BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

Sur certaines correspondances ponctuelles, et sur un mode de représentation des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 129-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__129_0>

SUR CERTAINES CORRESPONDANCES PONCTUELLES, ET SUR UN MODE DE REPRÉSENTATION DES SURFACES;

PAR M. PAUL VINCENSINI.

1. Introduction. — Soit S une hypersurface de l'espace euclidien E_n à n dimensions. Supposons la position d'un point quelconque M de S définie par la donnée de $n-1$ paramètres $u_i (i=1, 2, \ldots, n-1)$, et attachons à tout point M de S un repère orthogonal unitaire $R\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right]$, les vecteurs $\vec{e}_i (i=1, 2, \ldots, n-1)$ étant dans l'hyperplan tangent en M et $\vec{e}_n$ étant normal à l'hypersurface. S est définie par les composantes ω^i, $\omega^n=0$, $\omega_{ij}=-\omega_{ji}$, $\omega_{in}=-\omega_{ni}$ du déplacement infinitésimal du repère. Les ω sont des formes de Pfaff par rapport aux différentielles des u_i vérifiant les équations de structure de É. Cartan

$$d\omega^i = [\omega^k\,\omega_{ki}], \qquad d\omega^n = [\omega^k\,\omega_{kn}] = 0,$$
$$d\omega_{ij} = [\omega_{ik}\,\omega_{kj}], \qquad d\omega_{ni} = [\omega_{nk}\,\omega_{ki}].$$

Dans la suite l'indice n sera toujours écrit explicitement; $i, j, \ldots$ représenteront l'un quelconque des indices $1, 2, \ldots, n-1$.

En ce qui concerne les formes ω, nous rappellerons que les ω^i ne changent pas si l'on déforme S (en la supposant déformable) le repère R étant entraîné dans la déformation, et qu'il en est de même pour les ω_{ij}. Les ω_{in} varient, et, pour une configuration quelconque de S, l'équation

$$\omega^i\,\omega_{in} = 0$$

définit en chaque point M de S le cône des directions asymptotiques issues de M, situé dans l'hyperplan tangent en M et que nous dirons cône asymptotique.

Cela étant, S étant donnée, attachons *invariablement* mais arbitrairement, d'après une loi continue, à l'hyperplan tangent en M, un point P de coordonnées relatives

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \qquad x^n = x^n(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}),$$

le mot *invariablement* signifiant que, si S vient à se déformer en entraînant R, P occupe toujours la même position par rapport au repère R attaché au point M, et conserve par suite les mêmes coordonnées relatives x^i, x^n.

Nous pouvons dire aussi que nous associons arbitrairement à S une hypersurface déterminée Σ, et que nous établissons une correspondance ponctuelle entre S et Σ associant, à chaque point M de S, un point déterminé P de Σ, et cela d'après une loi continue arbitraire.

Cherchons, dans ces conditions, les déplacements que l'on doit donner à M sur S pour que les déplacements correspondants de P leur soient orthogonaux. Le déplacement absolu de M a pour composantes relatives

$$\omega^i, \qquad \omega^n = 0;$$

celui de P a pour composantes

$$\mathrm{D}x^i = dx^i + \omega^i + x^j\omega_{ji} + x^n\omega_{ni}, \qquad \mathrm{D}x^n = dx^n + x^j\omega_{jn},$$

et l'orthogonalité se traduit par l'équation

$$\omega^i \mathrm{D}x^i = 0,$$

soit

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n-1}(\omega^i)^2 + \omega^i dx^i - x^j\omega^i\omega_{ij} - x^n\omega^i\omega_{in} = 0.$$

(1) représente un cône quadratique (Q_M) à $n-2$ dimensions de l'hyperplan tangent en M à S, et, une fois l'association [M, P] fixée, à chaque point M de S est attaché un cône (Q_M).

Si S est une surface de E_3, le cône (Q_M) se réduit à un système de deux droites; les différents couples de droites relatifs aux différents points M de S sont distribués suivant les tangentes aux deux familles de courbes d'un réseau ($\mathcal{R}$) de S, et à chaque association [M, P] correspond un tel réseau.

Dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1), j'ai indiqué quelques propriétés des champs de cônes (Q_M), ou des réseaux ($\mathcal{R}$), déduits de la considération d'une hypersurface S et d'une loi d'association [M, P]. Je me propose d'étudier ici la distribution des cônes du champ [Q_M] ou des tangentes aux courbes du réseau ($\mathcal{R}$) relatifs à une association [M, P] donnée, et les circonstances qui se présentent lorsque S étant donnée on fait varier la loi d'association [M, P], ou encore lorsque la loi d'association étant donnée on déforme S.

Indépendamment des résultats nouveaux auxquels nous serons conduits, nous pourrons ainsi, en particulier, compléter sur divers points certaines questions classiques (déformation des surfaces et problèmes connexes, congruences de sphères, roulement des surfaces applicables, réseaux cinématiquement autoconjugués, etc.), et présenter sous des aspects nouveaux certaines notions importantes se rattachant à la théorie de la courbure des surfaces.

2. Étude de l'équation (1). Lois diverses d'association [M, P] laissant le champ de cônes [Q_M] invariant. — Le cône (Q_M) d'équation (1) appartient au faisceau des deux cônes quadratiques suivants :

1° le cône asymptotique de S en M d'équation

$$(2)\qquad \omega^i\omega_{in} = 0;$$

(1) *Sur certains cônes quadratiques issus des points d'une hypersurface de l'espace euclidien à n dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1069-1071.

2° le cône d'équation

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n-1}(\omega^i)^2+\omega^i dx^i-x^j\omega^i\omega_{ij}=0,$$

qui, si l'on se rappelle ce qu'on a dit au sujet de l'invariance des formes ω^i, ω_{ij} par déformation de S, conserve sa forme et sa position dans l'hyperplan tangent à S, lorsqu'on soumet S à toutes les déformations dont elle est susceptible, la loi d'association [M, P] restant inchangée.

Ce dernier cône est d'ailleurs celui que l'on obtiendrait en substituant à P sa projection orthogonale sur l'hyperplan tangent en M ($x^n=0$). Nous l'appellerons le *cône invariant*, relatif à l'association [M, P]. Comme la loi [M, P] que nous considérons est arbitraire, les points p, projections des différents points P sur les hyperplans tangents à S aux points M correspondants, sont distribués dans ces hyperplans tangents suivant une loi continue arbitraire, et l'on peut énoncer ce résultat :

Dans l'hyperplan tangent à une hypersurface quelconque S en l'un quelconque M de ses points choisissons un point p, le choix étant fait suivant une loi continue arbitraire. Les directions des déplacements des différents points M sur S orthogonales aux directions des déplacements des points p correspondants forment un cône quadratique à $n-2$ dimensions de l'hyperplan tangent en M. On a ainsi ∞^{n-1} cônes quadratiques ayant pour sommets les différents points M de S, et *tous ces cônes restent invariablement liés aux hyperplans tangents correspondants lorsque* S *subit toutes les déformations dont elle est susceptible, les points p étant supposés invariablement liés aux hyperplans tangents correspondants et entraînés dans chacune de ces déformations.*

Les cônes asymptotiques de S sont les cônes (1) que l'on obtiendrait en supposant $x^n=\infty$, c'est-à-dire en supposant que P soit le point où la normale en chaque point M de S coupe l'hyperplan ∞. De là on déduit que, dans la correspondance entre un point quelconque de S et la trace de la normale en ce point sur l'hyperplan ∞, les courbes de S correspondant à leurs homologues avec orthogonalité des éléments linéaires sont les asymptotiques, conformément au résultat bien connu suivant lequel les lignes asymptotiques de S sont celles qui correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires à leurs représentations hypersphériques.

