CLAUDE CHABAUTY

Limite d'ensembles et géométrie des nombres

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 143-151
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__143_0>

LIMITE D'ENSEMBLES ET GÉOMÉTRIE DES NOMBRES;

PAR M. CLAUDE CHABAUTY.

Dans le paragraphe 1 de ce travail nous donnons une démonstration nouvelle d'un résultat de Malher [1] relatif aux réseaux de R^n. Dans le paragraphe 2 nous établissons des propriétés des sous-groupes discrets et réseaux d'un groupe topologique localement compact, dont certaines peuvent avoir de l'intérêt en elles-mêmes. Dans le paragraphe 3 nous utilisons ces propriétés pour généraliser le résultat de Mahler aux réseaux d'un groupe topologique localement compact.

1. Lemme de sélection de Mahler. — Malher a démontré un résultat fort utile en Géométrie des nombres, dont voici l'énoncé :

Soit (G_r) *une suite de réseaux* [2] *de* R^n *telle que, pour tout* r *:*

1° $\| x \| \geqq c$ *pour tout* $x \in \mathrm{G}_r$ *et* $\neq 0$, *c étant une constante* > 0 *indépendante de* r [3];
2° $m(\mathrm{G}_r) \leqq \mathrm{M}$, M *étant une constante* $< +\infty$ *indépendante de* r.

On peut extraire de la suite (G_r) *une suite partielle* $(\mathrm{G}_{r'})$ *qui converge vers un réseau* G *et l'on a*

$$m(\mathrm{G}) = \lim_{r' \succ +\infty} m(\mathrm{G}_{r'}).$$

Voici le principe de la démonstration de Mahler. D'après un théorème de Minkowski sur les jauges, la condition 1° entraîne que, pour tout r, $m(\mathrm{G}_r) \geqq 2^{-n} \operatorname{mes}\left(\underset{x}{\mathcal{E}}(\| x \| \leqq c)\right) = c^n$. D'autre part, d'après un résultat qui remonte à Hermite, il existe dans tout réseau H une base $a_1, \ldots, a_n$ telle que $\prod_{i=1}^{n} \| a_i \| \leqq \mathrm{C}m(\mathrm{H})$, C étant une constante ne dépendant que de la dimension n. Donc chaque G_r admet une base $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$ avec $c \leqq \| b_{ir} \| \leqq \mathrm{C}\mathrm{M}c^{-n+1}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut donc extraire de la suite (G_r) une suite $(\mathrm{G}_{r'})$ telle que $\lim_{r' \succ +\infty} b_{ir'} = b_i$ et l'on voit aisément que le groupe G engendré par $b_1, \ldots, b_n$ satisfait aux desiderata de l'énoncé.

---

[1] MAHLER, *Proc. Roy. Soc. London*, série A, t. 187, 1946, p. 151-187.

[2] Un réseau H de R^n est un sous-groupe discret de dimension linéaire n. On désigne par $m(\mathrm{H})$ la mesure d'un parallélotope fondamental de ce réseau.

[3] $\| x \|$ désigne le maximum de $| pj_1(x) |, \ldots, | pj_n(x) |$.

Quoique cette démonstration soit très simple, il nous semble intéressant d'en donner une autre, indépendante des inégalités de Minkowski et d'Hermite et reposant seulement sur la propriété caractéristique des réseaux d'être les sous-groupes discrets de R^n qui admettent un domaine fondamental de mesure finie. Une telle démonstration s'étend alors dans une certaine mesure aux sous-groupes d'un groupe localement compact, qui généralisent naturellement les réseaux de R^n.

Soit (F_r) une suite d'ensembles de R^n; nous dirons qu'elle converge vers l'ensemble F de R^n : $\lim\limits_{r \to +\infty} F_r = F$, si pour tout $t > 0$, tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $r \geqq r(t, \varepsilon)$, chaque point $x \in F$ tel que $\|x\| \leqq t$ est à distance $\leqq \varepsilon$ d'au moins un point de F_r, chaque point $y \in F_r$ tel que $\|y\| \leqq t$ est à distance $\leqq \varepsilon$ d'au moins un point de F.

