prod_i a_i$ existe dans L, alors $a$ est aussi un élément semi-premier de L; car

$$\delta^n \prec a = \prod_i a_i \Rightarrow \delta^n \prec \text{chaque } a_i \Rightarrow \delta \prec \text{chaque } a_i \Rightarrow \delta \prec a;$$

---

(3) Les négations des relations $\prec$, $\succ$ sont notées respectivement par $\not\prec$, $\not\succ$.

donc les éléments semi-premiers de L forment une sous-algèbre de L pour (II) contenant $u$. Pour chaque élément $a$ de L la famille des éléments semi-premiers $r_i \succ a$ est non vide (puisque $u$ est dans cette famille); et l'intersection $a_s = \prod_i r_i$ existe dans L $\left[\prod_i r_i = \sum_j a_j,\ a_j \prec \text{chaque } r_i,\right.$ et cette famille $(a_j)$ est non vide car $a$ est dans cette famille$\left.\right]$; et, d'après le résultat ci-dessus, $a_s$ est aussi un élément semi-premier. C'est évidemment l'élément semi-premier minimal $\succ a$.

Le plus petit élément semi-premier contenant une famille (non vide) d'éléments semi-premiers $(a_i)$ de L existe, étant égal à $a_s$, où $a = \sum_i a_i$, cette somme étant prise dans L. Donc, la famille d'éléments semi-premiers dans L forme un demi-treillis complètement additif.

3° *Pour un $a \in$ L, $\delta \prec a \Rightarrow \delta^{(1)} \prec a \Rightarrow \delta \prec a_r$, donc $a \prec a_r$. D'autre part, $a_r = \sum_i \delta_i$, où $\delta_i^{n_i} \prec a$ pour un entier naturel $n_i$; mais $a \prec a_s$ et $\delta_i^{n_i} \prec a$ entraînent que $\delta_i^{n_i} \prec a_s$, d'où $\delta_i \prec a_s$, puisque $a_s$ est semi-premier; donc $a \prec a_r \prec a_s$ pour chaque $a \in$ L.

Si maintenant $a$ est un idéal de L, $a_r$ en est un aussi; car

$$
\begin{aligned}
a_r.\delta &= \Big(\sum_i \delta_i\Big)\delta, && \text{où } \delta_i^{n_i} \prec a,\\
&= \Big(\sum_i{}^{*} \delta_i\Big)\delta, && \text{où } \delta_i^{n_i} \prec a,\\
&= \sum_i (\delta_i.\delta), && \text{où } (\delta_i.\delta)^{n_i} = \delta_i^{n_i}\delta^{n_i} \prec a.\delta^{n_i} \prec a.u \prec a,
\end{aligned}
$$

d'où $a_r.\delta \prec a_r$ (chaque $\delta_i.\delta$ étant, en effet, un des $\delta_i$); de plus,

$$
\begin{aligned}
\delta^n \prec a_r,\quad \delta \in \Delta &\Rightarrow \delta^n \prec \sum_i{}^{*}(\delta_i), && \text{où } \delta_i^{n_i} \prec a \quad \text{et} \quad \delta^n \in \Delta,\\
&\Rightarrow \delta^n \prec \sum_{n=1,\dots,m}{}^{*} \delta_{i(r)}, && \text{où } \delta_{i(r)}^{n_{i(r)}} \prec a \quad \text{(la base } \Delta \text{ étant finitaire)},\\
&\Rightarrow \delta^{n.n_0} \prec \Big(\sum_{r=1,\dots,m}{}^{*} \delta_{i(r)}\Big)^{n_0} \prec a && \text{où } n_0 = \sum_{r=1,\dots,m} n_{i(r)} - m + 1,\\
&\Rightarrow \delta \prec a_r,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire $a_r$ est semi-premier; $a_r \succ a$ et $a_r$ semi-premier entraînent que $a_r \succ a_s$ aussi; donc $a_r = a_s =$ un idéal $(\succ a)$ quand $a$ est un idéal.

Enfin, supposons que $a$ soit un idéal primaire; $a_r = a_s$ est un idéal $\succ a_s$ et pour $\delta_1,\ \delta_2 \in \Delta$,

$$
\begin{aligned}
\delta_1.\delta_2 \prec a_r (= a_s),\quad \delta_1 \nprec a_r &\Rightarrow (\delta_1.\delta_2)^n \prec a, \quad \delta_1^m \nprec a \ \text{pour aucun entier naturel } m,\\
&\Rightarrow \delta_1^n.\delta_2^n \prec a, \quad \delta_1^n \nprec a,\\
&\Rightarrow (\delta_2^n)^\nu \prec a \ \text{pour un entier } \nu,\ a \text{ étant primaire},\\
&\Rightarrow (\delta_2)^{n\nu} \prec a \ \text{pour un entier } (n.\nu),\\
&\Rightarrow \delta_2 \prec a_r;
\end{aligned}
$$

donc $a_r (= a_s)$ est un idéal *premier* de L$\succ a$ pour tout idéal *primaire* $a$.

**4. Les $m$-ensembles et des composantes qu'ils définissent.** — Pour un élément arbitraire $a$ de L nous voyons que l'ensemble $S_a = \{ b \}_{b \not\prec a, b \in L}$ a les propriétés

$$V(S_a) \subset S_a \subset V(S_a \cap \Delta) \quad (^4) \qquad \text{c'est-à-dire} \quad c \succ b,\ b \in S_a \rightarrow c \in S_a$$

et chaque $b \in S_a$ est $\succ$ un $\delta$ de $\Delta$ dans $S_a$.

Si nous disons qu'*un élément $b$ de L est premier à l'élément $a$* quand il existe au moins un élément $\delta$ de $\Delta$ tel que $\delta \prec b$, $\frac{a}{\delta}$ existe dans L, et $\frac{a}{\delta} \prec a$, alors l'ensemble $\Pi_a$ des éléments de L premiers à $a$ satisfait aussi aux conditions :

$$V(\Pi_a) \subset \Pi_a \subset V(\Pi_a \cap \Delta).$$

Un ensemble non vide M d'éléments de L est appelé un *$m$-ensemble de* L si $V(M) \subset M \subset V(M \cap \Delta)$ et $MM \subset M$ (c'est-à-dire M est multiplicativement fermé).

Observons, par exemple, que pour un élément premier $p$, $S_p$ est un $m$-ensemble (et inversement).

Pour un idéal $a$ de L, un $m$-ensemble M de L définit un M-composant $a_M$, qui est l'élément de L vérifiant $a_M = \sum_{\delta_i \in M} \left(\frac{a}{\delta_i}\right)$ (la somme étant prise dans L), où les compléments relatifs $\left(\frac{a}{\delta_i}\right)$ existent comme nous l'avons déjà remarqué, par rapport à l'idéal $a$. On a évidemment aussi :

$$a_M = \sum_j{}^{*} \delta'_j, \qquad \text{où} \quad \delta'_j . \delta_i \prec a \text{ pour au moins un } \delta_i \in M,$$

et

$$\delta'(\in \Delta) \prec a_M \rightarrow \delta' . \delta_i \prec a \text{ pour un } \delta_i \in M.$$

($\Delta$ étant finitaire et M multiplicative).

Il en résulte que $a_M$ est aussi un idéal $\succ a$; car pour chaque $\delta$ de $\Delta$,

$$a_M . \delta = \Big(\sum_j{}^{*} \delta'_j\Big) . \delta = \sum_j{}^{*} (\delta'_j . \delta), \qquad \text{où } \delta'_j . \delta_i \prec a$$

et donc $\delta'_j . \delta\delta_i \prec a . \delta \prec a$ pour un $\delta_i \in M$; les $(\delta'_j . \delta)$ sont donc quelques-uns des $(\delta'_j)$, et $a_M . \delta \prec a_M$; donc $a_M$ est idéal; de plus $a \prec \frac{a}{\delta_i} \prec a_M$ pour $\delta_i \in$, M donc $a \prec a_M$.

Lemme 1. — 1° $a \in M \rightleftarrows a_M = u \rightleftarrows a_M \in M$.

2° *Si* M *est le plus petit m-ensemble contenant deux m-ensemble* $M_1$ *et* $M_2$, *alors* $(a_{M_1})_{M_2} = (a_{M_2})_{M_1} = a_M$.

3° *Pour un idéal $a$ de* $L \neq u$, $\Pi_a$ *est un m-ensemble et* $\Pi_a \subset S_a$ (*mais* $\Pi_u = L \not\subset S_u = o$).

---

(4) $V(X)$ pour un sous-ensemble X d'un ensemble K partiellement ordonné, a été défini dans la partie I par $V(X) = \{ y \}_{y \succ \text{ un } x \in X,\ y \in K}$.

4° *Le même* M-*composant* $a_M(\neq u)$ *de* $a$ *peut être défini par plusieurs* $m$-*ensembles*; *parmi ceux-ci il y en a un maximum* $M^* = \Pi_{a_M}$ et $\Pi_{a_M} \supset \Pi_a$.

*Démonstration*. — 1° Montrons que $a \in M \rightarrowtail a_M = u \rightarrowtail a_M \in M \rightarrowtail a \in M$.

*Si* $a \in M$, $a \succ \delta_i$, $(\delta_i \in M \cap \Delta)$, $\frac{a}{\delta_i} = u$, car pour chaque $\delta'$ de $\Delta$, $\delta'.\delta_i \prec \delta'.a \prec a$.; donc $a_M \succ \frac{a}{\delta_i} = u$, c'est-à-dire $a_M = u$.

*Si* maintenant $a_M = u$, alors $a_M(=u) \in M$, car le $m$-ensemble M étant non vide $VM \subset M \rightarrowtail u \in M$.

*Si*, enfin, $a_M \in M$, il existe un $\delta \in (\Delta \cap M)$ tel que $\delta \prec a_M$; c'est-à-dire $\delta \in M$ est $\delta.\delta_i \prec a$ pour un $\delta_i \in M$, d'où $\delta.\delta_i \in M$ et $a \in M$.

2° Observons que $M = V\{\delta_i, \delta'_j, \delta_i.\delta'_j\}$ où $\delta_i \in (M_1 \cap \Delta)$, $\delta'_j \in (M_2 \cap \Delta)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\delta \prec (a_{M_1 M_2}) &\rightarrowtail \delta.\delta'_j \prec a_{M_1} && \text{pour un } \delta'_j \in (M_2 \cap \Delta),\\
&\rightarrowtail \delta.\delta'_j.\delta_i \prec a && \text{pour un } \delta'_j \in (M_2 \cap \Delta) \text{ et un } \delta_i \in (M_1 \cap \Delta),\\
&\rightarrowtail \delta.(\delta_i.\delta'_j) \prec a, && \text{pour un } (\delta_i.\delta'_j) \in (M \cap \Delta),\\
&\rightarrowtail \delta \prec a_M;
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\delta \prec a_M &\rightarrowtail \delta.\delta_i \prec a \text{ ou } \delta.\delta'_j \prec a \text{ ou } \delta.\delta_i.\delta'_j \prec a \text{ pour un } \delta_i \in (M_1 \cap \Delta),\ \delta'_j \in (M_2 \cap \Delta),\\
&\rightarrowtail \delta \prec a_M \prec (a_{M_1})_{M_2} \text{ ou } \delta.\delta'_j \prec a \prec a_{M_1} \text{ ou } \delta.\delta'_j \prec a_{M_1},\\
&\rightarrowtail \delta \prec (a_{M_1})_{M_2};
\end{aligned}$$

Donc $a_M = (a_{M_1})_{M_2}$ et, par symétrie, $a_M = (a_{M_2})_{M_1}$.

3° Nous avons déjà montré que $V\Pi_a \subset \Pi_a \subset V(\Pi_a \cap \Delta)$. Il reste donc à montrer que $\Pi_a \Pi_a \subset \Pi_a$. Alors, si $b$, $c$, (de L) sont dans $\Pi_a$, il existe des éléments $\delta_1$, $\delta_2$ de $\Delta$ tels que $\delta_1 \prec b$, $\delta_2 \prec c$; $\frac{a}{\delta_1} \prec a$ et $\frac{a}{\delta_2} \prec a$; donc

$$(b.c) \succ (\delta_1.\delta_2), \qquad (\delta_1.\delta_2) \in \Delta \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{(\delta_1.\delta_2)} = \frac{\left(\frac{a}{\delta_1}\right)}{\delta_2} \prec \frac{a}{\delta_2} \prec a,$$

d'où $(b.c) \in \Pi_a$; donc $\Pi_a$ est un $m$-ensemble,

$$b \notin S_a \text{ et } \delta \prec b \rightarrowtail b \prec a,\ \delta \prec b \rightarrowtail \delta \prec a \rightarrowtail \frac{a}{\delta} = u \not\prec a$$

(par hypothèse); donc $b \notin S_a \rightarrowtail b \notin \Pi_a$, d'où $\Pi_a \subset S_a$.

Pour l'idéal $u$ de L, on a évidemment $\Pi_u = L$ et $S_u = 0$ (l'ensemble vide).

4° Observons d'abord que $M^* = \Pi_{a_M}$ est un $m$-ensemble quand M est un $m$-ensemble et $a_M \neq u$, d'après le dernier résultat.

Voyons que d'une part

$$a \prec a_M \rightarrowtail \Pi_{a_M} \supset \Pi_a,$$

car

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\delta} \prec a,\ \delta' \prec \frac{a_{\mathrm{M}}}{\delta} \ &\rightarrowtail\ \delta'.\delta \prec a_{\mathrm{M}},\ \frac{a}{\delta} \prec a, \\
&\rightarrowtail\ \delta'.\delta.\delta_0 \prec a,\ \frac{a}{\delta} \prec a, \quad \text{pour un } \delta_0 \in \mathrm{M}, \\
&\rightarrowtail\ \delta'.\delta_0 \prec \frac{a}{\delta} \prec a, \quad \text{pour un } \delta_0 \in \mathrm{M}, \\
&\rightarrowtail\ \delta' \prec \frac{a}{\delta_0} \quad \text{pour un } \delta_0 \in \mathrm{M}, \\
&\rightarrowtail\ \delta' \prec \frac{a}{\delta_0} \prec a_{\mathrm{M}};
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\frac{a}{\delta} \prec a \rightarrowtail \frac{a_{\mathrm{M}}}{\delta} \prec a_{\mathrm{M}}, \qquad \text{donc} \quad \delta \in \Pi_a \rightarrowtail \delta \in \Pi_{a_{\mathrm{M}}}, \qquad \text{d'où} \quad \Pi_a \subset \Pi_{a_{\mathrm{M}}}.
$$

D'autre part, on a aussi $\mathrm{M} \subset \Pi_{a_{\mathrm{M}}} = \mathrm{M}^*$, car

$$
\begin{aligned}
\delta \in \mathrm{M}, \quad \delta' \prec \frac{a_{\mathrm{M}}}{\delta} \ &\rightarrowtail\ \delta'.\delta \prec a_{\mathrm{M}}, \qquad \delta \in \mathrm{M}, \\
&\rightarrowtail\ \delta'.\delta.\delta_0 \prec a, \quad \delta,\ \delta_0 \ \text{et}\ \delta.\delta_0 \in \mathrm{M}, \\
&\rightarrowtail\ \delta' \prec a_{\mathrm{M}},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\delta \in \mathrm{M} \ \rightarrowtail\ \frac{a_{\mathrm{M}}}{\delta} \prec a_{\mathrm{M}} \rightarrowtail \delta \in \Pi_{a_{\mathrm{M}}}.
$$

Donc $\mathrm{M}^*$ est un $m$-ensemble contenant M et $\Pi_a$; finalement montrons que $a_{\mathrm{M}} = a_{\mathrm{M}^*}$.