Attachons maintenant à une hypersurface quelconque S de E_n une *congruence* de droites (D), chacune des ∞^{n-1} droites de la congruence étant perpendiculaire à un hyperplan tangent de S, la loi d'association des différentes droites D de (D) aux hyperplans correspondants étant une loi continue arbitraire. Coupons (D) par une hypersurface Σ arbitraire, et soit P le point (l'un des points suivi par continuité) où Σ coupe le rayon D perpendiculaire à l'hyperplan tangent en M à S, rayon dont nous désignerons par p la trace sur l'hyperplan tangent. Nous déterminons ainsi une certaine association [M, P], donnant lieu à une certaine distribution de cônes (Q_M) sur S, l'équation du cône de sommet M étant l'équation (1) où x^n est une fonction déterminée de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Lorsque, laissant la congruence (D) fixe, on fait varier Σ, x^n varie, et chaque cône (Q_M) varie également mais en ne cessant pas de faire partie du faisceau déterminé par le cône asymptotique de S et le cône invariant relatif à l'association $[M, p]$. Il y a un cas où la variation de Σ *n'influe pas sur le champ de cônes* (Q_M); c'est celui où pour une hypersurface Σ (autre que l'hyperplan ∞) *chaque cône* (Q_M) *est cône asymptotique pour* S : tous les cônes Q_M relatifs aux différentes hypersurfaces Σ de l'espace *sont alors évidemment aussi les cônes asymptotiques de* S. Voyons ce qu'il faut pour que cette circonstance spéciale se présente.

Si pour une certaine valeur de $x^n (\neq \infty)$ le cône (1) est asymptotique, le premier membre de l'équation (3) du cône invariant aura la forme

$$\lambda\, \omega^i \omega_{in},$$

et l'équation (1) pourra s'écrire

$$(\lambda - x^n)\, \omega^i \omega_{in} = 0,$$

ce qui prouve qu'il existe une valeur de x^n rendant le cône (1) indéterminé. Cette condition est suffisante : Pour que, S étant donnée, la congruence (D) jouisse de la propriété qu'en coupant l'ensemble de ses rayons par une hypersurface Σ arbitraire, les cônes (Q_M) relatifs aux diverses associations [M, P] obtenues soient toujours les cônes asymptotiques de S, *il faut et il suffit que les coordonnées* $x^i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, *du point p où le rayon générateur* D *de* (D) *perce l'hyperplan tangent au point* M *correspondant de* S, *soient telles qu'on puisse leur adjoindre une fonction* $x^n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ *rendant l'équation* (1) *du cône* (Q_M) *indéterminée.*

En exprimant l'indétermination de (1) on obtient un système de la forme

$$(4) \qquad a_{kil} \frac{\partial x^i}{\partial u^l} + b_{ki} x^i + c_k x^n + d_k = 0 \qquad \left[k = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\right],$$

linéaire par rapport aux $\dfrac{\partial x^i}{\partial u_l}$, x^i, x^n, et ne contenant pas les dérivées de x^n.

L'élimination de x^n dans (4) fournit un nouveau système linéaire

$$(5) \qquad \bar{a}_{kil} \frac{\partial x^i}{\partial u_l} + \bar{b}_{ki} x^i + \bar{d}_k = 0 \qquad \left[k = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} - 1\right],$$

auquel doivent satisfaire les coordonnées x^i des traces p des rayons de (D) sur les hyperplans tangents correspondants de S.

Si le système (5) est compatible, en adjoignant à chacune de ses solutions (x^i) la quantité x^n déduite *sans quadratures* du système (4), on obtient, par les coordonnées relatives $x^1, x^2, \ldots, x^n$ de l'un quelconque de ses points, une hypersurface Σ_0 *correspondant à* S *avec orthogonalité de tous les couples d'éléments linéaires homologues*. La connaissance *a priori* d'une telle hypersurface garantit d'ailleurs la compatibilité de (5).

Le système (5) est compatible *quel que soit* le nombre de dimensions n de l'espace, et admet toujours une solution dépendant de n constantes arbitraires, fournie par les $n-1$ coordonnées rectangulaires des projections d'un *point fixe arbitraire* P_0 de l'espace sur l'hyperplan tangent à S : un tel point peut en effet être considéré comme une hypersurface particulière correspondant à S avec orthogonalité de tous les éléments linéaires.

Pour $n=3$, (5) est *complément intégrable*, et son intégration fait connaître les surfaces Σ_0 de l'espace ordinaire correspondant à S avec orthogonalité des éléments linéaires (dont les points fixes de l'espace sont des cas particuliers).