Lemme. — *Soit* (G_r) $(r = 1, 2, \ldots)$ *une suite de sous-groupes discrets de* R^n *et* c *une constante* > 0 *telle que* $x \in G_r$, $\|x\| < c$ *entraîne* $x = 0$ *pour tout* r. *Alors on peut extraire de* (G_r) *une suite* $(G_{r'})$ *qui converge vers un sous-groupe discret* G *de* R^n *tel que* $x \in G$, $\|x\| < c$ *entraîne* $x = 0$.

En effet, pour tout r, $x \in G_r$, $y \in G_r$, $x \neq y$, entraîne $\|x - y\| \geqq c$. Donc le nombre des points de G_r satisfaisant à $\|x\| \leqq h$ est borné par une constante indépendante de r. Prenons $h = 1, 2, \ldots$. D'après le lemme de Bolzano-Weierstrass on peut extraire de (G_r) une suite partielle (G_{r1}) qui converge sur l'ensemble $\|x\| \leqq 1$, de (G_{r1}) une suite partielle (G_{r2}) qui converge sur $\|x\| \leqq 2$, etc. La suite *diagonale* $(G_{r'})$ des suites précédentes converge alors sur R^n vers un ensemble G. La continuité des fonctions $x + y$ et $x - y$ montre que G est un sous-groupe de R^n et la propriété : $x \in G$, $\|x\| < c$ *entraîne* $x = 0$ se démontre immédiatement par l'absurde, donc G est bien un sous-groupe discret.

Pour obtenir le lemme de Malher il suffit donc maintenant de démontrer que si les G_r sont des réseaux avec $m(G_r) \leqq M < +\infty$, G admet un domaine fondamental de mesure finie (alors G est bien un réseau) et que plus précisément cette mesure est égale à $\lim\limits_{r' \to +\infty} m(G_{r'})$. Soit q la dimension de G, $a_1, \ldots, a_q$ une base de G; adjoignons à ces vecteurs des vecteurs $a_{q+1}, \ldots, a_n$ de façon à avoir une base de l'espace. Soit

$$P = \underset{x}{\mathcal{E}}(x = t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n;\ 0 \leqq t_1 < 1,\ \ldots,\ 0 \leqq t_q < 1),$$

P est un domaine fondamental de G. Soit K un compact contenu dans l'intérieur de P; il existe une constante $l > 0$ telle que pour tout $x \in K$ et tout $y \in \complement P$, $\|x - y\| \geqq l$. Il en résulte que pour r' suffisamment grand les points de K sont tous incongrus $\operatorname{mod} G_{r'}$. En effet soit $x \in K$, $y \in K$, $x \neq y$. Posons $u = x - y$, $\|u\| \leqq d = \operatorname{diam}(K)$; si $u \in G_{r'}$, pour r' suffisamment grand il y a un point v de G tel que $v \neq 0$ et $\|v - u\| \leqq \frac{l}{2}$. Il en résulte que $x - v \in P$ et est congru à x mod G, d'où une contradiction. En conséquence $m(G_{r'}) \geqq \operatorname{mes}(K)$ pour r' assez grand. On en déduit que mes(P) est fini, i. e. que G est nécessairement un *réseau*, sinon on pourrait prendre K de mesure arbitrairement grande et l'on aurait une contradiction avec la condition 2°. En outre on voit que $m(G) \leqq \liminf_{r' \to +\infty} m(G_{r'})$.

Reste à montrer qu'on a plus précisément $m(G) = \lim_{r' \to +\infty} m(G_{r'})$. G étant un réseau, soit $a_1, \ldots, a_n$ une base de ce réseau. Soit

$$S = \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(x = t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n;\ -\frac{1}{2} < t_1 < \frac{3}{2}, \ \ldots, \ -\frac{1}{2} < t_n < \frac{3}{2}\right).$$