D'une part, M étant contenu dans $\mathrm{M}^*$

$$
a_{\mathrm{M}} = \sum_{\delta_i \in \mathrm{M}} \frac{a}{\delta_i} \prec \sum_{\delta_j \in \mathrm{M}^*} \frac{a}{\delta_j} = a_{\mathrm{M}^*};
$$

d'autre part,

$$
\begin{aligned}
\delta \prec a_{\mathrm{M}^*} &\rightarrowtail \delta.\delta' \prec a \quad \text{pour un } \delta' \in (\mathrm{M}^* \cap \Delta), \\
&\rightarrowtail \delta.\delta' \prec a \prec a_{\mathrm{M}}, \qquad \text{où} \qquad \delta' \in \Pi_{a_{\mathrm{M}}}, \qquad \text{donc} \quad \frac{a_{\mathrm{M}}}{\delta'} \prec a_{\mathrm{M}}, \\
&\rightarrowtail \delta \prec \frac{a_{\mathrm{M}}}{\delta'} \prec a_{\mathrm{M}},
\end{aligned}
$$

Le $m$-ensemble $\mathrm{M}^* = \Pi_{a_{\mathrm{M}}}$ étant défini par le composant $a_{\mathrm{M}}$ (et non par M), il s'ensuit que $\mathrm{M}^*$ est le même pour tous les $m$-ensembles $(\mathrm{M}_i)$ pour lesquels $a_{\mathrm{M}_i} = a_{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{M}^* \supset \mathrm{M}_i$ pour chacun de ces $m$-ensembles (de même que $\mathrm{M}^* \supset \mathrm{M}$); c'est-à-dire $\mathrm{M}^*$ est le plus grand $m$-ensemble définissant le M-composant donné $a_{\mathrm{M}}$.

Théorème 3. — 1° *Un idéal $q$ de* L *est primaire si, et seulement si,* $\mathrm{S}_{q_r} \subset \Pi_q$, ($q_r$ *étant le radical de* $q$);

2° *Un idéal $p$ de* L *est premier si, et seulement si* $\mathrm{S}_p = \Pi_p$;

3° *Soit $p$ un idéal premier et $a$ un idéal quelconque; si $a_p$ désigne $a_{\Pi_p}$ alors*

$$p \succ a \rightleftharpoons p \succ a_p.$$

*Démonstration.* — 1° Nous avons déjà vu que le radical $q_r$ d'un idéal primaire $q$ est premier. Alors si $b$ (de L) $\in S_{q_r}$, on a $b \not\prec q_r$, donc il existe un élément $\delta$ de $\Delta$ tel que $\delta \prec b$, $\delta \not\prec q_r$, donc $\delta^n \not\prec q_r$ ($q_r$ étant premier) pour aucun entier $n$; mais $q \prec q_r$, donc $\delta^n \not\prec q$ pour aucun $n$. Or, $q$ est un idéal primaire; donc $\delta . \delta' \prec q$ (et $\delta^n \not\prec q$ pour aucun $n$) entraîne que $\delta' \prec q$, c'est-à-dire

$$\delta' \prec \frac{q}{\delta} \rightarrow \delta' \prec q, \quad \text{ou} \quad \frac{q}{\delta} \prec q, \quad \text{où} \quad \delta \prec b.$$

Il en résulte que $b$ est premier à $q$, ou $b \in \Pi_q$. Donc $S_{q_r} \subset \Pi_q$, quand $q$ est idéal primaire.

Inversement soit $S_{q_r} \subset \Pi_q$ pour un idéal $q$; alors,

$$\begin{aligned} \delta,\ \delta' \in \Delta, \quad \delta . \delta' \prec q, \quad \delta' \not\prec q \ &\rightarrow \ \delta' \prec \frac{q}{\delta}, \quad \delta' \not\prec q, \\ &\rightarrow \ \frac{q}{\delta} \not\prec q, \\ &\rightarrow \ \delta \notin \Pi_q, \\ &\rightarrow \ \delta \notin S_{q_r}, \\ &\rightarrow \ \delta \prec q_r, \\ &\rightarrow \ \delta^n \prec q, \quad \text{pour un entier } n; \end{aligned}$$

donc $q$ est primaire.

2° Un idéal premier $p$ est aussi un idéal primaire et plus $p$ satisfait $p = p_r$; donc, d'après 1°, nous avons : $S_p \subset \Pi_p$. Mais l'inverse $\Pi_p \subset S_p$ est vrai, quel que soit l'idéal $p$. Donc $S_p = \Pi_p$ pour un idéal premier $p$.

Inversement, soit $p$ un idéal pour lequel $S_p = \Pi_p$; $S_p = \Pi_p =$ un $m$-ensemble (lemme 1, 3°), d'où

$$\delta_1 \not\prec p,\ \delta_2 \not\prec p \ \rightarrow \ \delta_1,\ \delta_2 \in S_p \ \rightarrow \ \delta_1 . \delta_2 \in S_p \ \rightarrow \ \delta_1 . \delta_2 \not\prec p;$$

donc $p$ est un idéal premier.

3° Soient $p$ un idéal premier et $a$ un idéal quelconque; alors

$$a_p \prec p \rightarrow a\,(\prec a_p) \prec p, \quad \text{où} \quad a_p = a_{\Pi_p}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} a \prec p, \quad \delta \prec a_p \rightarrow a \prec p, \quad & \delta . \delta' \prec a, \quad \text{pour un } \delta' \in \Pi_p = S_p, \\ \rightarrow a \prec p, \quad & \delta . \delta' \prec a, \quad \delta' \not\prec p, \\ \rightarrow \delta . \delta' \prec p, \quad & \delta' \not\prec p, \\ \rightarrow \delta \prec p, \quad & p \text{ étant premier}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire $a \prec p \rightarrow a_p \prec p$ aussi.

### 5. L'existence des idéaux premiers contenant un idéal donné.

THÉORÈME 4. — *Si $a$ est un idéal de* L *et* M *un m-ensemble de* L *tel que $a \notin \mathrm{M}$, alors :*

1° *il existe un idéal maximal $p \succ a$ et $\notin \mathrm{M}$ et $p$ est un idéal premier ;*

2° *il existe un m-ensemble maximal $\mathrm{M}^* \supset \mathrm{M}$ tel que $a \notin \mathrm{M}^*$; pour chaque $\delta \notin (\mathrm{M}^* \cap \Delta)$, il existe un $\delta' \in \Delta$ tel que $\delta . \delta' \prec$ le radical $a_r$ de $a$.*

*Démonstration.* — 1° L'ensemble (B) des idéaux $b$ de L vérifiant $b \succ a$ et $b \notin \mathrm{M}$ est partiellement ordonné comme sous-ensemble de $\bar{\mathrm{L}}$. Chaque chaîne $(b_i)$ dans B possède une borne supérieure *dans* B; car la somme $s = \sum_i^* b_i$ dans $\bar{\mathrm{L}}$ est un élément de B : d'une part $s \succ b_i \succ a$ et, d'autre part $\delta \in \Delta$, $\delta \prec s = \sum_i^* b_i$ entraînent que $\bar{\delta} \prec s = \sum_i^* b_i = \sum_i^* \sum_j^* \bar{\delta}_{ij}$ remplaçant les $b_i$ de $\bar{\mathrm{L}}$ au moyen d'éléments de la base $\bar{\Delta}$; cette base étant finitaire, il en résulte que $\bar{\delta} \prec$ une somme finie $\bar{\delta}_{ij(r)}$ des $\bar{\delta}_{ij}$, où chaque $\bar{\delta}_{ij} \prec$ un $b_i$; les $b_i$ étant totalement ordonnées, il existe un élément maximum parmi les $b_{ij(r)}$ associés ainsi aux $\bar{\delta}_{ij(r)}$, et cette $b_{ij(r)}$ contient la somme des $\bar{\delta}_{ij(r)}$ et donc aussi $\bar{\delta}$ et $\delta$; il en résulte que $\delta \notin \mathrm{M}$ (car $b_{ij(r)} \notin \mathrm{M}$ par hypothèse); ceci étant vérifié pour chaque $\delta$ (de $\Delta$) $\prec s$, il s'ensuit que $s \notin \mathrm{M}$, donc $s \in \mathrm{B}$. Par le lemme de Zorn nous voyons donc qu'il y a les éléments maximaux $(p)$ dans B; c'est-à-dire $p \succ a$, $p \notin \mathrm{M}$, et $p' \not\prec p$, $p' \succ p \rightarrowtail p' \in \mathrm{M}$. Un tel idéal $p$ de L est *premier*; car

$$
\begin{aligned}
\delta_1,\ \delta_2 \in \Delta,\ \delta_1 \not\prec p,\ \delta_2 \not\prec p
&\rightarrowtail (\bar{\delta}_1 +^* p) \in \mathrm{M},\ (\bar{\delta}_2 +^* p) \in \mathrm{M},\\
&\rightarrowtail (\bar{\delta}_1 +^* p).(\bar{\delta}_2 +^* p) \in \mathrm{M},\\
&\rightarrowtail (\bar{\delta}_1 . \bar{\delta}_2 +^* p) \succ (\bar{\delta}_1 +^* p).(\bar{\delta}_2 +^* p) \quad \text{et} \quad (\bar{\delta}_1 +^* p).(\bar{\delta}_2 +^* p) \in \mathrm{M},\\
&\rightarrowtail (\bar{\delta}_1 . \bar{\delta}_2 +^* p) \in \mathrm{M},\\
&\rightarrowtail (\overline{\delta_1 . \delta_2}) = \bar{\delta}_1 . \bar{\delta}_2 \not\prec p.\\
&\rightarrowtail \delta_1 . \delta_2 \not\prec p.
\end{aligned}
$$

2° Considérons ici la famille $\mathscr{F}$ des $m$-ensembles $(\mathrm{M}_i)$ de L tels que $\mathrm{M} \subset \mathrm{M}_i$ et $a \notin \mathrm{M}$; cette famille est un ensemble partiellement ordonné par la relation d'inclusion ($\subset$). Si $\mathrm{M}_j$ est une chaîne dans ($\mathscr{F}$), nous voyons que $\bigcup_i \mathrm{M}_j \in \mathscr{F}$; car

$$
(\mathrm{V}\mathrm{M}) = \bigcup_j (\mathrm{V}\mathrm{M}_j) \subset \bigcup_j (\mathrm{M}_j) = \mathrm{M},
$$

$$
\mathrm{M} = \bigcup_j (\mathrm{M}_j) \subset \bigcup_i [\mathrm{V}(\mathrm{M}_j \cap \Delta)] \subset \mathrm{V}\Big[\Big(\bigcup_i \mathrm{M}_j\Big) \cap \Delta\Big] = \mathrm{V}(\mathrm{M} \cap \Delta)
$$

et

$$
\mathrm{M}.\mathrm{M} = (\cup \mathrm{M}_j).(\cup \mathrm{M}_k) \subset (\cup \mathrm{M}_j) = \mathrm{M},
$$

car $a \in \mathrm{M}_j$, $b \in \mathrm{M}_k \rightarrowtail a$, $b$ sont dans le plus grand des éléments $\mathrm{M}_j$, $\mathrm{M}_k$ de la chaîne $\rightarrowtail a . b \in \mathrm{M}_j$ ou $\mathrm{M}_k \rightarrowtail a . b \in \mathrm{M}$.

Le lemme de Zorn nous assure l'existence des éléments maximaux de $\mathcal{F}$; c'est-à-dire de $m$-ensembles $M^* \supset M$ tels que $a \notin M^*$ mais $M^* \subset M'$, $a \notin M' \rightarrow M^* = M'$.

L'hypothèse $a \notin M$ exclut la possibilité $a = u$; donc $a \in$ un $m$-ensemble $M \rightarrow a_r \in M$ (car $a_r \succ a$); inversement $a_r \in M \rightarrow$ un $\delta$ (de $\Delta$) $\prec a_r$ est dans $M \rightarrow [\delta \in (M \cap \Delta),\ \delta^n \prec a] \rightarrow [\delta^n \in (M \cap \Delta),\ \delta^n \prec a] \rightarrow a \in M$. Donc la famille $\mathcal{F}$ est aussi la famille des $m$-ensembles $\supset M$ ne contenant pas $a_r$; et si $M^*$ est maximal dans $\mathcal{F}$ et $\delta \notin M^*$, le $m$-ensemble $V\{\delta_i, \delta^n, \delta^n . \delta_i\}$ ($\delta_i \in M^*$, $n$ entier) étant $\supsetneqq M$, doit contenir $a$ et $a_r$. Mais $a_r \in V\{\delta_i, \delta^n, \delta^n . \delta_i\}$ entraîne :

soit $a_r \succ$ un $\delta_i \in M^*$, c'est-à-dire $a_r \in M^*$, ce qui est faux;

soit $a_r \succ$ un $\delta^n$, ce qui entraîne que $a_r \succ \delta$, car $a_r = a_s$ pour l'idéal $a$;

soit $a_r \succ$ un $\delta^n . \delta_i$, $\delta_i \in M^*$, ce qui entraîne que $a_r \succ \delta^n . \delta_i^n$ ($a_r$ étant un idéal), donc $a_r (= a_s) \succ \delta . \delta_i$.

Donc, dans tous ces cas, $a_r \succ \delta . \delta_i$ pour un $\delta_i \in M$.

Comme conséquence du théorème nous avons le

Corollaire. — *Étant donné un idéal $a$ et un m-ensemble* M *ne contenant pas $a$, il existe des idéaux premiers $p \succ a$ et $\notin M$; et parmi eux il y en a de minimaux et de maximaux.*

L'existence des idéaux premiers maximaux résulte de la partie 1° du théorème.

Si $M^*$ est un $m$-ensemble maximal $\supset M$ et ne contenant pas $a$ (qui existe d'après la partie 2° du théorème), il y a, d'après la partie 1°, un idéal premier $p \succ a$, $p \notin M^*$; mais $a \prec p$, $p \notin M^*$ entraînent que $S_p = \Pi_p \supset M^*$ et $a \notin S_p$; la maximalité de $M^*$ entraîne donc que $S_p = M^*$.

Donc, il n'y a qu'un seul idéal premier $p \succ a$ en dehors de $M^*$; pour cet idéal $p$, $S_p = M^*$. Alors $p$ est idéal premier minimal $\succ a$, car $a \prec p' \prec p$ pour un idéal premier $p'$ entraînera $S_{p'} \supset S_p = M^*$, $a \notin S_{p'}$, donc d'après la maximalité de $M^*$, $S_{p'} = M^* = S_p$ et $p = p'$.