Le problème de la détermination des surfaces Σ_0 de l'espace ordinaire correspondant à une surface donnée S avec orthogonalité des éléments linéaires est, comme l'on sait, équivalent à celui de la recherche des déformations infinitésimales de S, déformations que l'on obtient en menant par chaque point M de S un vecteur infiniment petit proportionnel au vecteur défini par un point fixe O et le point P_0 de Σ_0 homologue de M.

Il est aussi équivalent à celui de la recherche des congruences W admettant S pour nappe focale, que l'on obtient en menant par chaque point M de S la tangente perpendiculaire à la normale à Σ_0 au point P_0 homologue de M; ou encore au problème de la recherche des congruences (de Ribaucour) de surface moyenne S dont les développables déterminent sur S un réseau conjugué, que l'on obtient en menant par chaque point M de S la parallèle à la normale correspondante à l'une quelconque des surfaces Σ_0 associées à S avec orthogonalité des éléments.

Toutes ces questions dépendent du même système (5) de deux équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre aux deux fonctions inconnues x^1, x^2 des deux paramètres u_1, u_2 qui définissent les différents points de S.

Si le nombre de dimensions de l'espace est supérieur à 3, le système (5) n'admet généralement pas d'autre solution que la solution dépendant de n constantes arbitraires obtenues en projetant un point fixe de l'espace sur les hyperplans tangents de S. Cela tient à ce que, pour une hypersurface, le problème de la déformation (tant infiniment petite que finie) est généralement impossible.

Il résulte cependant des considérations qui ont conduit à la formation des systèmes (4) et (5) que, si l'on connaît *a priori* une hypersurface Σ en correspondance ponctuelle avec S telle que les asymptotiques de S correspondent par orthogonalité des éléments linéaires aux courbes homologues de Σ, *on pourra soumettre* S *à une déformation infinitésimale dont la détermination analytique n'exige aucune quadrature.*

La projection orthogonale d'un point quelconque P de Σ sur l'hyperplan tangent à S au point M correspondant, donnera en effet, par ses coordonnées x^i dans l'hyperplan tangent, une solution du système (5), et (4) fera connaître, sans intégration, la $n^{\text{ième}}$ coordonnée relative x^n d'un point P_0, dont le lieu est une hypersurface Σ_0 correspondant à S avec orthogonalité des éléments linéaires qui, associée à S, fournit une déformation infinitésimale de S par application de la construction générale précédemment rappelée pour ces déformations.

La remarque que l'on vient de faire, appliquée à l'espace ordinaire à trois dimensions, conduit par exemple à une solution très simple, n'exigeant aucune quadrature, du problème de la déformation infiniment petite des quadriques.

Soit S une quadrique quelconque rapportée au système (u_1, u_2) de ses génératrices rectilignes, aux différents points de laquelle est attaché, suivant une loi déterminée, un trièdre trirectangle dont le troisième axe est normal à la surface : les deux systèmes linéaires (4) et (5) sont donc déterminés.

M étant un point quelconque de S, associons à la génératrice rectiligne g_1 issue de M (sur laquelle u_1 varie), un plan Π_1 normal à cette génératrice dont la position est définie par une fonction *arbitraire* $\varphi_2(u_2)$ du paramètre u_2. De même, associons à la génératrice rectiligne g_2 issue de M un plan Π_2, normal à g_2, défini par une fonction *arbitraire* $\varphi_1(u_1)$ de u_1. L'intersection D des plans Π_1 et Π_2 engendre, lorsque M décrit S, une congruence (D) dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents à S; et il est clair que si P est un point d'intersection de D avec une surface *arbitraire* Σ, dans la correspondance ponctuelle [M, P] entre S et Σ les lignes asymptotiques de S (les génératrices g_1 ou g_2) correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires aux courbes homologues de Σ (sections de Σ par les plans Π_1 ou Π_2).

Il existe donc, comme nous l'avons vu, un point P_0 sur D décrivant, lorsque D varie, une surface Σ_0 correspondant à S avec orthogonalité des éléments linéaires. Les coordonnées x^1, x^2 du point p où D perce le plan tangent en M à S sont des fonctions connues de u_1 et u_2 lorsque φ_1 et φ_2 sont choisies; ces fonctions fournissent la solution la plus générale du système des deux équations (5), et la distance x^3 du point P_0 au plan tangent en M à S est donnée, sans intégration, par le système correspondant (4).