Pour r' assez grand $G_{r'}$ a dans S exactement 2^n points, et ils sont arbitrairement voisins des points $\Sigma\theta_i a_i$, $\theta_i = 0$ ou 1. En particulier il y a parmi ces points l'origine et n points $a_{1r'}, \ldots, a_{nr'}$ arbitrairement voisins de $a_1, \ldots, a_n$, donc linéairement indépendants. Soit

$$P_{r'} = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x = t_1 a_{1r'} + \ldots + t_n a_{nr'};\ 0 \leqq t_1 < 1, \ \ldots, \ 0 \leqq t_n < 1)$$

l'adhérence $\overline{P}_{r'}$ de $P_{r'}$ ne contient donc que les points $\Sigma\theta_i a_{ir'}$, $\theta_i = 0$ ou 1, donc les $a_{1r'}, \ldots, a_{nr'}$ constituent une base de $G_{r'}$ et l'on a bien $\lim_{r' \to +\infty} m(G_{r'}) = m(G)$. Le lemme de Mahler est donc complètement démontré.

2. Sous-groupes discrets et réseaux d'un groupe localement compact. — Soit T un groupe topologique *localement compact*, *dénombrable à l'infini*, *unimodulaire* (4). Si G est un sous-groupe discret de T il existe sur l'espace homogène T/G des classes à gauche $x.G (x \in T)$ une mesure invariante par T, canoniquement définie. Nous poserons $m(G) = \text{mes}\, T/G$, $m(G)$ est un nombre toujours > 0, s'il est $< +\infty$ nous dirons que le sous-groupe discret G est un *réseau* (5). Appelons *irréductible* par rapport à G toute partie A de T telle que $x \in A$, $y \in A$, $x^{-1}y \in G$ entraîne $x = y$, ou, ce qui revient au même, telle que les ensembles $A.g$, quand g parcourt G, soient disjoints. Si un ensemble A mesurable est irréductible on a $\text{mes}(A) = \text{mes}(\varphi(A)) \leqq m(G)$, φ désignant l'application canonique de T sur T/G (6).

---

(4) Pour les propriétés des groupes topologiques et de la mesure de Haar, *cf.* la monographie de A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques.* Rappelons que *unimodulaire* signifie que le groupe a une mesure de Haar bi-invariante et que *dénombrable à l'infini* signifie qu'on peut trouver une famille dénombrable de compacts le recouvrant. Signalons que, outre les notations de Bourbaki et de Weil, nous employons ici : $\tilde{A}$ pour frontière de A, A — B pour $A \cap \complement B$.

(5) On montre aisément que l'existence d'un réseau dans un groupe topologique localement compact implique que le groupe est unimodulaire.

(6) Soit donc $A \subset T$, avec $\text{mes}\, A > m(G)$, A ne peut être irréductible donc l'ensemble

$$B = \mathop{\mathcal{E}}_{z}(z = x - y, \ x \in A, \ y \in A)$$

contient un point de G différent de e.

Le théorème de Minkowski sur les jauges de R^n a donc pour généralisation : soit f une fonction à valeurs réelles $\geqq 0$, symétrique $(f(x^{-1}) = f(x))$, convexe $(f(x.y) \leqq f(x) + f(y))$, et

$$J_\lambda = \text{mes}\left(\mathop{\mathcal{E}}_{x}(f(x) \leqq \lambda)\right),$$

il y a au moins un point du réseau G différent de e, tel que $f(x) \leqq \mu$, dès que $J_{\mu/2} > m(G)$. Si l'on

Pour tout sous-groupe discret G on peut trouver un voisinage W de l'élément neutre qui est irréductible : il suffit de prendre un voisinage V de e tel que $V \cap G = \{e\}$ et un voisinage W symétrique et tel que $W.W \subset V$. Alors les $W.g$ étant disjoints et T dénombrable à l'infini, il en résulte que G est dénombrable. Nous supposerons en outre que T satisfait à l'*axiome* (M) suivant :

(M) *Il existe un système fondamental de voisinages ouverts de l'élément neutre, soit* $\mathcal{V}$, *tel que pour tout* $V \in \mathcal{V}$ *sa frontière* $\tilde{V}$ *a une mesure nulle.*

Étant donné un sous-groupe discret G de T, soit V_0 un voisinage symétrique de e, tel que V_0 soit compact et irréductible par rapport à G. Appelons *ensemble élémentaire* dans T tout ouvert dont la frontière a une mesure nulle et qui est petit d'ordre V_0, donc relativement compact et irréductible. Par hypothèse il existe des ensembles élémentaires aussi petits qu'on veut. Appelons *figure élémentaire* tout ensemble irréductible qui est réunion finie d'ensembles élémentaires disjoints. Appelons *ensemble simple* tout ensemble A contenant une réunion d'un nombre fini d'ensembles élémentaires disjoints, cette réunion ayant même mesure que A. La réunion, l'intersection, la différence de deux ensembles simples est simple.