Un idéal premier minimal $\succ a$, un idéal donné, sera appelé *h-idéal premier de $a$*; et un idéal premier maximal $\succ a$ et en dehors du $m$-ensemble $\Pi_a$ sera appelé un *n-idéal premier de $a$* ([5]).

Pour l'étude des $n$-idéaux premiers de $a$, nous considérons d'abord quelques propriétés de $\Pi_a$.

Lemme 2. — 1° *Si $\delta \in \Delta$, $\delta \notin \Pi_a$, alors $\bar{\delta} = \delta +^* u . \delta \notin \Pi_a$;*

2° *Si $b$ est un idéal en dehors de $\Pi_a$, $b +^* a$ est aussi en dehors de $\Pi_a$.*

*Démonstration.* — 1° Soit $\delta \notin \Pi_a$ et

$$\delta_0 \text{ (de } \Delta) \prec \bar{\delta} = \delta +^* u . \delta = \delta +^* \Big( \sum_{\delta_j \in \Delta}^{*} \delta_j \Big) . \delta ;$$

([5]) Ils correspondent aux « höchste Primideale » et « niederste Primideale » de M. W. Krull [3].

il en résulte que

$$\delta_0 \prec \delta +^* \delta_{i_1}.\delta +^* \ldots +^* \delta_{i_n}.\delta; \qquad \delta \notin \Pi_a \Rightarrow \frac{a}{\delta} \not\prec a,$$

donc $\delta'.\delta \prec a$ pour un $\delta'$ de $\Delta \not\prec a$, d'où

$$\delta'.\delta_0 \prec \delta'.\delta +^* (\delta_{i_1} +^* \ldots +^* \delta_{i_n}).\delta'.\delta \prec a, \qquad \text{où} \quad \delta' \not\prec a,$$

donc $\frac{a}{\delta_0} \not\prec a$ et $\delta_0 \notin \Pi_a$; ceci étant vrai pour chaque $\delta_0 \prec \bar{\delta}$, il en résulte que $\bar{\delta} \notin \Pi_a$.

2° Si $b \notin \Pi_a$ et $\delta_0 \prec b +^* a$, $\delta_0 \in \Delta$, il existe des éléments $\delta_1$, $\delta_2 \in \Delta$ tels que

$$\delta_0 \prec \delta_1 +^* \delta_2, \qquad \delta_1 \prec b \quad \text{et} \quad \delta_2 \prec a \quad \text{(d'après la régularité de } \Delta).$$

Donc

$$\delta_1 \prec b, \qquad b \notin \Pi_a \Rightarrow \frac{a}{\delta_1} \not\prec a \Rightarrow \delta_1.\delta' \prec a \quad \text{pour un } \delta' \text{ de } \Delta \not\prec a,$$

$$\Rightarrow \delta_0.\delta' \prec \delta_1.\delta' +^* \delta_2.\delta' \prec a +^* a.\delta' = a \quad \text{pour } \delta' \not\prec a,$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\delta_0} \not\prec a;$$

$\frac{a}{\delta_0} \not\prec a$ pour chaque $\delta_0 \prec b +^* a$, d'où $(b + a) \notin \Pi_a$.

Nous pouvons alors formuler le théorème principal d'existence des $h$-idéaux premiers et $n$-idéaux premiers d'un idéal donné.

THÉORÈME 5. — 1° *Chaque idéal $a$ de $L(\neq u)$ possède des $n$-idéaux premiers et des $h$-idéaux premiers;*

2° *Chaque idéal premier contenant $a$ contient au moins un $h$-idéal premier de $a$; et chaque idéal $b$ de $L$, et chaque élément $\delta$ de $\Delta$, en dehors de $\Pi_a$, est contenu dans au moins un $n$-idéal premier de $a$;*

3° *Le radical $a_r$ d'un idéal $a$ est l'intersection des $h$-idéaux premiers de $a$.*

*Démonstration.* — 1° Si $a \neq u$, $a \notin \Pi_a$ $\left(\text{car } a \in \Pi_a \Rightarrow a \succ \text{ un } \delta \text{ tel que } \frac{a}{\delta} \prec a \Rightarrow u = \frac{a}{\delta} \prec a \Rightarrow u = a\right)$. Donc le corollaire du théorème 4 assure l'existence des $h$-idéaux premiers et des $n$-idéaux premiers de $a$.

2° Si l'idéal $a \prec$ l'idéal premier $p$, alors $a \notin S_p$; et, d'après le théorème 4, 2°, le $m$-ensemble $S_p$ peut être étendu à un $m$-ensemble maximal $M^* \supset S_p$ et ne contenant pas $a$. Et, comme dans le corollaire du théorème 4, nous voyons que la maximalité de $M^*$ entraînera qu'il n'y a qu'un seul idéal premier $p' \succ a$ et $\notin M^*$ et que cet idéal premier est un $h$-idéal premier de $a$ avec $S_{p'} = M^*$. Donc $S_p \subset M^* = S_{p'}$, et $p \succ$ le $h$-idéal premier $p'$.

Soit maintenant $\delta$ de $\Delta \notin \Pi_a$; alors, d'après le lemme 2, 1°, $\bar{\delta} \notin \Pi_a$. Donc, pour la démonstration de la partie 2°, il suffit de montrer que chaque idéal $b$ (ou $\bar{\delta}$ en particulier) $\notin \Pi_a$ est $\prec$ un $n$-idéal premier de $a$. Mais $b \notin \Pi_a \Rightarrow (b +^* a) \notin \Pi_a$, d'après le lemme 2, 2°. Et pour l'idéal $(b + a) \notin$ le $m$-ensemble $\Pi_a$, nous pouvons trouver, d'après le théorème 4, 1°, un idéal maximal $p$ qui est $\succ (b +^* a)$ et $\notin \Pi_a$;

cet idéal $p$ est, de plus, un idéal premier; c'est-à-dire est un idéal premier $\succ a$ et maximal en dehors de $\Pi_a$; donc $p$ est un $n$-idéal premier de $a$ qui est $\succ (b +^* a)$, donc $\succ b$.

3° Chaque idéal premier $p_i \succ a$ est un idéal semi-premier $\succ a$; donc chaque $p_i \succ a_s = a_r$ et $\Pi_{p_i} \succ a_s = a_r$.

D'autre part, si $\delta$ de $\Delta$ vérifie $\delta \not\prec a_r$, le $m$-ensemble $M = V\{\delta, \delta^2, \dots\}$ ne contient pas $a_r$, donc ne contient pas non plus $a(\prec a_r)$. Il s'ensuit que, comme dans le théorème 4, 1°, on peut étendre $M$ en un $m$-ensemble maximal $M^* \supset M$ et ne contenant pas $a$; il y a un $h$-idéal premier $p_i$ de $a$ tel que

$$S_{p_i} = M^* \supset M = V\{\delta, \delta^2, \dots\}.$$

Il résulte que $\delta \in S_{p_i}$ ou $\delta \not\prec p_i$ pour un $h$-idéal premier $p_i$ de $a$ quand $\delta \not\prec a_r$. Donc $\delta \prec (\Pi_{p_i}) \rightarrow \delta \prec a_r$, où $\left(\prod_i p_i\right) \prec a_r$ aussi; il en résulte finalement que $a_r = \prod_i p_i$.

Le dernier théorème, avec la condition donnée en théorème 3 pour qu'un idéal soit primaire, nous donne une nouvelle caractérisation des idéaux primaires.

Corollaire. — *Un idéal $q(\neq u)$ est primaire si, et seulement si, il existe un idéal premier $p$ qui est à la fois le* seul *$h$-idéal premier et le* seul *$n$-idéal premier de $q$.*

Pour un idéal primaire $q(\neq u)$, le radical $q_r = p$ est un idéal premier et, évidemment, le seul $h$-idéal premier de $q$; de plus, $q$ étant primaire, le théorème 3 nous donne

$$S_{q_r} \subset \Pi_q \qquad \text{ou} \qquad S_p \subset \Pi_q;$$

donc pour un $n$-idéal premier $p_1$ de $q$,

$$p_1 \notin \Pi_q \rightarrow p_1 \notin S_p \rightarrow p_1 \prec p;$$

mais on a aussi $q \prec p_1$, donc $q_r \prec p_1$, c'est-à-dire $p \prec p_1$. Il en résulte que $p = p_1$, et $p$ est le seul $n$-idéal premier de $q$ (les $n$-idéaux premiers existent, en effet, d'après le théorème 5, 1°).

Inversement si l'idéal $q(\neq u)$ possède un idéal premier $p$ comme seul $h$-idéal premier et seul $n$-idéal premier, $q_r = \Pi$ (des $h$-idéaux premiers de $q$), d'après le théorème 5, 3°, et $q_r = p$; et, pour un $\delta$ de $\Delta$,

$$\begin{aligned} \delta \notin \Pi_q \rightarrow \delta &\prec \text{un } n\text{-idéal premier de } q, \\ &\rightarrow \delta \prec p \rightarrow \delta \notin S_p, \end{aligned}$$

donc $S_p \subset \Pi_q$; ou $S_{q_r} \subset \Pi_q$. Il en résulte, d'après le théorème 3 que $q$ est un idéal primaire.

**6. Les composants primaires isolés et les composants principaux.** — Pour un idéal premier $p$, l'ensemble $S_p = \Pi_p$ est un $m$-ensemble; le composant $a_{s_p}$ d'un idéal $a$ défini par ce $m$-ensemble sera appelé *composant isolé* $a_p$ *de* $a$ (donc nous écrivons $a_p$ pour $a_{s_p}$).

On a évidemment $p \prec p' \rightarrowtail S_p \supset S_{p'} \rightarrowtail a_p \succ a_{p'}$.

Quand $p$ est un $n$-idéal premier d'un idéal $a$, le composant isolé $a_p$ est nommé *composant principal* de $a$.

THÉORÈME 6. — 1° *Le composant principal* $a_p$ *d'un idéal* $a$ *défini par un* $n$*-idéal premier* $p$ *de* $a$ *est le plus petit idéal* $\succ a$ *ayant tous ses* $n$*-idéaux premiers* $\prec p$;

2° *L'intersection des composants principaux d'un idéal* $a$ *est égal à* $a$.

*Démonstration.* — 1°

$$a \prec p \rightarrowtail a_p = a_{s_p} \prec p$$

et

$$\begin{aligned} \delta \in S_p = \Pi_p.\quad \delta_0 \prec \frac{a_p}{\delta}\ (\delta.\delta_0 \in \Delta)\ &\rightarrowtail\ \delta_0.\delta \prec a_p, \qquad \delta \in S_p,\\ &\rightarrowtail\ \delta_0.\delta.\delta' \prec a, \qquad \text{où } \delta',\ \delta \in S_p, \qquad \text{donc } \delta'.\delta \in S_p,\\ &\rightarrowtail\ \delta_0 \prec a_p, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\cdot\frac{a_p}{\delta} \prec a_p \quad \text{si } \delta \in \Pi_p = S_p, \qquad \text{ou} \qquad \delta \in \Pi_{a_p} \quad \text{si } \delta \in S_p,$$

donc $\Pi_p = S_p \subset \Pi_{a_p}$.

Un $n$-idéal premier $p'$ de $a_p$ étant en dehors de $\Pi_{a_p}$ est aussi en dehors de $\Pi_p = S_p$, et donc $p' \prec p$; c'est-à-dire tous les $n$-idéaux premiers de $a_p$ sont $\prec p$.

D'autre part, si $b$ est un idéal $\succ a$ avec tous ses $n$-idéaux premiers $\prec p$, alors

$$\begin{aligned} \delta \in \Delta, \qquad \delta \notin \Pi_b \rightarrowtail \delta \prec &\text{ un } n\text{-idéal premier } p' \text{ de } b, \qquad p' \prec p \text{ (d'après le th. 5, 2°)},\\ &\rightarrowtail \delta \notin S_p = \Pi_p, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $S_p = \Pi_p \subset \Pi_b$. Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} \delta \in \Delta, \qquad \delta \prec a_p = a_{s_p} \rightarrowtail \delta.\delta' \prec a \qquad &\text{où } \delta' \in S_p \subset \Pi_b,\\ \rightarrowtail \delta.\delta'(\prec a) \prec b, \qquad &\delta' \in \Pi_b,\\ \rightarrowtail \delta \prec \frac{b}{\delta'} \prec b,& \end{aligned}$$

donc $a_p \prec b$. L'idéal $a_p$ est bien le plus petit idéal $\succ a$ ayant tous ses $n$-idéaux premiers $\prec p$.

2° Chaque composant principal $a_p$ est $\succ a$; donc $\Pi(a_p) \succ a$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\delta \in \Delta, \quad \delta \prec \Pi(a_p) &\rightarrowtail \delta.\delta'_p \prec a \quad \text{pour un } \delta'_p \in S_p,\\
&\rightarrowtail \delta'_p \prec \frac{a}{\delta} \quad \text{pour } \delta'_p \in S_p,\\
&\rightarrowtail \frac{a}{\delta} \in S_p, \quad \text{pour chaque } n\text{-idéal premier } p \text{ de } a,\\
&\rightarrowtail \frac{a}{\delta} \in \Pi_a
\end{aligned}$$

$\Big($car soit $\frac{a}{\delta} \notin \Pi_a$ un $n$-idéal premier $p$ de $a$ devra contenir l'idéal $\frac{a}{\delta}\Big)$.

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\delta} \in \Pi_a &\rightarrowtail \text{il y a un } \delta' \in \Delta \text{ tel que } \delta' \prec \frac{a}{\delta}, \qquad \delta' \in \Pi_a,\\
&\rightarrowtail \delta \prec \frac{a}{\delta'} \prec a;
\end{aligned}$$

donc $\delta \prec \Pi(a_p) \rightarrowtail \delta \prec a$; il en résulte que $a = \Pi(a_p)$.

Nous considérons ensuite les composants définis par un $h$-idéal premier d'un idéal.

Théorème 7. — *Chaque $h$-idéal premier $p$ d'un idéal $a$ définit un composant isolé $a_p$ qui est primaire (nous appelons $a_p$ composant primaire isolé): $a_p$ est le plus petit idéal primaire $\succ a$ ayant $p$ pour radical;*

2° *L'intersection des composants primaires isolés d'un idéal $a$ est un idéal $\tilde{a} \succ a$ (appelé noyau de $a$). L'idéal $a$ et son noyau $\tilde{a}$ possèdent les mêmes $h$-idéaux premiers, et chaque $h$-idéal premier définit le même composant primaire isolé de $a$ et de $\tilde{a}$.*

*Démonstration.* — Soit $p$ un $h$-idéal premier de l'idéal, $a$, et $\delta \in \Delta$, $\delta \prec p$; alors le $m$-ensemble $M = V\{\delta^n, \delta_i, \delta^n.\delta_i\}$ $[\delta_i \in (S_p \cap \Delta)$ et $n$ entier quelconque$]$ engendré par $S_p$ et $(\delta)$, contient tous les $h$-idéaux premiers de $a$ : car, d'une part, le $h$-idéal $p \in M$, $p$ étant $\succ \delta \in M$; et d'autre part, pour un $h$-idéal $p_1 \neq p$, $p_1 < p$ ($p$ étant un idéal minimal $\succ a$) donc $p_1 \in S_p \subset M$.