Σ_0 est la surface la plus générale associée à S pour la détermination de ses déformations infinitésimales; c'est aussi la *surface moyenne* de la congruence de Ribaucour formée par les droites D, et la perpendiculaire issue de M au plan (O, D) (O étant un point fixe quelconque de l'espace) engendre la congruence W la plus générale de première nappe focale S.

Si S est une sphère, les plans Π_1 et Π_2 sont *isotropes*, et (D) est une *congruence isotrope*, conformément au résultat bien connu suivant lequel la surface la plus générale correspondant à S avec orthogonalité des éléments linéaires est la surface moyenne de la congruence isotrope la plus générale.

3. Les réseaux ($\mathcal{R}$) de l'espace à trois dimensions. Réseaux cinématiquement autoconjugués. — Nous avons fait observer que, dans l'espace à trois dimensions, l'équation quadratique (1) donnant, pour une association [M, P] déterminée (x^1, x^2, x^3 = fonctions déterminées de u_1, u_2), les directions des déplacements infinitésimaux de M sur S orthogonaux aux déplacements correspondants de P sur la surface Σ qu'il décrit, définit en général deux tangentes distinctes en M à S, de sorte que les courbes de S correspondant par orthogonalité des éléments aux courbes homologues de Σ sont distribuées suivant les deux familles de courbes d'un certain réseau ($\mathcal{R}$).

Si l'on désigne respectivement par F et Φ les deux premières formes fondamentales de S :

$$F \equiv (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2,$$
$$\Phi \equiv \omega^i \omega_{ij} = a(\omega^1)^2 + 2b\,\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2,$$

l'équation de $\mathcal{R}$ peut s'écrire

(6) $$F + \Gamma - x^3\Phi = 0,$$

où Γ désigne la forme, évidemment invariante par déformation de S

(7) $$\Gamma \equiv \omega^i\, dx^i - x^j \omega^i \omega_{ij},$$

$F + \Gamma = 0$ représentant, comme on l'a vu, le réseau *invariant* de S relatif à l'association [M, p], p étant la projection orthogonale de P sur le plan tangent en M à S.

Il existe un cas important où la forme Γ a, comme les formes F et Φ, une signification remarquable. C'est celui où l'association [M, P] est celle qui fait correspondre, à tout point M(u_1, u_2) de S, l'un, P, des deux points où une sphère (Ω) centrée en M et dont le rayon est une fonction arbitraire des deux variables u_1, u_2 touche son enveloppe Σ. Si alors on désigne par 2ρ (fonction arbitraire de u_1, u_2) le carré R^2 du rayon de (Ω), on a [1]

$$\Gamma \equiv -\delta_\rho^2,$$

δ_ρ^2 étant la dérivée seconde covariante de ρ par rapport à la première forme fondamentale F de S.

Dans le cas indiqué on a $Mp = \sqrt{\Delta\rho}$ (*loc. cit.*), $\Delta\rho$ étant le paramètre différentiel du premier ordre de ρ relatif à la première forme F de S; il en résulte que

$$x^3 = \overline{pP} = \sqrt{R^2 - \overline{pM}^2} = \sqrt{2\rho - \Delta\rho},$$

et que par suite l'équation (1) du réseau ($\mathcal{R}$) de S relatif à l'association [M, P] actuelle peut être écrite

(8) $$\frac{F + \Gamma}{\Phi} = \sqrt{2\rho - \Delta\rho}.$$

Il convient de signaler un cas particulier d'associations [M, P] par enveloppes de sphères, dans lequel le réseau ($\mathcal{R}$) de S relatif à l'association considérée est susceptible d'une définition cinématique intéressante. Ce cas est celui où la fonction $\rho = \frac{R^2}{2}$ définissant le rayon de la sphère (Ω) centrée au point M de S est une solution de la deuxième équation de l'applicabilité pour S

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + 1 = K(2\rho - \Delta\rho),$$

Δ, Δ_2, Δ_{22} étant les trois paramètres différentiels de Beltrami, et K la courbure totale de S.