Lemme 1. — *Tout ensemble simple* A *contient une figure élémentaire* C *telle que* $\operatorname{mes}(C) = \operatorname{mes}(\varphi(A))$.

En effet soient $E_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ des ensembles élémentaires disjoints contenus dans A et tels que $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \operatorname{mes}(A)$. Formons $F_i = E_i - \bigcup_{h=1}^{i-1} \overline{E}_h.G$; E_i ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $\overline{E}_h.g$, g parcourant G, donc F_i est un ensemble élémentaire. Par construction $C = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est une figure élémentaire qui répond aux desiderata

Lemme 2. — *Soit* G *un sous-groupe discret de* T. *Il existe dans* T *un ouvert* A, *irréductible par rapport à* G *et tel que* $\operatorname{mes}(T - A.G) = 0$ [*donc* $\operatorname{mes}(\tilde{A}) = 0$, $\operatorname{mes}(A) = m(G)$]. *En outre* $\overline{A}.G = T$ *et tout compact de* T *ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles* $\overline{A}.g$, $g \in G$.

T est par hypothèse réunion dénombrable de compacts. On peut donc former une suite de compacts (K_r) avec $K_{r+1} \supset K_r$ tels que $T = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$. A un compact K_r

---

sait que $J_\lambda \geq c\lambda^n$, n et c étant des constantes positives indépendantes de λ, il y a au moins un point de G différent de e tel que $f(x) \leq \left(\frac{\operatorname{mes}(G)}{cJ_1}\right)^{1/n}$. *Cf.* Siegel, *Ann. of Math.*, t. 46, 1945, p. 708-718, il a donné des cas importants de groupes non commutatifs pour lesquels la mesure de la sphère géodésique de rayon λ, relative à une métrique riemmanienne invariante, est bien $> c\lambda^n$ (n dimension du quotient par un sous-groupe compact maximal).

on peut associer un ensemble C_r réunion d'un nombre fini d'ensembles élémentaires recouvrant K_r. C_r est relativement compact; on peut donc, en supprimant des indices et numérotant à nouveau, supposer $C_r \subset K_{r+1}$. Posons $B_1 = C_1$, $B_r = C_r - C_{r-1}$. Les C, donc les B, sont des ensembles simples de T. Soit A_r la figure élémentaire contenue dans B_r et telle que $\text{mes}(A_r) = \text{mes}(\varphi(B_r))$ et soit $A = \bigcup A_r$. A est par construction un ouvert irréductible;

$$\text{mes}[(T - A.G) \cap K_r] = 0$$

pour tout r, donc $\text{mes}(T - A.G) = 0$. En particulier $\text{mes}(\tilde{A}) = 0$, $\text{mes}(A) = m(G)$ et $\overline{A.G} = T$. Soit $A = \bigcup_{j \in J} E_j$ la décomposition de A en ensembles élémentaires disjoints. Tout compact H étant contenu dans un compact K_r ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $\bar{E}_j.g$, $j \in J$, $g \in G$, *a fortiori* qu'un nombre fini d'ensembles $\bar{A}.g$, $g \in G$. Donc de $\overline{A.G} = T$ résulte que tout $x \in T$ est adhérent à au moins un ensemble $A.g$, $g \in G$, puisqu'un voisinage compact de x ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $A.g$, et par conséquent on a bien $\bar{A}.G = T$.

Remarque. — En retranchant à $\bar{A}$ un ensemble convenable contenu dans $\tilde{A}$ on obtient un ensemble *fondamental* de G (c'est-à-dire un ensemble contenant un et un seul représentant de chaque classe de T par rapport à G) qui a, entre autres la propriété d'être *normal* au sens de Siegel ([7]).