Montrons que $a \in M$ aussi : si $a \notin M$, un idéal premier $p$ sera $\succ a$ et en dehors de M, et $p$ contiendra un $h$-idéal premier $p_1$ de $a$ (d'après les th. 4 et 5) et $p_1$ ne pourrait pas être dans M; donc $a \in M$. Alors $a \in V\{\delta^n, \delta^n.\delta_i, \delta_i\}$ et $\delta_i < a$ (car $\delta_i \in S_p$ et $a \prec p$); il en résulte que, ou bien $a \succ \delta^n$, ou bien $a \succ \delta^n\,\delta_i$, où $\delta_i \in S_p$. Dans les deux cas on a $\delta^n \prec a_p (= a_{s_p})$ (car $a \prec a_p$). Donc $\delta \prec p \rightarrowtail \delta^n \prec a_p \rightarrowtail \delta \prec (a_p)_r$, radical de $a_p$.

Autrement dit $S_{(a_p)_r} \subset S_p$; mais le lemme 1, 4° pour le $m$-ensemble $S_p$ nous donne

$$S_p \subset \Pi_{a_{s_p}} = \Pi_{a_p}, \qquad \text{d'où} \qquad S_{(a_p)_r} \subset \Pi_{a_p} \quad \text{pour l'idéal } (a_p).$$

Il en résulte, d'après le théorème 3, 1°, que $a_p$ est un idéal *primaire*. De plus, $a \prec p \rightarrowtail a_p \prec p$; $p$ étant un $h$-idéal premier de $a$, il est un idéal premier minimal contenant $a$, donc aussi un idéal premier minimal contenant $a_p(\succ a)$; c'est-à-dire $p$ est le radical de l'idéal primaire $a_p$.

Si $q'$ est un idéal primaire quelconque de radical $p$ et $q' \succ a$, alors

$$\begin{aligned} \delta \in \Delta, \quad \delta \prec a_p = a_{S_p} &\rightarrow \delta . \delta_0 \prec a \prec q', \quad \text{où} \quad \delta_0 \in S_p(\delta_0 \not\prec p), \\ &\rightarrow \delta . \delta^0 \prec q' \quad \delta_0^n \not\prec q' \quad \text{pour aucune puissance entière } n, \\ &\rightarrow \delta \prec q', \quad q' \text{ étant primaire,} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $a_p \prec q'$. Donc $a_p$ est bien le plus petit idéal primaire contenant $a$ ayant $p$ pour radical.

2° On a évidemment $\tilde{a} = \Pi(a_{p_i}) \succ a$, car chaque $a_{p_i} \succ a$; de plus, $a$ est un idéal, car les $a_{p_i}$ sont idéaux.

Soit $p$ un $h$-idéal premier de $a$; alors $\tilde{a} = \prod_i (a_{p_i}) \prec a_p \prec p$; donc la minimalité de l'idéal premier $p \succ a$ entraîne qu'il est un $h$-idéal premier de $\tilde{a}$ aussi. Inversement, soit $p$ un $h$-idéal premier de $\tilde{a}$; alors $p \succ \tilde{a} \succ a$. Donc $p$ contient un $h$-idéal premier $p_1$ de $a$ (th. 5) qui est aussi $\succ \tilde{a}$ (comme plus haut). Mais $p$ est un idéal premier minimal contenant $\tilde{a}$; il s'ensuit que $p = p_1$ et $p$ est un $h$-idéal premier de $a$.

Finalement, soit $p$ un $h$-idéal premier de $a$ et de $\tilde{a}$. Alors

$$a \prec \tilde{a} \rightarrow a_p = a_{S_p} \prec \tilde{a}_{S_p} = \tilde{a}_p$$

$\left[\text{car } \frac{a}{\delta} \prec \frac{\tilde{a}}{\delta} \text{ pour chaque } \delta \in (S_p \cap \Delta)\right]$.

Mais

$$\tilde{a} = \Pi(a_{p_i}) \prec a_p \rightarrow \tilde{a}_p \prec (a_p)_p = (a_{S_p})_{S_p} = a_{S_p} = a_p$$

d'après le lemme 1, 2°; donc $\tilde{a}_p = a_p$.

Un cas particulièrement intéressant est celui où un idéal s'identifie avec son noyau. Avant de considérer ce cas, nous établissons un résultat préliminaire :

Lemme 3. — *S'il y a au moins un idéal premier $p \neq u$ qui contient un idéal donné $a$, alors chaque $h$-idéal premier de $\frac{a}{\delta}$ pour $\delta$ de $\Delta \prec \tilde{a}$, est $\succ$ un $h$-idéal premier de $a$.*

Supposons que $\delta \prec \tilde{a}$ et soit $p(\neq u)$ un idéal premier $\succ a$. Si $p_1$ est un $h$-idéal premier de $\frac{a}{\delta}$, $a \prec \frac{a}{\delta} \prec p_1$; donc $p_1$ contient un $h$-idéal premier $p_0$, de $a$; $p_0 \neq u$ (car $p_0 = u \rightarrow p_0 \succneqq p$ contrairement à la minimalité de $p_0$). $p_0$ étant un $h$-idéal premier de $a$, $\tilde{a} \prec a_{p_0}$ et $\delta(\prec \tilde{a}) \prec a_{p_0}$ d'où

$$\delta . \delta_0 \prec a \quad \text{pour un } \delta_0 \in S_{p_0},$$

ou

$$\frac{a}{\delta}(\succ \delta_0) \not\prec p_0 \qquad \text{et} \qquad p_1\left(\succ \frac{a}{\delta}\right) \not\prec p_0,$$

c'est-à-dire $p_1 \succ p_0$; donc chaque $h$-idéal premier $p_1$ de $\left(\frac{a}{\delta}\right)$ est $\succ$ un $h$-idéal premier $p_0$ de $a$.

Nous sommes maintenant prêt à considérer quelques conditions sur L et $a$ qui entraîneront l'égalité $a = \tilde{a}$.

THÉORÈME 8. — *Si la base* $\Delta$ *de* L *possède un élément unité* 1 $(\delta . 1 = 1 . \delta = \delta$ *pour chaque* $\delta \in \Delta)$ *un idéal a est égal à son noyau* $\tilde{a}$ *quand tous les h-idéaux premiers de a sont idéaux maximaux (c'est-à-dire éléments maximaux dans* L*).*

2° *Si* $\Delta$ *possède un élément unité* 1 *et un élément* $o (o \prec \delta$, $o.\delta = \delta.o = o$ *pour chaque* $\delta \in \Delta)$ *et tous les h-idéaux premiers de l'idéal* $o = \{o\}$ *sont idéaux maximaux, alors chaque idéal a de* L *est égal à son noyau* $\tilde{a}$.

*Démonstration.* — Observons d'abord que le seul idéal de L qui contient l'élément 1 est $u$; (car si $1 \prec$ un idéal $a$, et $\delta \in \Delta$, alors $\delta = 1 . \delta \prec a . \delta \prec a$).

D'autre part, le seul idéal $q$ de L ayant pour radical l'idéal premier $u$ est $u$: car $u = q_r$, $1 \prec u \rightarrow 1'' \prec q$ ou $1 \prec q \rightarrow q = u$. Ceci est le cas quand l'idéal $q$ ne possède que $u$ pour $h$-idéal premier.

Supposons alors que $a$ possède les $h$-idéaux premiers différents de $u$ et qu'ils soient tous idéaux maximaux :

D'après le lemme 3 si $\delta \prec \tilde{a}$, un $h$-idéal premier de $\frac{a}{\delta}$ doit être $= u$, car il doit être $\underset{\neq}{\succ}$ un $h$-idéal premier de $a$. Il s'ensuit que $\frac{a}{\delta}$ possède $u$ comme le seul $h$-idéal premier (car $u \succ$ chaque idéal et un $h$-idéal premier ne peût pas être $\succ$ un autre). Il s'ensuit aussi que $u$ est le seul $n$-idéal premier de $\frac{a}{\delta}$. D'après le corollaire du théorème 5, si $\frac{a}{\delta} \neq u$, $\frac{a}{\delta}$ doit être un idéal primaire ayant $u$ pour radical. Mais nous avons déjà vu qu'un tel idéal primaire n'existe pas. Donc $\frac{a}{\delta} = u$, pour chaque $\delta \prec \tilde{a}$; mais $\frac{a}{\delta} = u \rightarrow \delta = \delta . 1 \prec \delta . u \prec a$, d'où $\tilde{a} \prec a$ et $a = \tilde{a}$.

2° Pour un idéal arbtiraire $a$ nous avons la relation $o \prec a$; donc chaque $h$-idéal premier de $a$ étant un idéal premier contenant zéro, contient un $h$-idéal premier de zéro; les $h$-idéaux premiers de zéro étant les idéaux maximaux par hypothèse, chaque idéal premier de $a$ est un idéal maximal; donc $a = \tilde{a}$ résulte de la partie 1°.

Finalement, disons qu'*un idéal premier p appartient à un idéal a*, si $p$ est un $n$-idéal premier de $a_p (= a_{s_p})$. Observons que les $h$-idéaux premiers $(p)$ de $a$ appartiennent à $a$ (car $p$ est le radical de l'idéal primaire $a_p$). Nous avons alors quelques relations entre les familles des idéaux premiers appartenant à $a$ et aux composants définis par $m$-ensembles.

THÉORÈME 9. — 2° *Les idéaux premiers appartenant au composant $a_M$ d'un idéal $a$, sont les idéaux premiers appartenant à $a$ qui sont en dehors du m-ensemble* M;

2° *Si les n-idéaux premiers de $a$ appartiennent à $a$ pour chaque idéal $a$ de* L, *alors les familles d'idéaux premiers appartenant à deux composantes $a_M$, $a_{M'}$ de $a$, sont identiques si et seulement si $a_M = a_{M'}$.*

*Démonstration.* — Le lemme 1, 2° et 4° nous donne les résultats

$$\Pi_{(a_M)_{S_p}} \supset \Pi_{a_M} \supset M;$$

donc si $p$ est un idéal premier appartenant à $a_M$, $p$ est un $n$-idéal premier de $(a_M)_p = (a_M)_{S_p}$, donc $p \notin \Pi(a_M)_{S_p}$; il en résulte que $p \notin M$, d'où $S_p \supset M$ et $(a_M)_{S_p} = a_{S_p} = a_p$; c'est-à-dire $p \notin M$ et $p$ est un $n$-idéal premier de $a_p [= (a_M)_{S_p}]$, ou $p$ est un idéal premier appartenant à $a$ et $\notin M$, quand $p$ est un idéal premier appartenant à $a_M$.

Inversement, si $p$ est un idéal premier appartenant à $a$ et $p \notin M$, il résulte que $S_p \supset M$, $(a_M)_{S_p} = a_{S_p} = a_p$; $p$ est donc un $n$-idéal premier de $(a_M)_{S_p}$; ou un idéal premier appartenant à $a_M$.

2° D'après le lemme 1, 4°, $a_M = a_{M'}$ si et seulement si $M^* = \Pi_{a_M} = \Pi_{a_{M'}} = M'^*$ et $M^* = M'^*$ si et seulement si $L - M^* = L - M'^*$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &U[\Lambda(p'_j)] \quad \text{pour les } n\text{-idéaux premiers } (p_i) \text{ de } a_M \\ = \; &U[\Lambda(p_i)) \quad \text{pour les } n\text{-idéaux premiers } (p'_j) \text{ de } a_{M'}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire chaque $p_i$ est $\prec$ un $p'_j$ et chaque $p'_j \prec$ un $p_i$; d'où chaque $p_i =$ un $p'_j$ et chaque $p'_j =$ un $p_i$ (car $p_i \prec p'_j \prec p_k$, où $p_i$, $p_k$ sont des $n$-idéaux premiers de $a_M \rightarrow p_i = p_k$ et $p_i = p'_j$), Donc $a_M = a_{M'}$ si et seulement si $a_M$, $a_{M'}$ possèdent la même famille de $n$-idéaux premiers.

Mais l'hypothèse de la partie (2) entraîne que les $n$-idéaux premiers d'un idéal sont justement les idéaux maximaux appartenant à l'idéal. Donc, d'une part, $a_M = a_{M'} \rightarrow a_M$, $a_{M'}$ possèdent les mêmes familles des idéaux premiers qui leur appartiennent et d'autre part, si $a_M$, $a_{M'}$ possèdent les mêmes familles des idéaux premiers qui leur appartiennent, ils possèdent les mêmes familles des $n$-idéaux premiers, donc ils sont égaux.

7. **Sur la régularité de la base.** — Pour la théorie des idéaux étudiés jusqu'ici, la condition de régularité pour la base additive $\Delta$ de l'algèbre L n'est pas aussi importante que la condition que $\Delta$ soit finitaire : car, quand L possède une base additive, finitaire $\Delta'$ qui n'est pas régulière, nous pouvons la remplacer par une autre base additive finitaire et *régulière*, à savoir l'ensemble $\Delta$ des éléments de L qui sont les sommes finies (dans L) d'éléments de $\Delta'$; la vérification que $\Delta$ est une telle base est facile. Donc, nous pouvons remplacer $\Delta'$ par $\Delta$ et tous les résultats resteront valables.

D'autre part, avec la *$\Delta'$-théorie* (la théorie quand $\Delta'$ est pris pour la base), la plupart des résultats de la $\Delta$-théorie restent valables. Car la définition des idéaux de L ne dépend pas du choix de la base; et le radical $a_r$ d'un idéal $a$, les familles des idéaux premiers, semi-premiers et primaires, les $h$-idéaux d'un idéal et les composants primaires isolés qu'ils définissent, tout cela reste sans changement dans la $\Delta$-théorie et la $\Delta'$-théorie. Seul l'ensemble $\Pi'_a$ des éléments premiers à un idéal $a$ dans la $\Delta'$-théorie est $\prec$ l'ensemble $\Pi_a$ analogue dans la $\Delta$-théorie; donc chaque $n$-idéal premier $p$ de $a$ dans la $\Delta$-théorie est contenu dans un $n$-idéal premier $p'$ de $a$ dans la $\Delta'$-théorie et $a_p \succ a_{p'}$. Nous pouvons donc déduire du théorème 6, 2° pour la $\Delta$-théorie (qui est vraie, $\Delta$ étant régulière) l'analogue pour la $\Delta'$-théorie.

Donc, en fin de compte, tous les résultats de la $\Delta$-théorie, sauf ceux mentionnés ci-dessous, restent aussi valables quand $\Delta'$ est prise pour la base : lemme 2, 2°; théorème 5, 2°; théorème 6, 1°; théorème 8 et théorème 9.