Étant donné un ensemble mesurable S de T (de mesure finie ou infinie) on peut trouver des compacts K_r ($r = 1, 2, \ldots$) contenus dans S, avec $K_{r+1} \supset K_r$ et $\text{mes}\left(S - \bigcup_r K_r\right) = 0$. En utilisant de tels compacts pour un ensemble ouvert on démontrera de même grâce au lemme 1 le

LEMME 3. — *Soit* G *un sous-groupe discret de* T, φ *l'application canonique de* T *sur* T/G, S *un ouvert de* T. *On peut trouver dans* S *un ouvert irréductible* A *tel que* $\text{mes}(\varphi(S - A)) = 0$.

COROLLAIRE. — *Si* S *est un ouvert tel que* $S.G = T$ *on peut trouver dans* S *un ouvert irréductible* A *tel que* $\text{mes}(T - A.G) = 0$ [*donc* $\text{mes}(\tilde{A}) = 0$, $\text{mes}(A) = m(G)$].

3. Limite de réseaux. — Nous définirons la limite d'une suite (F_r) d'ensembles de T : $\lim F_r = F$, par la condition : quels que soient le compact K et le voisinage V de l'élément neutre e de T, pour r suffisamment grand on peut associer à chaque $x \in F_r \cap K$ un $y \in F$ tel que $y^{-1}x \in V$ et à chaque $y \in F \cap K$ un $x \in F_r$ tel que $y^{-1}x \in V$.

([7]) SIEGEL. *Ann. of Math.*, t. 44, 1943, p. 674-689.

LEMME 4. — *Soit* (G_r) $(r = 1, 2, \ldots)$ *une suite de sous-groupes discrets de* T. *Supposons qu'il existe un voisinage ouvert* V *de l'élément neutre e de* T *tel que* $V \cap G_r = \{e\}$ *pour tout r. Alors on peut extraire de* (G_r) *une suite partielle* $(G_{r'})$ *qui converge vers un sous-groupe discret* G *tel que* $V \cap G = \{e\}$.

T étant dénombrable à l'infini il suffit de considérer les intersections des G_r avec une suite dénombrable de compacts emboîtés $K_h (h = 1, 2, \ldots)$, avec $\bigcup_h K_h = T$. On démontre comme dans R^n qu'on peut extraire de (G_r) une suite partielle qui converge vers un ensemble G et que G est automatiquement un sous-groupe tel que $V \cap G = \{e\}$, donc un sous-groupe discret.

Soit maintenant U un ouvert irréductible par rapport à G et K un compact contenu dans U. Il existe un voisinage W de e tel que K.W soit contenu dans U et l'on peut supposer W symétrique et contenu dans V. Prenons r' suffisamment grand pour qu'à tout $x \in G_{r'}$ corresponde un $y \in G$ avec $y^{-1}x \in W$. Soient x_1, x_2 deux points de K tels que $x = x_2^{-1} x_1 \in G_{r'}$ alors $y^{-1} x_2^{-1} x_1 \in W$ i. e. $x_2 y \in x_1 W \subset KW \subset U$. x_2 et $x_2 y$ étant dans U irréductible par rapport à G et y appartenant à G, on a $y = e$ et par conséquent $x = x_2^{-1} x_1 \in W_{r'}$ donc $x = e$, $x_1 = x_2$. K *est donc irréductible par rapport à* $G_{r'}$ *pour* r' *assez grand.* Or, en vertu du lemme 2, mes(U) peut être pris égal à $m(G)$ fini ou infini et mes(K) peut être pris *arbitrairement voisin* de $m(G)$; on a donc

$$m(G) \leqq \liminf_{r' \to +\infty} m(G_{r'}).$$

En particulier si les G_r sont des réseaux avec $m(G_r) \leqq M < +\infty$ pour tout r on voit que $m(G)$ est fini, i. e. que G est un réseau. On a donc démontré la généralisation suivante du résultat de Mahler.

THÉORÈME 1. — *Soit* T *un groupe localement compact dénombrable à l'infini unimodulaire et satisfaisant à l'axiome* (M) *et* (G_r) *une suite de réseaux de* T; *supposons que :*

1° *il existe un voisinage ouvert* V *de l'élément neutre e de* T *tel que* $G_r \cap V = \{e\}$ *pour tout r;*

2° *il existe une constante* $M < +\infty$ *telle que pour tout* $r : m(G_r) \leqq M$. *Alors on peut extraire de* (G_r) *une suite* $(G_{r'})$ *qui converge vers un réseau* G *et l'on a*

$$G \cap V = \{e\}, \qquad m(G) \leqq \liminf_{r' \to +\infty} m(G_{r'}).$$

Nous allons maintenant donner une condition suffisante pour que l'on ait $m(G) = \lim m(G_{r'})$, qui est précisément remplie quand $T = R^n$ (mais dans ce cas nous avions un procédé direct plus rapide pour démontrer l'égalité) :

LEMME 5. — *Soit* (G_r) *une suite de réseaux de* T *qui converge vers un réseau* G *et* φ_r (resp. φ) *l'application canonique de* T *sur* T/G_r (resp. *sur* T/G).

Supposons qu'il existe un ouvert S *de mesure finie et tel que* $\mathrm{mes}(\varphi_r(\mathrm{S})) = m(\mathrm{G}_r)$ *pour tout* r. *Alors on a aussi* $\mathrm{mes}(\varphi(\mathrm{S}) = m(\mathrm{G})$.

Soit V_0 un voisinage symétrique de e irréductible par rapport à tous les G_r. Supposons $\mathrm{mes}(\varphi(\mathrm{S})) < m(\mathrm{G})$. On peut donc trouver un compact P de mesure > 0 contenu dans $\mathrm{T} - \mathrm{S}.\mathrm{G}$ et qu'on peut supposer petit d'ordre V_0 donc irréductible par rapport aux G_r. Posons $\mathrm{P}_r = \mathrm{A}_r \cap \mathrm{P}.\mathrm{G}_r$, A_r étant un ouvert irréductible par rapport à (G_r) de mesure égale à $m(\mathrm{G}_r)$ et contenu dans l'ouvert S, *cf.* lemme 3. On a $\mathrm{mes}(\mathrm{P}_r) = \mathrm{mes}(\mathrm{P}) > 0$. Les P_r étant tous contenus dans l'ensemble S de mesure finie il y a une sous-suite $(\mathrm{P}_{r'})$ telle que l'intersection P' des $\mathrm{P}_{r'}$ ait une mesure > 0 en particulier ne soit pas vide. Soit $p' \in \mathrm{P}'$; il y a un $g_{r'} \in \mathrm{G}_{r'}$ tel que $p_{r'} = p'.g_{r'} \in \mathrm{P}$. P étant compact on peut trouver une sous-suite $(p_{r''})$ qui converge vers $p \in \mathrm{P}$. Alors $g_{r''}$ converge vers un élément g de G et l'on a $p = p'.g \in \mathrm{S}$, contrairement à la définition de P. Le lemme est démontré.

Lemme 6. — *Étant donné un ensemble* A *de* T *de mesure intérieure* > 0 *on peut lui associer un voisinage* V *de* e *tel que* $x \in \mathrm{V}$ *entraîne* $\mathrm{mes}(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}.x) > 0$.

On peut se ramener au cas A compact. Si x est dans un voisinage V de e, $\mathrm{A} \cap \mathrm{A}.x$ est contenu dans A.V qui, pour V convenable, a une mesure arbitrairement voisine de celle de A. Supposons V tel que $\mathrm{mes}(\mathrm{A}.\mathrm{V}) < 2\,\mathrm{mes}(\mathrm{A})$ alors $\mathrm{mes}(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}.x)$ est > 0.