8. **Cas particuliers.** — *L'anneau commutatif.* — R étant un anneau commutatif, les modules (non vides) de R forment une M-algèbre L avec la relation d'inclusion pour ordre partiel, avec

$$\sum_i A_i = \left(\overline{\bigcup_i A_i}\right), \qquad A.B = \overline{\{a_i.b_j\}}, \qquad a_i \in A, \qquad b_j \in B,$$

(où, pour $X \subset R$, $\overline{X}$ est le plus petit module contenant X); L possède une base additive, finitaire et régulière $\Delta$, formée par les modules principaux $\{(a)\}$, $a \in R$. [$\Delta$ est régulière, car

$$(a) \subset A +^* B \rightarrow a = \sum a_i + \sum b_j, \qquad a_i \in A, \qquad b_j \in B;$$

la somme finie étant prise dans le groupe additif R; d'où

$$(a) \subset (\alpha) +^* (\beta), \qquad \text{où} \quad (\alpha) = \left(\sum_i a_i\right) \subset A \qquad \text{et} \qquad (\beta) = \left(\sum_j b_j\right) \subset B\Big].$$

Les idéaux de cette M-algèbre L s'identifient avec les idéaux usuels, et les résultats dus à M. W. Krull [3] sont donc un cas particulier des nôtres.

*Le « ringoid » commutatif et associatif.* — D'après M. G. Birkhoff [1] un « ringoid » est un système à multiplication ( . ) avec d'autres opérations binaires (disons $\theta_\lambda$) qui sont distribuées par ( . ) les deux côtés; un sous-ensemble A d'un tel « ringoid » R est un *module* si $(a\theta_\lambda b) \in A$ quand $a$, $b$ sont éléments de A et $\theta_\lambda$ une des autres opérations binaires; un module A est un *idéal* s'il satisfait de plus la condition $a.x \in A$ et $x.a \in A$ pour chaque $a$ de A et $x$ de R.

Supposons alors que R soit un « ringoid » commutatif et associatif (c'est-à-dire à une multiplication commutative et associative). Soit L la $\left(\sum^*, \cdot\right)$-algèbre de tous les modules de R (sauf l'ensemble vide quand R possède un élément $0; 0.x = x.0 = 0$ pour chaque $x$); comme plus haut, la famille $\Delta$ des modules principaux forme une base additive et finitaire pour cette $\left(\sum^{*}, \cdot\right)$-algèbre L; mais $\Delta$ n'est pas, en général, régulière. Donc, remplaçons cette base $\Delta$ par la base $\bar{\Delta} = \{\bar{\mathcal{F}}\}$, ($\mathcal{F}$ = sous-ensemble fini de R), qui est aussi régulière. Les idéaux de notre théorie sont les mêmes que les idéaux définis par M. G. Birkhoff. Notre théorie fournit donc une extension des résultats donnés par M. W. Krull pour le cas particulier où R est un anneau commutatif au cas plus général d'un « ringoid » commutatif et associatif.

*Le treillis distributif.* — Soit alors R un « ringoid » qui est de plus un treillis multiplicatif par rapport à sa multiplication ( . ) : c'est-à-dire que la multiplication est commutative, associative et tautologique ($a.a = a$ pour chaque $a$ de R). Dans ce cas-là, le radical $A_r$ d'un idéal A s'identifie avec l'idéal lui-même; et donc le théorème 5, 3° entraîne que chaque idéal est l'intersection des idéaux premiers qui le contient. Il en résulte qu'on a une correspondance biunivoque

$$A(\in \bar{L}) \leftrightarrow \mathcal{E}(A)[\in \mathcal{B}(\mathcal{E})]$$

entre la famille L des idéaux de R et une sous-famille de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ formée par les sous-ensembles de l'ensemble $\mathcal{E}[=\mathcal{E}(R)]$ des idéaux premiers de R : en effet, $\mathcal{E}(A)$ est défini comme l'ensemble des idéaux premiers de R qui ne contiennent pas A [d'où $\mathcal{E} = \mathcal{E}(R)$, avec la convention que R lui-même n'est pas compté parmi des idéaux premiers de R)]. Mais cette correspondance nous donne en réalité un isomorphisme entre la $\left(\sum^{*}, \cdot\right)$-algèbre L et un sous-treillis de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, car

$$\mathcal{E}\left(\sum_i^{*} A_i\right) = \bigcup_i \mathcal{E}(A_i) \qquad \text{dans } \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

et

$$\mathcal{E}(A.B) = \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B) \quad \text{dans } \mathcal{B}(\mathcal{E}).$$

Nous avons donc la généralisation suivante d'un résultat bien connu pour le cas particulier où R est un treillis distributif :

Soit R un « ringoid » qui est aussi un demi-treillis multiplicatif; alors la $\left(\sum^{*} \cdot \cdot\right)$-algèbre de ses idéaux est un treillis complet avec toutes les sommes distributives.

Supposons maintenant que R soit un treillis distributif; alors il y a un isomorphisme

$$a \in R \leftrightarrow (\wedge\, a) \in \bar{L}$$

entre R et un sous-treillis du treillis L des idéaux de R; donc avec l'autre isomorphisme entre L et un sous-treillis de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ déjà établie, nous voyons qu'il y a un isomorphisme

$$a \in R \leftrightarrow \mathcal{E}(a) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{E}(\wedge\, a) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

entre R et un sous-treillis de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. Cet isomorphisme considéré pour la première fois par M. M. H. Stone [4], nous donne une représentation d'un treillis distributif comme « anneau d'ensembles ».

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (*Amer. Math. Soc.*, Colloq. Pub., vol. 25, 2e éd., 1948).

[2] V. S. Krishnan, *Une théorie générale des idéaux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1397-1399).

[3] W. Krull, *Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung* (*Math. Ann.*, t. 101, 1929, p. 729-774).

[4] M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics* (*Cas. Pest. Math. Fys.*, t. 67, 1937, p. 1-25).

## L'ÉQUIVALENCE DE QUELQUES REPRÉSENTATIONS D'UNE STRUCTURE ABSTRAITE.

**Introduction.** — Cette partie présente une étude en termes généraux d'une équivalence de quelques représentations de structures, soit algébriques, soit topologiques.

Les ***structures abstraites*** avec ***transformations distinguées*** de l'une dans l'autre, soumises à quelques axiomes, constituent les notions primitives. Cela généralise à la fois les structures algébriques avec les homomorphismes et les espaces topologiques avec les transformations continues. A partir de là, on définit le ***produit direct*** des structures abstraites, les ***sous-structures*** d'une structure abstraite, une relation d'être ***faible*** ou ***fort*** entre structures abstraites sur le même ensemble d'éléments basiques, et les familles ***héréditaires*** et ***multiplicatives*** de structures abstraites. Le théorème principal (th. 1) affirme qu'une famille héréditaire et multiplicative M qui contient une famille héréditaire H, contient une famille héréditaire, multiplicative *minimum* $\overline{\mathrm{H}}$, contenant H et que les structures abstraites $\{\mathcal{E}\}$ de cette famille $\overline{\mathrm{H}}$ sont caractérisées par chacune des trois conditions suivantes équivalentes :

1° et 2° $\mathcal{E}$ est *équivalent à* [*réductible à*] une sous-structure d'un produit direct de structures abstraites ($\mathcal{E}_i$) appartenant à H;

3° $\mathcal{E} = (\mathrm{E}, \mathrm{S})$ est formée par l'association d'une structure S à l'ensemble E, et il existe une famille $\mathcal{E}_i = (\mathrm{E}, \mathrm{S}_i)$ de structures abstraites dans H construites sur le même ensemble E, tels que $\mathrm{S} = \prod_i \mathrm{S}_i$ (par rapport à l'ordre partiel des structures abstraites sur E défini par la relation d'être plus faible).

Comme cas particuliers de ce théorème on a les résultats suivants (th. 2, 3 et 4) :

1 [1], [5]. — Parmi les *treillis* généralisés ([6]), ceux qui sont distributifs sont caractérisés par chacune des trois conditions suivantes, équivalentes :

1° et 2° Le treillis généralisé est *isomorphe à* [*réductible à*] un sous-treillis d'un produit direct d'ensembles totalement ordonnés ;

3° Le treillis généralisé a un ordre partiel qui est l'intersection des ordres totaux sur le même ensemble d'éléments.

2 [4]. — Parmi les *groupes réticulés généralisés,* ceux qui sont réguliers sont caractérisés par chacune des trois conditions équivalentes suivantes :

1° et 2° Le groupe réticulé généralisé est *isomorphe à* [*réductible à*] un sous-groupe ordonné d'un produit direct des groupes totalement ordonnés généralisés ;

3° Le groupe réticulé généralisé possède un ordre partiel qui est l'intersection des ordres totaux compatibles avec sa structure.

3 [2], [3], [6] et [7]. — Parmi les espaces topologiques, ceux qui sont *complètement réguliers* sont caractérisés par chacune des trois conditions suivantes équivalentes :

1° et 2° L'espace est *homéomorphe à* [*contractible à*] un sous-espace d'un produit direct d'espaces pseudo-métrisables ;

3° L'espace possède une topologie qui est le produit des topologies définies sur le même ensemble de points par les pseudo-métriques.

## 1. Notions fondamentales et axiomes.

— Soit $\mathcal{F}$ une famille des structures abstraites données. Chaque structure abstraite $\mathcal{E}$ est formée par l'association d'une structure S à un ensemble d'éléments E et nous disons que $\mathcal{E}$ est la structure abstraite sur la base E et S la structure associée à E et nous écrirons

$$\mathcal{E} = (E, S).$$

Pour chaque paire de structures abstraites $\mathcal{E} = (E, S)$, $\mathcal{E}' = (E', S')$ de $\mathcal{F}$, une famille de transformations de E dans E' est donnée ; ces transformations sont appelées les *transformations distinguées* de $\mathcal{E}$ dans ([7]) $\mathcal{E}'$. Elles sont soumises aux axiomes A1-A5 suivants :

A1. Pour une structure abstraite $\mathcal{E} = (E, S)$ dans $\mathcal{F}$, la transformation identique de E sur lui-même est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

A2. La composition $\varphi = \varphi_2 . \varphi_1$ de deux transformations distinguées $\varphi_1$ et $\varphi_2$ (de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ et de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_3$ respectivement) est une transformation distinguée (de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_3$).

([6]) Les opérations $\frown$, $\smile$ sont définies seulement à l'équivalence $\approx$ près ; où $a \approx b \Leftrightarrow a \prec b$ et $b \prec a$.

([7]) Les qualifications « sur », « dans », « biunivoque », etc. associées aux transformations distinguées se rapportent en réalité aux transformations considérées comme transformations entre ensembles (sans structures).

A1 et A2 entraînent que l'existence d'une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ définit une relation d'ordre partiel entre les structures abstraites dans $\mathcal{F}$.

Une transformation distinguée $\varphi$ de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ qui est biunivoque entre E et E est appelée *transformation d'équivalence* de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ si $\varphi^{-1}$ est aussi une transformation distinguée de $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{E}$.

La relation $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$ définie par l'existence d'une transformation d'équivalence de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ est une relation d'équivalence entre les structures abstraites dans $\mathcal{F}$. Cette relation nous servira pour l'équivalence basique : les propriétés qui sont considérées sont invariantes pour cette équivalence et les opérations sont définies à cette équivalence près.

A3. Si $\mathcal{E} = (E, S)$ est une structure abstraite dans $\mathcal{F}$ et $\varphi$ une transformation biunivoque de E sur un ensemble E', alors il existe une structure abstraite

$$\mathcal{E}' = (E', S')$$

sur la base E' dans $\mathcal{F}$ telle que $\varphi$ soit une transformation d'équivalence de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

Cet axiome nous permet de transférer la structure d'une structure abstraite par une transformation biunivoque de la base à une autre base. En effet, les éléments de la base ne comptent pas pour la structure abstraite, mais seulement le nombre cardinal de la base. La structure S' associée ainsi à E' est univoque (à une équivalence des structures sur E' près), et nous écrivons : $S' = \bar{\varphi}(S)$; par symétrie, il s'ensuit que $S = \bar{\varphi}^{-1}(S')$.

Si (E, S), (E, S') sont des structures abstraites dans $\mathcal{F}$ sur la même base E, nous disons que S, S' sont *équivalents* (*sur* E), en symboles $S \equiv S'$ (sur E) si la transformation identique de E sur lui-même est une transformation d'équivalence de (E, S) sur (E, S'). Mais si cette transformation est seulement une transformation distinguée de (E, S) sur (E, S') nous disons que S est *plus faible* que S' ou S' est *plus fort* que S (sur E), et écrivons $S \prec S'$ (sur E) ou $S' \succ S$ (sur E). Évidemment, les correspondances $\bar{\varphi}$ considérées ci-dessus et $\bar{\varphi}^{-1}$ conservent, en identifiant les structures équivalentes sur E (et sur E'), cette relation d'ordre partiel parmi les structures sur E et celle parmi les structures sur E'.

Les derniers axiomes sont :

A4. Si $\varphi$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E} = (E, S)$ dans $\mathcal{E}' = (E', S')$, $(\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in \mathcal{F})$ et si $\varphi(E) = \bar{E}(\subset E')$, alors il existe une structure abstraite $\bar{\mathcal{E}} = (\bar{E}, \bar{S})$ sur $\bar{E}$ telle que $\varphi$ soit une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ *sur* $\bar{\mathcal{E}}$ et la transformation identique de $\bar{E}$ dans $E'(\supset \bar{E})$ soit une transformation distinguée de $\bar{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{E}'$.

A5. Si $\varphi$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E} = (E, S)$ dans $\mathcal{E}' = (E', S')$, ($\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{F}$), alors il existe une structure abstraite $\mathcal{E}_1 = (E, S_1)$ sur E (dans $\mathcal{F}$) telle que :

1° $\varphi$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}'$;

2° quand $\mathcal{E}_i = (E, S_i)$ est une structure abstraite (dans $\mathcal{F}$) telle que $\varphi$ soit une transformation distinguée de $\mathcal{E}_i$ dans $\mathcal{E}'$, alors $S_i \prec S_1$ (sur E).

Donc dans A5, $S_1$ peut être caractérisée (à une équivalence près) comme la plus forte structure associée à E telle que $\varphi$ soit une transformation distinguée dans $\mathcal{E}'$. Nous écrivons alors $S_1 = \overset{-1}{\varphi}(S')$, car $S_1$ ne dépend pas de S mais seulement de $\varphi$ et S' (et la famille fixée $\mathcal{F}$ de structures abstraites). Observons de plus que pour l'axiome A3 la structure $S = \overset{-1}{\varphi}(S')$ est aussi $= \overset{-1}{\varphi}(S')$; mais généralement, $\overset{-1}{\varphi}$ n'est pas définie; c'est seulement quand $\varphi$ est biunivoque que l'on a $\overset{-1}{\varphi} = \overset{-1}{\varphi}$.

Pour analyser la portée des axiomes A4, A5, définissons les sous-structures et la réductibilité :

*Définition.* — 1° Une structure abstraite $\mathcal{E} = (E, S)$ est une sous-structure d'une autre $\mathcal{E}' = (E', S')$ ($\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{F}$), en symboles $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, si $E \subset E'$ et $S = \overset{-1}{I}(S')$, où I est la transformation identique de E dans E'.

2° Une structure abstraite $\mathcal{E} = (E, S)$ dans ($\mathcal{F}$) est réductible à la structure abstraite $\mathcal{E}' = (E', S')$ (dans $\mathcal{F}$) par la transformation $\varphi$, si $\varphi$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{E}'$ telle que $S = \overset{-1}{\varphi}(S')$; $\varphi$ est appelé une réduction de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.

Nous pouvons alors établir le lemme suivant en utilisant les axiomes A4 et A5.

LEMME I. — *Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont structures abstraites dans $\mathcal{F}$, et $\varphi$ une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ avec $\varphi(E) = (\bar{E})$, alors* 1° *il existe (dans $\mathcal{F}$) une sous-structure $\tilde{\mathcal{E}} = (\bar{E}, \tilde{S})$ de $\mathcal{E}'$ (sur $\bar{E}$) telle que $\varphi$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$ et* 2° *il existe une structure $S_1$ plus forte que S sur E telle que $\mathcal{E}_1 = (E, S_1) \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}_1$ est réductible à $\tilde{\mathcal{E}}$ par $\varphi$. A une équivalence près $\tilde{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}_1$ sont uniques et ne dépendent pas de la structure S de $\mathcal{E}$ donnée.*

D'après A4, il existe une structure $\bar{S}$ sur $\bar{E}$ telle que $\bar{\mathcal{E}} = (\bar{E}, \bar{S}) \in \mathcal{F}$ et que $\varphi$ soit une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ sur $\bar{\mathcal{E}}$ et l'identité (I) est une transformation distinguée de $\bar{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{E}'$. Donc, d'après A5, il existe une structure $\tilde{S} = \overset{-1}{I}(S')$ sur $\bar{E}$ telle que $\bar{S} \prec \tilde{S}$ (sur $\bar{E}$) et $\tilde{\mathcal{E}}$ soit une sous-structure de $\mathcal{E}'$. Alors $\varphi$ et l'identité étant des transformations distinguées de $\mathcal{E}$ sur $\bar{\mathcal{E}}$ et de $\bar{\mathcal{E}}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$ il s'ensuit que $\varphi (= I\varphi)$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$, où $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}'$, d'où résulte la première partie.

En utilisant une fois de plus A5 pour la transformation distinguée $\varphi$ de $\mathcal{E}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$ nous voyons qu'il existe une structure $S_1 = \overset{-1}{\varphi}(\tilde{S}) = \overset{-1}{\varphi}\,\overset{-1}{I}(S')$ ou $\overset{-1}{\varphi}(S')$ sur E telle que $\mathcal{E}_1 = (E, S_1) \in \mathcal{F}$ et que $\varphi$ soit une réduction de $\mathcal{E}_1$ à $\tilde{\mathcal{E}}$.

Évidemment, $E = \varphi(E)$ et $\bar{S} = \overset{-1}{I}(S')$ ne dépendent pas de S; et de même pour E et $S_1 = \overset{-1}{\varphi}(\bar{S}) = \overset{-1}{\varphi}(S')$ et les structures $\bar{S}$, $S_1$ sont définies à une équivalence près $\left(\text{d'après la définition de } \overset{-1}{\varphi} \text{ et } \overset{-1}{I}\right)$.

*Définition.* — La structure abstraite $\mathcal{E} = (E, S)$ de $\mathcal{F}$ est le ***produit direct*** des structures abstraites $\mathcal{E}_i = (E_i, S_i)$ de $\mathcal{F}$, en symboles $\mathcal{E} = P_i\{\mathcal{E}_i\}$, si :

1° $E = P_i\{E_i\}$ = le produit direct des ensembles $\{E_i\}$;

2° la projection $\varphi_i$ de E dans $E_i$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_i$ pour chaque $i$;

3° quand $\mathcal{E}' = (E', S')$ est une structure abstraite de $\mathcal{F}$ telle qu'il existe une famille de transformations distinguées $\{\psi_i\}$ de $\mathcal{E}'$ dans chacun des $(\mathcal{E}_i)$, alors la transformation $\psi$ définie par $\psi(e') = \{\psi_i(e')\}$ de E dans $P_i\{E_i\}$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$.

L'existence d'un produit direct pour $(\mathcal{E}_i)$ de $\mathcal{F}$ n'est pas assurée par cette définition; mais quand il existe, ce produit est unique à une équivalence près, car $E = P_i\{E_i\}$ est déterminé par les $\mathcal{E}_i$ et si S, $S_0$ sont des structures associées à E qui satisfont les conditions 2° et 3°, on vérifie que $S \equiv S_0$ (sur E).

Lemme 2. — *Si $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}'_i$ sont des paires de structures abstraites de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{E}_i \Subset \mathcal{E}'_i$ pour chaque paire et $\mathcal{E} = P_i\{\mathcal{E}_i\}$, $\mathcal{E}' = P_i\{\mathcal{E}'_i\}$ existent dans $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}'$.*

On a évidemment $E = P_i\{E_i\} \subset P_i\{E'_i\} = E'$ quand $E_i \Subset E'_i$ pour chaque $i$.

Les transformations $\{e_i\}$ de $E \to e_i$ de $E_i$ et $e_i$ de $E_i \to e_i$ de $E'_i$ sont des transformations distinguées de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_i$ et de $\mathcal{E}_i$ dans $\mathcal{E}'_i$. Il en résulte d'après **A2** et la définition de $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$, que la transformation identique de E dans $E'(\supset E)$ est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

S'il y a une structure T sur E telle que la transformation identique de E dans E′ soit une transformation distinguée de (E, T) dans $\mathcal{E}'$, alors les transformations $\{e_i\}$ de $E \to \{e_i\}$ de E′ et $\{e_i\}$ de $E' \to e_i$ de $E'_i$ sont des transformations distinguées de (E, T) dans $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'_i$. Donc leur composition $\varphi_i$ (la projection de E dans $E'_i$) est aussi une transformation distinguée. Mais évidemment $\varphi_i(E) = E_i(\subset E'_i)$ et, d'après **A4**, il existe une structure $T_i$ sur $E_i = \varphi_i(E)$ telle que $\varphi_i$ soit une transformation distinguée de (E, T) sur $(E_i, T_i)$ et que l'identité soit une transformation distinguée de $(E_i, T_i)$ dans $\mathcal{E}'_i$. Par hypothèse,

$$\mathcal{E}_i = (E_i, S_i) \Subset \mathcal{E}'_i;$$

il s'ensuit que $T_i \prec S_i$ (sur $E_i$). Donc les transformations

$$\{e_i\} \text{ de } E \;\to\; \varphi_i\{e_i\} = e_i \text{ de } E_i, \quad e_i \text{ de } E_i \to e_i \text{ de } E_i$$

sont des transformations distinguées de (E, T) dans $(E_i, T_i)$ et de $(E_i, T_i)$ sur $(E_i, S_i) = \mathcal{E}_i$. Par combinaison, on a donc le résultat que la transformation $\varphi_i$

de E dans $E_i$ est une transformation distinguée de (E, T) dans $\mathcal{E}_i$. Il s'ensuit, d'après la définition de $P_i\{\mathcal{E}_i\}$ que la transformation identique de E sur lui-même est une transformation distinguée de (E, T) sur (E, S), c'est-à-dire $T \prec S$ (sur E). Donc nous avons montré que $(E, S) \leqq (E', S')$.

**2. Les familles héréditaires et multiplicatives et le théorème principal.** — Une sous-famille H de $\mathfrak{F}$ est appelée une *famille héréditaire* si l'existence d'une transformation distinguée $\varphi$ d'une structure abstraite $\mathcal{E} = (E, S)$ de $\mathfrak{F}$ dans une structure abstraite $\mathcal{E}' = (E', S')$ de H entraîne l'appartenance de la structure abstraite $\mathcal{E}_1 = \left[E, \overset{-1}{\varphi}(S)\right]$ à H.

Une sous-famille H de $\mathfrak{F}$ est appelée une *famille multiplicative* si le produit direct existe (dans $\mathfrak{F}$) et appartient à H pour chaque sous-famille non vide de structures abstraites appartenant à H.

Lemme 3. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la famille* $H(\subset \mathfrak{F})$ ***soit héréditaire sont :***

1° H *contient avec chaque structure abstraite* $\mathcal{E}'$ *(de* $\mathfrak{F}$*) toutes les sous-structures* $\mathcal{E}$ *de* $\mathcal{E}'$ *(dans* $\mathfrak{F}$*);*

2° H *contient avec chaque structure abstraite* $\mathcal{E}'$ *(de* $\mathfrak{F}$*) toutes les struc-* ***tures abstraites*** $\mathcal{E}$ ***(de*** $\mathfrak{F}$***) qui peuvent être réduites à*** $\mathcal{E}'$.

La nécessité résulte du fait que quand $\mathcal{E}$ est une sous-structure de $\mathcal{E}'$ ou une structure abstraite réductible à $\mathcal{E}'$, il existe une transformation distinguée $\varphi$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ telle que $\mathcal{E} \equiv \left[E, \overset{-1}{\varphi}(S')\right]$.

Inversement, supposons que les conditions soient remplies. Alors quand $\mathcal{E}$ est une structure abstraite et $\varphi$ une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ dans une structure abstraite $\mathcal{E}'$ de H il résulte, du lemme 2, qu'il existe une sous-structure $\tilde{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}'$ telle que la structure abstraite $\mathcal{E}_1 = \left[E, \overset{-1}{\varphi}(S')\right]$ soit réduite par $\varphi$ à $\tilde{\mathcal{E}}$. Donc, d'après l'hypothèse, $\tilde{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}_1$ sont dans H en même temps que $\mathcal{E}'$.

Nous arrivons maintenant au théorème principal :

Théorème 1. — *Si une famille héréditaire et multiplicative* $M(\subset \mathfrak{F})$ *contient une famille héréditaire* H, *alors* M *contient une famille héréditaire, multiplicative minimum contenant* H: *cette famille* $\overline{\overline{H}}$ *est composée de structures* ***abstraites*** $\mathcal{E} = (E, S)$ *dans* M *vérifiant l'une quelconque des trois conditions suivantes, équivalentes :*

1° $\mathcal{E}$ ***est équivalente à une sous-structure d'un produit direct des structures abstraites appartenant à*** H;

2° $\mathcal{E}$ ***est réductible à une sous-structure d'un produit direct des structures abstraites appartenant à*** H;

3° $\mathcal{E} = (E, S)$, ***et il existe une famille*** $\mathcal{E}_i = (E, S_i)$ ***des structures abstraites sur*** E ***appartenant à*** H ***telle que*** $S = \prod_i S_i$ *(sur* E*).*

*Démonstration.* — Montrons d'abord que les trois conditions sont équivalentes :

1° $\succ\!\!\rightarrow$ 2° : car une transformation d'une équivalence est un cas particulier d'une réduction;

2° $\succ\!\!\rightarrow$ 3° : supposons 2° remplie par $\mathcal{E}$; alors il y a une réduction $\varphi$ de $\mathcal{E}$ à une sous-structure $\mathcal{E}'$ de $P\{\mathcal{E}'_i\}$, où $\mathcal{E}'_i \in H$. Donc les transformations $e$ de $E \to \varphi(e)$ de $E'$, $\varphi(e)$ de $E' \to \varphi(e) = \{e'_i\}$ de $P_i\{E'_i\}$ et $\{e'_i\}$ de $P_i\{E'_i\} \to e'_i$ de $E'_i$ sont respectivement des transformations distinguées de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, de $\mathcal{E}'$ dans $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$ et de $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$ dans $\mathcal{E}'_i$. Par conséquent la transformation $\psi_i$ : $e$ de $E \to e'_i$ [composante de $\varphi(e)$ dans $E'_i$] est une transformation distinguée de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'_i$ pour chaque $i$. Donc, d'après le lemme I, il existe des structures abstraites $\tilde{\mathcal{E}}_i = [\varphi(E), \tilde{S}_i]$ — où $\tilde{S}_i = \overset{-1}{I}(S'_i)$, et $\mathcal{E}_i = (E, S_i)$ — où $S_i = \overset{-1}{\varphi}(S'_i)$, telles que $S \prec S_i$ (sur E), $\varphi$ soit une véritable réduction de $\mathcal{E}_i$ sur $\tilde{\mathcal{E}}_i$ et $\tilde{\mathcal{E}}_i$ une sous-structure de $\mathcal{E}'_i$. Donc avec les $\mathcal{E}'_i$, la famille héréditaire H contient aussi les $\tilde{\mathcal{E}}_i$ et les $\mathcal{E}_i$.

Donc nous avons trouvé les $\mathcal{E}_i = (E, S_i)$ dans H avec $S \prec$ chaque $S_i$ (sur E). Il suffit de montrer que $S = \Pi_i S_i$ (sur E) pour arriver à la condition 3° pour $\mathcal{E}$.

Supposons donc que (E, T) soit une structure abstraite sur la base E avec $T \prec$ chaque $S_i$. Alors les transformations $e$ de $E \to e$ de E, $e$ de $E \to \psi_i(e)$ de $\bar{E}_i$ et $\psi_i(e)$ de $E_i \to \psi_i(e)$ de $E'_i$, sont respectivement des transformations distinguées de (E, T) sur $\mathcal{E}_i$, de $\mathcal{E}_i$ sur $\tilde{\mathcal{E}}_i$ et de $\tilde{\mathcal{E}}_i$ dans $\mathcal{E}'_i$. Il s'ensuit que $\psi_i$ : $e$ de $E \to \psi_i(e)$ de $E'_i$ est une transformation distinguée de (E, T) dans $\mathcal{E}'_i$; d'où résulte, d'après la définition du produit direct, que la transformation $e$ de $E \to \{e'_i\} = \varphi(e)$ de $P_i\{E'_i\}$ est une transformation distinguée de (E, T) dans $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$, avec $\varphi(E) = E'$. Donc, d'après A 4, il existe une structure abstraite (E', T') sur E' telle que $\varphi$ soit transformation distinguée de (E, T) sur (E', T') et l'identité transformation distinguée de (E', T') dans $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$. Par hypothèse $\mathcal{E}' = (E', S')$ est une sous-structure de $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$. Donc $T' \prec S'$ (sur E'), donc les transformations $e$ de $E \to \varphi(e)$ de E', $\varphi(e)$ de $E' \to \varphi(e)$ de E' sont des transformations distinguées de (E, T) sur (E', T') et de (E', T') sur (E', S') respectivement. Donc $\varphi$ est une transformation distinguée de (E, T) sur $\mathcal{E}'$. Il s'ensuit que $T \prec S$, et $S = \prod_i S_i$ (sur E).

Donc 2° $\succ\!\!\rightarrow$ 3°.

3° $\succ\!\!\rightarrow$ 1° : supposons que $\mathcal{E} = (E, S)$, $S = \prod_i S_i$ (sur E) où chaque $\mathcal{E}_i = (E, S_i) \in H$.

Il y a une transformation biunivoque $a \leftrightarrow (a, a, a, \ldots)$ entre E et la diagonale $\Delta$ du produit direct $P_i\{E_i\}$ quand chaque $E_i = E$. Donc, d'après A 3, la structure S sur E peut être transférée sur $\Delta$ en donnant une structure abstraite $(\Delta, \bar{S})$ équivalente à (E, S) par la transformation d'équivalence $a \leftrightarrow (a, a, \ldots)$. Donc $(E, S) \equiv (\Delta, \bar{S})$. Nous allons montrer que $(\Delta, \bar{S}) \subseteq P_i(\mathcal{E}_i)$, où $\mathcal{E}_i \in H$ par hypothèse. La condition 1° sera donc établie à partir de la condition 3°.