Lemme 7. — *Avec les hypothèses du lemme* 5, *on a*

$$m(\mathrm{G}) = \lim_{r \to +\infty} m(\mathrm{G}_r).$$

D'après ce qui précède on peut trouver dans S un ouvert A (resp. pour chaque r, un ouvert A_r) irréductible par rapport à G (resp. par rapport à G_r) et de mesure égale à $m(\mathrm{G})$ [resp. $m(\mathrm{G}_r)$]. Soit $\mathrm{L}_r = \mathrm{A}_r \cap (\mathrm{A}.\mathrm{G}_r)$ et $\mathrm{M}_r = \mathrm{A}_r - \mathrm{L}_r$. On a

$$\mathrm{mes}(\mathrm{A}_r) = \mathrm{mes}(\mathrm{L}_r) + \mathrm{mes}(\mathrm{M}_r) \leqq \mathrm{mes}(\mathrm{A}) + \mathrm{mes}(\mathrm{M}_r).$$

Supposons que $\mathrm{mes}(\mathrm{M}_r)$ ne tende pas vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Alors il existe $c > 0$ et une sous-suite $(\mathrm{M}_{r'})$ tels que $\mathrm{mes}(\mathrm{M}_{r'}) \geqq c$ quel que soit r'. Les $\mathrm{M}_{r'}$ étant contenus dans un ensemble S de mesure finie on peut trouver une sous-suite $(\mathrm{M}_{r''})$ de $(\mathrm{M}_{r'})$ telle que l'intersection M des $\mathrm{M}_{r''}$ soit un ensemble de mesure $\geqq c$. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{A} \cap \mathrm{M}.\mathrm{G}$, c'est un ensemble de mesure > 0. On peut donc trouver un ensemble U de mesure > 0 contenu dans P et un $g \in \mathrm{G}$ tels que $\mathrm{U}.g \subset \mathrm{M}$. Prenons dans chaque $\mathrm{G}_{r''}$ un élément $g_{r''}$ de façon que $\lim g_{r''} = g$. Alors pour r'' suffisamment grand $\mathrm{U}.g \cap \mathrm{U}.g_{r''}$ a une mesure > 0. Soit m un point de cette intersection et $p = m.g_{r''}^{-1}$. On a donc $p \in \mathrm{A}$, $m \in \mathrm{M}$, congrus par rapport à $\mathrm{G}_{r''}$, c'est impossible. On a donc démontré que $\mathrm{mes}(\mathrm{M}_r)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Le lemme est démontré.

On peut donc énoncer :

Théorème 2. — *Avec les conditions du théorème 1, si l'on suppose en outre qu'il existe dans* T *un ouvert* S *de mesure finie tel que* $S.G_{r'} = T$ *pour tout* r *on a*

$$m(G) = \lim_{r' \to +\infty} m(G_{r'}).$$

Soit $\mathfrak{A}$ le groupe de tous les automorphismes continus de T, G_0 un réseau de T, $\mathfrak{M}$ le sous-groupe des éléments σ de $\mathfrak{A}$ tels que $\sigma(G_0) = G_0$. Soit $G_n = \sigma_n(G_0)$, $\sigma_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Si les σ_n convergent uniformément sur tout compact vers $\sigma \in \mathfrak{A}$ alors on a $\lim G_n = G$ au sens utilisé tout à l'heure. En sens inverse si cette relation a lieu pour des $G_n = \sigma_n(G_0)$ a-t-on $\lim \sigma_n = \sigma \pmod{\mathfrak{M}}$? On voit aisément qu'il en est ainsi si $T = R^n$: alors tous les réseaux se déduisent de Z^n (réseau des points à coordonnées entières) par des transformations linéaires de déterminant $\neq 0$, $\mathfrak{A}$ est le groupe linéaire à n variables, $\mathfrak{M}$ le groupe des transformations linéaires à n variables à coefficients entiers de déterminant ± 1. Autrement dit la limite que nous avons utilisée est équivalente à la limite dans l'espace des réseaux identifié avec l'espace homogène quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$. Il serait intéressant de trouver des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi sur des familles de réseaux dans d'autres groupes. Quand la coïncidence a lieu $\lim G_r = G$ implique évidemment $\lim m(G_r) = m(G)$, car pour $\sigma \in \mathfrak{A}$ $\text{mes}(\sigma(A)) = \delta(\sigma)\,\text{mes}(A)$, $\delta(\sigma)$ étant une représentation *continue* ([8]) de $\mathfrak{A}$ dans le groupe multiplicatif des nombres > 0, qui est égale à 1 sur $\mathfrak{M}$.