Premièrement $\Delta \subset P_i\{E_i\}$, où chaque $E_i = E$. Et puis les transformations $(a, a, a, \ldots)$ de $\Delta \to a$ de E, $a$ de $E \to a$ de $E_i (= E)$ sont respectivement des transformations distinguées de $(\Delta, \bar{S})$ sur (E, S) et de (E, S) sur $(E, S_i) = \mathcal{E}_i$

(car $S \prec$ chaque $S_i$). Donc la transformation identique de $\Delta$ dans $P_i\{E_i\}$ est une transformation distinguée de $(\Delta, \overline{S})$ dans $P_i\{\mathcal{E}_i\}$.

D'autre part, s'il existe une structure abstraite $(\Delta, \overline{T})$ sur $\Delta$ telle que cette transformation identique soit une transformation distinguée de $(\Delta, \overline{T})$ dans $P_i\{\mathcal{E}_i\}$, alors d'après A 3, nous pouvons trouver une structure abstraite $(E, T)$ sur E telle que $(a, a, \ldots) \leftrightarrow a$ soit une transformation d'équivalence de $(\Delta, \overline{T})$ sur $(E, T)$. Donc les transformations $a$ de $E \rightarrow (a, a, a, \ldots)$ de $\Delta$, $(a, a, a, \ldots)$ de $\Delta \rightarrow (a, a, a, \ldots)$ de $P_i\{E_i\}$ et $(a, a, a, \ldots)$ de $P_i\{E_i\} \rightarrow a$ de E, sont respectivement des transformations distinguées de $(E, T)$ sur $(\Delta, \overline{T})$, de $(\Delta, \overline{T})$ dans $P_i\{\mathcal{E}_i\}$ et de $P_i\{\mathcal{E}_i\}$ dans $\mathcal{E}_i$. Il s'ensuit que la transformation identique de E sur lui-même est une transformation distinguée de $(E, T)$ sur $\mathcal{E}_i = (E, S_i)$, c'est-à-dire $T \prec S_i$, pour chaque $S_i$, d'où $T \prec \prod_i S_i = S$ et $\overline{T} \prec \overline{S}$. Donc $(\Delta, \overline{S}) \Subset P_i\{\mathcal{E}_i\}$ et $3^\circ \rightarrowtail 1^\circ$.

Cette équivalence des trois conditions étant établie, désignons par $\overline{H}$ la famille des structures abstraites $\mathcal{E}$ de M qui satisfont une des trois conditions (donc des trois). La condition $1^\circ$ montre que si $\mathcal{E} \in \overline{H}$ et $\mathcal{E}_0 \Subset \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}_0 \in \overline{H}$. La condition $2^\circ$ montre que si $\mathcal{E} \in \overline{H}$ et $\mathcal{E}_0$ est réductible à $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}_0 \in \overline{H}$. Donc $\overline{H}$ est une famille héréditaire. Finalement, la condition $1^\circ$ avec le lemme 2 et l'hypothèse que M est multiplicative, entraînent que $\overline{H}$ est aussi multiplicative. Donc, cette famille, qui évidemment contient H, est héréditaire, multiplicative et continue dans M. D'autre part, si une sous-famille $M_0$ de M contient H et est héréditaire et multiplicative, $M_0$ contient le produit $P_i\{\mathcal{E}'_i\}$ de $\mathcal{E}'_i \in H$, aussi $\mathcal{E}' \Subset P_i\{\mathcal{E}'_i\}$ et $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, c'est-à-dire $M_0$ contient toutes les structures abstraites de M satisfaisant aux conditions $1^\circ$, donc $M_0 \supset \overline{H}$. $\overline{H}$ est bien la famille héréditaire, multiplicative *minimum* contenant H, et contenue dans M.

A partir de la relation de réductibilité, nous pouvons définir une sorte d'équivalence plus faible que $\equiv'$, de la façon suivante :

Les structures $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ (dans $\mathcal{F}$) sont faiblement équivalentes, en symboles $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}'$, s'il y a une suite finie de structures abstraites (de $\mathcal{F}$) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n = \mathcal{E}'$ entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ telles que pour $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, on ait, ou bien $\mathcal{E}_i$ est réductible à $\mathcal{E}_{i+1}$, ou bien $\mathcal{E}_{i+1}$ est réductible à $\mathcal{E}_i$. Il est évident que c'est une relation d'équivalence et que $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}' \rightarrowtail \mathcal{E}$ est réductible à $\mathcal{E}' \rightarrowtail \mathcal{E} \approx \mathcal{E}'$.

En vue des applications, considérons ici quelques hypothèses supplémentaires sur la famille $\mathcal{F}$ de structures abstraites :

H. S. — *$\mathcal{F}$ contient une sous-famille $\overline{\mathcal{F}}$ telle que chaque structure abstraite $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est réductible à une seule structure abstraite $\overline{\mathcal{E}}$ de $\overline{\mathcal{F}}$ (à une équivalence près), et*

$$\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}' \rightarrowtail \overline{\mathcal{E}} \Subset \overline{\mathcal{E}'},\quad P_i\{\overline{\mathcal{E}}_i\} \equiv \overline{P_i\{\mathcal{E}_i\}}.$$

Nous avons le

Corollaire. — *Avec les hypothèses supplémentaires* (H. S.) *si les familles* M *et* H *du théorème* 1 *contiennent $\overline{\mathcal{E}}$ en même temps que $\mathcal{E}$, alors la condition* $2^\circ$

*est équivalente à chacune des deux conditions suivantes :* $2^{o\prime}$ : $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$, *où* $\mathcal{E}' \subseteq P_i\{\mathcal{E}'_i\}$ *et* $\mathcal{E}'_i \in H$ *pour chaque* $i$; $2^{o\prime\prime}$ : $\mathcal{E}$ *est réductible à* $\overline{\mathcal{E}}_i \subseteq P_i\{\overline{\mathcal{E}}'_i\}$ *où chaque* $\overline{\mathcal{E}}'_i \in \overline{H} (= H \cap \overline{\mathcal{F}})$.

Évidemment $2^{o\prime\prime} \Rightarrow 2^o \Rightarrow 2^{o\prime}$. Il reste à montrer seulement que $2^{o\prime} \Rightarrow 2^{o\prime\prime}$. Or si $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$, il existe une suite finie des structures abstraites $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n = \mathcal{E}'$ entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ telle que ou bien $\mathcal{E}_i$ est réductible à $\mathcal{E}_{i+1}$, ou bien $\mathcal{E}_{i+1}$ est réductible à $\mathcal{E}_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Donc en tout cas, d'après l'unicité de $\overline{\mathcal{E}}_i$, et $\overline{\mathcal{E}}_{i+1}$, il s'ensuit que $\overline{\mathcal{E}}_i = \overline{\mathcal{E}}_{i+1}$. Donc, par récurrence, $\overline{\mathcal{E}} \equiv \overline{\mathcal{E}}'$ quand $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$ (l'inverse est évident). C'est-à-dire $\overline{\mathcal{E}} \equiv \overline{\mathcal{E}}' \subseteq P_i\{\overline{\mathcal{E}}'_i\}$ où chaque $\overline{\mathcal{E}}'_i \in \overline{H}$, quand $2^{o\prime}$ est vrai. Mais $\mathcal{E}$ est réductible à $\overline{\mathcal{E}}$; donc $2^{o\prime\prime}$ est une conséquence de $2^{o\prime}$.

**3. Les représentations d'un treillis distributif généralisé.** — Un treillis (propre) est un ensemble L fermé par rapport à deux opérations binaires $\frown$, $\smile$ tel que :

$$a \frown a = a, \qquad a \frown b = b \frown a, \qquad (a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c);$$
$$a \smile a = a, \qquad a \smile b = b \smile a, \qquad (a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c),$$

et $a \frown b = a$ si et seulement si $a \smile b = b$ (pour $a$, $b$, $c$ quelconque dans L).

Un treillis L est distributif s'il satisfait une des deux conditions suivantes équivalentes (donc aussi toutes les deux) :

$$1^o \quad a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c) \quad \text{pour tous } a, b, c \text{ de L};$$
$$2^o \quad a \smile (b \frown c) = (a \smile b) \frown (a \smile c) \quad \text{pour tous } a, b, c \text{ de L}.$$

Ce treillis peut être défini à partir d'un ordre partiel *strict*, c'est-à-dire une relation binaire $\prec$ entre certains couples d'éléments de L telle que

$$1^o \quad a \prec a, \qquad 2^o \quad a \prec b, \quad b \prec c \rightarrow a \prec c$$

et

$$3^o \quad a \prec b \text{ et } b \prec a \rightarrow a = b.$$

Si nous voulons considérer les relations d'ordre partiel générales (qui ne satisfont pas forcément 3°), il faut que nous remplacions la relation d'égalité ($=$) par une relation d'équivalence ($\sim$) (définie par $a \sim b \rightleftharpoons a \prec b$ et $b \prec a$). Donc nous définissons un treillis généralisé ou treillis distributif généralisé par les conditions ci-dessus avec le signe d'égalité ($=$) remplacé par un signe d'équivalence ($\sim$). Observons que les opérations $\frown$, $\smile$ cessent d'être univalentes, mais deviennent multivalentes, des valeurs de $(a \smile b)$ formant une classe d'éléments équivalents.

Le treillis généralisé est donc déterminé par un ensemble L, une relation d'équivalence $\sim$ et deux opérations binaires $\frown$, $\smile$ multivalentes, mais unique à une équivalence près, satisfaisant les conditions indiquées plus haut. Nous le dénotons par $(L; \sim, \frown, \smile)$.

Dans la famille $\mathcal{F}$ des treillis généralisés une transformation $\varphi$ de L dans L' est une transformation *distinguée* de $(L; \sim, \frown, \smile)$ dans $(L'; \sim', \frown', \smile')$ si $\varphi$

est un *homomorphisme* par rapport à $\sim$, $\frown$ et $\smile$; c'est-à-dire, pour tous $a$, $b$, $c$ de L,

$$a \sim b \Rightarrow \varphi(a) \sim' \varphi(b),$$
$$c \sim a \frown b \Rightarrow \varphi(c) \sim' \varphi(a) \frown' \varphi(b),$$
$$c \sim a \smile b \Rightarrow \varphi(c) \sim' \varphi(a) \smile' \varphi(b).$$

La transformation d'équivalence devient donc l'*isomorphisme*. Les axiomes A1, A2, A3 sont immédiatement vérifiés. Pour A4, si $\varphi$ est un homomorphisme de (L: $\sim$, $\frown$, $\smile$) dans (L'; $\sim'$, $\frown'$, $\smile'$) avec $\varphi(\mathrm{L}) = \bar{\mathrm{L}} \subset \mathrm{L}'$, alors définissons $\approx$, $\mathrel{\underline{\frown}}$, $\mathrel{\overline{\smile}}$ sur $\bar{\mathrm{L}}$ de la façon suivante :

Soient $\bar{a}$, $\bar{b}$, $c \in \bar{\mathrm{L}}$; [il existe $a$, $b$, $c \in \mathrm{L}$ tels que $\bar{a} = \varphi(a)$, $\bar{b} = \varphi(b)$, $\bar{c} = \varphi(c)$]; définissons

$$\bar{a} \approx \bar{b} \quad \rightleftharpoons \bar{a} \sim' \bar{b} \text{ dans } \mathrm{L}',$$
$$\bar{a} \approx (\bar{b} \mathrel{\underline{\frown}} \bar{c}) \rightleftharpoons \bar{a} \sim' (\bar{b} \frown' \bar{c}) \text{ dans } \mathrm{L}',$$
$$\bar{a} \approx (\bar{b} \mathrel{\overline{\smile}} \bar{c}) \rightleftharpoons \bar{a} \sim' (\bar{b} \smile' \bar{c}) \text{ dans } \mathrm{L}'.$$

Il est clair que $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\bar{\mathrm{L}}$. L'existence d'une somme $(e)$ et d'un produit $(d)$ pour $b$, $c$ de L entraînent que $\varphi(e)$ est une somme et $\varphi(d)$ un produit de $\bar{b}$, $\bar{c}$ dans $\bar{\mathrm{L}}$. La vérification des conditions basiques pour $\mathrel{\underline{\frown}}$, $\mathrel{\overline{\smile}}$ par rapport à $\approx$ est facile, et l'on voit que $\varphi$ est un homomorphisme de (L; $\sim$, $\frown$, $\smile$) sur ($\bar{\mathrm{L}}$; $\approx$ $\mathrel{\underline{\frown}}$, $\mathrel{\overline{\smile}}$) et l'identité un homomorphisme de ($\bar{\mathrm{L}}$; $\approx$, $\mathrel{\underline{\frown}}$, $\mathrel{\overline{\smile}}$) dans (L'; $\sim'$, $\frown'$, $\smile'$). De plus, ($\bar{\mathrm{L}}$; $\approx$, $\mathrel{\underline{\frown}}$, $\mathrel{\overline{\smile}}$) est en réalité une sous-structure de (L'; $\sim'$, $\frown'$, $\smile'$).

Pour vérifier l'axiome A5, si $\varphi$ est un homomorphisme de (L: $\sim$, $\frown$, $\smile$) dans (L'; $\sim'$, $\frown'$, $\smile'$) on définit (sur L) $\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$ par

$$a \sim_1 b \rightleftharpoons \varphi(a) \sim' \varphi(b) \text{ dans } \mathrm{L}',$$
$$a \sim_1 (b \frown_1 c) \rightleftharpoons \varphi(a) \sim' [\varphi(b) \sim' \varphi(c)] \text{ dans } \mathrm{L}',$$

et

$$a \sim_1 (b \smile_1 c) \rightleftharpoons \varphi(a) \sim' [\varphi(b) \smile' \varphi(c)] \text{ dans } \mathrm{L}'.$$

On vérifie qu'une somme $(b \smile c)$ ou produit $(b \frown c)$ reste aussi une somme ou produit de $b$, $c$ par rapport à la structure ($\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$) Les conditions basiques pour ($\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$) sont déduites des conditions correspondantes pour ($\sim'$, $\frown'$, $\smile'$) sur L'. Et finalement on voit que la structure ($\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$) pour L dépend seulement de la transformation $\varphi$ de L dans L' et de la structure de L'; $\varphi$ est de plus un homomorphisme de (L; $\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$) dans (L'; $\sim'$, $\frown'$, $\smile'$) et l'identité est un homomorphisme de (L; $\sim$, $\frown$, $\smile$) sur (L; $\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$). L'indépendance de la deuxième structure par rapport à la première montre que chaque structure sur L pour laquelle $\varphi$ est un homomorphisme dans (L'; $\sim'$, $\frown'$, $\smile'$) est $\prec$ la structure ($\sim_1$, $\frown_1$, $\smile_1$) sur L.

Le produit direct d'une famille quelconque de treillis généralisés existe et il est défini comme d'habitude pour les algèbres, en général. Donc la famille $\mathfrak{F}$

des treillis généralisés est non seulement héréditaire (d'après l'axiome A3 et l'axiome A4), mais aussi multiplicative.

La sous-famille D des treillis distributifs généralisés forment une sous-famille héréditaire et multiplicative (la vérification est presque immédiate). Parmi eux on trouve les ensembles totalement ordonnés (par une relation d'ordre total $\prec$, qui ne doit pas être stricte : c'est-à-dire $\prec$ est réflexive, transitive et, pour tous $a$, $b$ ou bien $a \prec b$ ou bien $b \prec a$). Cette famille O des ensembles totalement ordonnés est héréditaire.

Finalement, la sous-famille $\overline{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ formée par les treillis propres est telle que chaque treillis généralisé $\mathcal{E} = (\mathrm{L}; \sim, \frown, \smile)$ est réductible à un seul treillis propre $\overline{\mathcal{E}} = \left(\frac{\mathrm{L}}{\sim}, =, \frown, \smile\right)$ obtenu en définissant $(a) \smile (b)$ et $(a) \frown (b)$ comme les classes contenant les sommes $(a \smile b)$ et les produits $(a \frown b)$ respectivement.

Évidemment

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \rightarrow \overline{\mathcal{E}} \subseteq \overline{\mathcal{E}'} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_i\{\overline{\mathcal{E}}_i\} = \overline{\mathrm{P}_i\{\mathcal{E}_i\}},$$

c'est-à-dire $\mathcal{T}$ satisfait les conditions supplémentaires (H. S.); de plus, $\overline{\mathcal{E}} \in \mathrm{O}$ quand $\mathcal{E} \in \mathrm{O}$.

Donc, en prenant pour **M** la famille des treillis généralisés et pour H la famille O des ensembles totalement ordonnés dans le théorème principal, nous voyons que l'hypothèse du théorème et les hypothèses supplémentaires (H. S.) sont remplies. Donc la famille $\overline{\mathrm{H}}$ peut être caractérisée comme la famille de treillis généralisés satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 2°', 2°'' ou 3° (et aussi toutes les cinq).

La famille D des treillis distributifs généralisés étant héréditaire et multiplicative contient $\overline{\mathrm{H}}$. D'autre part, un treillis distributif généralisé $\mathcal{E}$ possède une réduction $\overline{\mathcal{E}}$ qui est un treillis distributif propre. Et $\overline{\mathcal{E}}$ est isomorphe à un sous-treillis d'une algèbre de Boole complète et atomique, d'après les résultats de MM. G. Birkhoff [1] et M. H. Stone [5], c'est-à-dire $\mathcal{E}$ est réductible à une sous-structure d'un produit direct de structures appartenant à H (car une algèbre de Boole, complète et atomique, est un produit direct des algèbres de Boole, de deux éléments). Donc chaque élément $\mathcal{E}$ de D satisfait la condition 2°'', donc $\mathrm{D} \subset \overline{\mathrm{H}}$ aussi.

Nous avons donc identifié $\overline{\mathrm{H}}$ avec la famille des treillis distributifs généralisés. Donc le théorème principal nous donne les représentations suivantes :

THÉORÈME 2. — *Parmi les treillis généralisés (et, en particulier, parmi les treillis propres) ceux qui sont distributifs sont caractérisés par chacune des trois conditions équivalentes suivantes* :

1° *le treillis est isomorphe à un sous-treillis d'un produit direct d'ensembles totalements ordonnés;*

2° *le treillis est réductible (ou faiblement équivalent) à un sous-treillis d'un produit direct d'ensembles totalement ordonnés stricts;*

3° *le treillis possède un ordre partiel qui est l'intersection des ordres totaux sur le même ensemble des éléments* (*).

**4. Les représentations d'un groupe généralisé.** — Un groupe multiplicatif G (non commutatif en général) est un groupe réticulé s'il y a une relation de congruence $\sim$ dans G et une opération binaire multivalente $\frown$ (définie uniquement à l'équivalence $\sim$ près) telles que :

$$a \frown a \sim a, \qquad a \frown b \sim b \frown a, \qquad a \frown (b \frown c) \sim (a \frown b) \frown c$$

et

$$a.(b \frown c) \sim (a.b) \frown (a.c), \qquad (b \frown c).a \sim (b.a) \frown (c.a)$$

pour tous $a, b, c$, de G (où la multiplication du groupe est dénotée par . ). Donc nous pouvons représenter un tel groupe réticulé comme une structure abstraite par $\mathcal{G} = (G, ., \sim, \frown)$. En effet, M. P. Lorenzon [4] a montré (Satz 2, 3, 4, 5) qu'une telle structure est bien un treillis distributif généralisé par rapport à $(., \sim, \frown)$, où $\smile$ est définie par $(a \smile b) \sim (a^{-1} \frown b^{-1})^{-1}$, dans lequel la multiplication du groupe distribue $\frown$ et $\smile$ des deux côtés.

Mais ici nous considérons les groupes réticulés *généralisés* dans lesquels la multiplication (.) du groupe est aussi multivalente, mais unique à l'équivalence $\sim$ près, ce qui vient à dire que $G/\sim$ est un groupe propre aussi bien qu'un treillis propre. Donc nous représentons une telle structure par $(G, \sim, ., \frown)$.

Pour la famille $\mathfrak{F}$ de ces groupes réticulés généralisés, nous prenons les homomorphismes par rapport à $(\sim, ., \frown)$, donc aussi par rapport à $(\sim, ., \frown, \smile)$, comme les transformations distinguées. Il s'ensuit qu'une transformation d'équivalence est un isomorphisme par rapport à $(\sim, ., \frown)$.

Les axiomes (A 1), (A 2), (A 3), sont vérifiés pour cette famille et ces transformations distinguées sans difficulté. De plus, quand $\varphi$ est un homomorphisme de $(G, \sim, ., \frown)$ dans $(G', \sim', .', \frown')$ avec $\varphi(G) = \overline{G} \subset G'$, on vérifie (A 4) en définissant sur $\overline{G}$ la structure $(\overline{\sim}, \overline{.}, \overline{\frown})$ où $\overline{\sim}, \overline{.}, \overline{\frown}$ sont les restrictions à $\overline{G}$ de $\sim', .', \frown'$ respectivement définis sur G'. Et de même on vérifie (A 5) en définissant $(\sim_1, ._1, \frown_1)$ sur G par

$$a \sim_1 b \rightleftharpoons \varphi(a) \sim' \varphi(b); \qquad a \sim_1 (b ._1 c) \rightleftharpoons \varphi(a) \sim' [\varphi(b) .' \varphi(c)];$$

et

$$a \sim_1 (b \frown_1 c) \rightleftharpoons \varphi(a) \sim' [\varphi(b) \frown' \varphi(c)].$$

Le produit direct d'une famille de groupes réticulés généralisés existe toujours et il est défini comme pour toutes les algèbres.

Parmi ces groupes réticulés généralisés, les groupes totalement ordonnés généralisés forment une sous-famille héréditaire H; l'ordre total ici n'est pas forcément strict, mais on vérifie que la multiplication est homogène par rapport à l'ordre total.

(*) Nous utilisons ici la possibilité de définir la structure, ou bien en termes de $(\sim, \smile, \frown)$, ou bien en termes de l'ordre partiel $(\prec)$.

De plus, la famille $\mathcal{F}$ contient la famille $\overline{\mathcal{F}}$ des groupes réticulés avec l'ordre partiel strict, et chaque $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ est réductible à un seul $\overline{\mathcal{G}}$ de $\overline{\mathcal{F}}$ ; et H contient $\overline{\mathcal{G}}$ avec $\mathcal{G}$. Les hypothèses supplémentaires (H. S.) sont vérifiées ici. Donc nous pouvons prendre la famille des groupes réticulés généralisés pour M et celle des groupes totalement ordonnés généralisés pour H dans le théorème principal (th. I).

Les groupes totalement ordonnés généralisés, sont *réguliers*, c'est-à-dire satisfont la condition

$$a \frown (x.a.x^{-1}) \sim 1 \Rightarrow a \sim 1,$$

quels que soient les éléments $a$, $x$ du groupe (la vérification est immédiate). D'autre part, M. P. Lorenzon a montré (*cf.* Satz 13) que chaque groupe réticulé qui est régulier est isomorphe [par rapport à $(\sim, ., \frown)$] à un sous-groupe ordonné d'un produit de groupes totalement ordonnés. En observant de plus que la réduction $\overline{\mathcal{G}}$ dans $\overline{\mathcal{F}}$ d'un groupe réticulé généralisé $\mathcal{G}$, est régulier quand $\mathcal{G}$ est régulier, il en suit que les groupes réticulés généralisés qui sont aussi réguliers satisfont la condition (2) du théorème 1 quand M et H sont choisis comme en haut. Mais cette famille des groupes réticulés généralisés et réguliers est évidemment une famille héréditaire et multiplicative contenant H; donc cette famille s'identifie avec la famille $\ddot{\mathrm{H}}$ du théorème I. D'où le

Théorème 3. — *Un groupe réticulé généralisé, $\mathcal{G}$, est régulier si, et seulement si, il satisfait l'une quelconque des trois conditions suivantes (équivalentes) :*

1° *$\mathcal{G}$ est isomorphe à un sous-groupe ordonné d'un produit direct des groupes totalement ordonnés généralisés ;*

2° *$\mathcal{G}$ est réductible à un sous-groupe ordonné direct des groupes totalement ordonnés avec l'ordre total strict ;*

3° *$\mathcal{G}$ possède un ordre partiel qui est l'intersection des ordres totaux compatibles avec sa structure.*

Dans la condition 3° nous utilisons la possibilité de définir la structure ou bien par $(\sim, ., \frown)$ ou bien par $(\sim, ., \prec)$; l'ordre partiel $\prec^*$ est compatible avec la structure donnée $(\sim, ., \prec)$ sur G si l'identité est un homomorphisme de $(G, \sim, ., \prec)$ sur $(G, \sim, ., \prec^*)$ (il correspond au « zulässigne Halbordnung » défini par M. P. Lorenzon).

5. **Les espaces complètement réguliers.** — Les espaces topologiques sont considérés maintenant comme les structures abstraites. $\mathcal{E} = (E; \mathcal{G})$ consiste alors en un ensemble E de points et une famille $\mathcal{G}$ de sous-ensembles de E assignés comme famille d'ensembles ouverts; on suppose les conditions usuelles pour $\mathcal{G}$ : o, E sont dans $\mathcal{G}$ et les réunions arbitraires et les intersections finies d'ensembles de $\mathcal{G}$ appartiennent aussi à $\mathcal{G}$. Une transformation distinguée est interprétée ici comme une transformation continue; donc l'équivalence s'identifie à l'homéomorphisme et la réductibilité à la contractibilité (en identifiant les points ayant

les fermetures égales). L'équivalence faible est la même que l'homéomorphisme faible définie ailleurs par l'auteur [3]. Les axiomes A1, A5 sont vérifiés sans difficulté.

La famille $\mathcal{F}$ des espaces topologiques est multiplicative, le produit direct étant le produit topologique. Et chaque espace topologique $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est contractible à un seul espace topologique vérifiant l'axiome de séparation suivant.

$T_0$ : si $x$, $y$ sont points distincts, il y a un ensemble ouvert contenant l'un des points, mais non les deux [3].

$\mathcal{E} \subseteqq \mathcal{E}'$ (où $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}'$) entraîne que $\overline{\mathcal{E}} \Subset \overline{\mathcal{E}'}$ et $P_i(\overline{\mathcal{E}_i}) = (\overline{P_i \mathcal{E}_i})$.

Dans $\mathcal{F}$ considérons la sous-famille des espaces pseudo-métrisables, c'est-à-dire avec la topologie définie à partir d'un pseudo-métrique $\delta[\delta(x, y)$ est un nombre réel positif défini pour chaque couple de point $x$, $y$ tel que $\delta(x, x) = 0$, $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ et $\delta(x, y) \leqq \delta(y, z) + \delta(z, x)]$ en prenant les sphères $U_\varepsilon(x)$, ($\varepsilon$ réel $\succ 0$) pour une base des ensembles ouverts. Cette famille H d'espaces pseudo-métrisables est la plus petite famille héréditaire contenant des espaces métrisables. Et la contraction d'un espace pseudo-métrisable $\mathcal{E}$ à un espace $\overline{\mathcal{E}}$ vérifiant $T_0$ nous donne un espace métrisable. Donc avec la famille des espaces topologiques pour ($\mathcal{F}$) et M, la famille des espaces pseudo-métrisables pour H, les hypothèses du théorème 1 et les hypothèses supplémentaires (H. S.) sont vérifiées.

Alors la famille H est contenue dans la famille héréditaire, multiplicative des espaces *complètement réguliers* (non forcément $T_0$), c'est-à-dire dans lequel pour chaque point $a$ et chaque ensemble ouvert G contenant $a$, on peut trouver une fonction $f(x)$ réelle et continue définie sur tout l'espace telle que

$$0 \leqq f(x) \leqq 1 \quad \text{pour chaque } x, \qquad f(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(y) = 1 \quad \text{pour chaque } y \notin G.$$

Chaque espace complètement régulier $\mathcal{E}$ de cette sorte peut être contracté à un (seul) espace complètement régulier $\overline{\mathcal{E}}$ et accessible; et un tel espace $\overline{\mathcal{E}}$, d'après le théorème de M. A. Tychonoff [6] (th. 2) est caractérisé par la condition qu'il est homéomorphe à un sous-espace d'un tore ou un produit direct des espaces chacun homéomorphe au segment fermé (0, 1) de nombres réels.

Cet espace (0, 1) étant métrisable, il s'ensuit que l'espace vérifiant la condition $2^{o''}$ du corollaire du théorème 1 sont les espaces complètement réguliers (non $T_0$). Donc nous avons le

THÉORÈME 4. — *Parmi les espaces topologiques, ceux qui sont complètement réguliers (ne vérifiant pas forcément l'axiome* $T_0$) *sont caractérisés par chacune des conditions équivalentes :*

1° *l'espace est homéomorphe à un sous-espace d'un produit topologique des espaces pseudo-métrisables;*

2° *l'espace est contractible (ou faiblement homéomorphe) à un sous-espace d'un produit topologique des espaces pseudo-métrisables;*

3° *l'espace possède une topologie qui est le produit des topologies sur le même ensemble de points définis par les pseudo-métriques.*

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] G. Birkhoff, *On Combination of subalgebral* (*Proc. Camb. Phis. Soc.*, vol. 29, 1933, p. 441-464).

[2] J. Dieudonné, *Sur les espaces uniformes complets* [*Ann. École Norm.*, (3), t. 56 1939, p. 277-291].

[3] V. S. Krishnan, *A weak homeomorphism between topological spaces...* (*Jour. Ind. Math. Soc.*, vol. 10, 1946, p. 39-56).

[4] P. Lorenzon, *Über halbgeordnete Gruppen* (*Math. Zeits.*, t. 52, 1949, p. 483-526).

[5] M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices...* (*Cas. Pest. Math. Fys.*, t. 67, 1937, p. 1-25).

[6] A. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, (*Math., Ann.* t. 102, 1930, p. 544-561).

[7] A. Weil, *Sur l'espace à structure uniforme...* (*Act. Sci. Ind.*, t. 551, 1938).


(Thèse soutenue le 3 avril 1951.)