Considérons par exemple un groupe T métrisé par une distance invariante (à gauche) $d(x, y)$ et posons $|x| = d(e, x)$ de sorte que

$$d(x, y) = |x^{-1}y| = |y^{-1}x|.$$

A chaque réseau G on peut associer le *domaine rayonné* d'origine e :

$$F = F(G) = \mathop{\mathcal{E}}_{x \in T}(\,|x| < 2\,|y^{-1}x| \text{ pour tout } y \in G \text{ et } \neq e),$$

on a évidemment $F.G = T$.

Supposons que dans T tout domaine borné $|x| \leq$ const. soit compact et que tout domaine rayonné D d'origine e, contenant un voisinage V de e et un point donné x, satisfasse à $\text{mes}(D) \geq f_V(|x|)$, $f_V(t)$ étant quel que soit le choix de V une fonction croissant indéfiniment avec t. Alors pour tout réseau F est compact, Il en résulte aisément que tout réseau admet un nombre fini de générateurs si nous supposons en outre T connexe ([9]). Les réseaux G tels que $G \cap V = \{e\}$, V étant un voisinage fixe de e, et que $m(G) \leq M < +\infty$ sont tels que les F(G) soient contenus dans un même ensemble $|x| < C$, C étant une constante suffisamment grande. Les résultats que nous avons démontrés nous prouvent que de toute suite (G_r) de tels réseaux on peut extraire une suite $(G_{r'})$ convergente vers

---

([8]) Braconnier, *Journ. de Math.*, série 9, t. 27, 1948, p. 75.

([9]) Siegel, *loc. cit.*, et Weil, *Sum. Bras. Math.*, t. 1, 1946, p. 33.

un réseau G et $m(G) = \lim\limits_{r' \to +\infty} m(G_{r'})$. Soient $g_1, \ldots, g_k$ les éléments de G, en nombre nécessairement fini, tels que les ensembles $g_i.F$ rencontrent F. Les g_i constituent un système de générateurs de G. Pour r' suffisamment grand, dans un voisinage d'ordre V des g_i il y a un et un seul point $g_{ir'}$ de $G_{r'}$ et dans un voisinage d'ordre V de F il n'y a pas d'autre point de $G_{r'}$ que e. Il en résulte que les $g_{ir'}$ forment un système de générateurs de $G_{r'}$. En effet soit $G'_{r'}$ le sous-groupe de $G_{r'}$ engendré par $g_{1r'}, \ldots, g_{kr'}$. Soit $[G'_{r'}:G_{r'}]$ l'indice de $G'_{r'}$ par rapport à $G_{r'}$; on a évidemment $[G'_{r'}:G_{r'}] = \dfrac{m(G'_{r'})}{m(G_{r'})}$.

Mais $m(G_{r'})$ tend vers $m(G)$ et par construction $G'_{r'}$ tend vers G de sorte que $\liminf\limits_{r' \to +\infty} m(G'_{r'}) \geqq m(G)$ de sorte que pour r' assez grand $[G'_{r'}:G_{r'}] = 1$ et $G'_{r'}$ est identique à $G_{r'}$.

Supposons les G_r de la forme $G_r = \sigma_r(G_0)$ $\sigma_r \in \mathfrak{A}$. Si G_0 est de nature assez simple pour que l'on soit assuré de pouvoir choisir les σ_r (qui sont définis à la multiplication près par un élément de $\mathfrak{M}$) de façon que $\sigma_r^{-1}.\sigma_{r+1}(g_{i,r}) = g_{i,r+1}$ alors $\sigma_r(x)$ tendra vers une limite pour tout $x \in G_0$. Il faudrait encore des hypothèses supplémentaires sur G_0 ou sur T pour pouvoir affirmer que $\sigma_r(x)$ converge sur tout compact et par conséquent a une limite dans $\mathfrak{A}$, et conclure que G est de la forme σG_0 et que la suite $(G_{r'})$ converge vers G au sens de la topologie de $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$, comme il arrive dans le cas particulier $T = R^n$.

(Manuscrit reçu le 24 janvier 1950.)