---

[1] Pour l'établissement de ce résultat, on peut voir notre Mémoire : *Questions de Géométrie liées au caractère invariant de certains réseaux par déformation arbitraire de leur surface support* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 64, p. 207].

S admet alors une déformation après laquelle les différentes sphères (Ω) (supposées entraînées dans la déformation) viennent passer par un point fixe de l'espace, et l'enveloppe Σ des sphères (Ω) peut être considérée comme le lieu géométrique d'un point P invariablement lié à une déformée S_0 de S lorsque S_0 roule sans glisser sur S. On dit dans ces conditions que Σ est une *surface de roulement*, et l'on sait que tout roulement infiniment petit de S_0 sur S substituant au point de contact M un point de contact infiniment voisin M', est une rotation autour d'un certain axe Mt situé dans le plan tangent en M à S dont la direction, en correspondance involutive avec celle de MM', est dite *cinématiquement conjuguée* à celle de MM'. L'élément linéaire PP' décrit par P sur Σ dans la rotation précédente est orthogonal à Mt; il en résulte que pour que deux déplacements infinitésimaux correspondants de M et P sur S et Σ soient orthogonaux, il faut et il suffit que la direction MM' soit confondue avec la direction cinématiquement conjuguée Mt. Le réseau $(\mathcal{R})$ de S relatif à l'association [M, P] envisagée est donc *le réseau cinématiquement autoconjugué dans le roulement de* S_0 *sur* S. Les réseaux cinématiquement autoconjugués d'une surface quelconque S *sont donc définis par l'équation* (8), *où* ρ *est une solution quelconque de la deuxième équation de l'applicabilité pour* S.

Si la surface S_0 dont le roulement sur S engendre la surface Σ est *symétrique* de S, la correspondance ponctuelle établie entre S et Σ par l'association du point de contact M sur S et du point P invariablement lié à S_0 qui décrit la surface Σ. est l'une de celles dont il a été question au n° 2, dans lesquelles les courbes de S correspondant par orthogonalité des éléments linéaires à leurs homologues sur Σ *sont les asymptotiques*.

Cela résulte de ce que, S_0 étant constamment symétrique de S par rapport au plan tangent en M, les différentes perpendiculaires Pp aux plans tangents à S passent par un même point *fixe* P_0, occupant, par rapport à S, la position que P occupe par rapport à S_0. Le point P_0 peut être regardé comme une surface particulière sur laquelle les rayons de la congruence (Pp) déterminent des points en correspondance par orthogonalité des éléments avec les points M correspondants de S, et l'on a vu que, dans ces conditions, pour toutes les correspondances obtenues en associant à M un point *quelconque* de Pp, donc en particulier pour la correspondance [M, P] qui nous occupe, le réseau $(\mathcal{R})$ de l'association [M, P] est le réseau asymptotique de S.

L'équation (8) du réseau peut ici être écrite indifféremment

$$\Phi = 0$$

ou

$$F + \Gamma = 0, \tag{9}$$

et coïncide avec celle du réseau *invariant* $(\mathcal{R}_1)$ relatif à l'association $[M, p]$.

Lorsqu'on déforme S (S_0 restant rigide) à partir de la position symétrique de S_0, l'association $[M, p]$ entre M et la projection de P sur le plan tangent en M ne change pas. Le réseau $(\mathcal{R}_1)$ relatif à cette association conserve son équation (9), et cette équation, d'après l'invariance de $(\mathcal{R}_1)$, représente le réseau déformé du réseau ($\mathcal{R}_1$) initial, c'est-à-dire du réseau asymptotique de la position initiale de S.

Dans la position actuelle de S, (9) représente donc un réseau qui, par déformation de S peut être transformé en réseau asymptotique, c'est-à-dire un *réseau d'asymptotiques virtuelles de* S, et l'ensemble des réseaux d'asymptotiques virtuelles de S, *peut donc être représenté par l'équation*

$$F + \Gamma = 0,$$

où, dans l'expression $-\delta_\rho^2$ de Γ, ρ est une solution quelconque de la deuxième équation de l'applicabilité pour S.

Les réseaux ($\mathcal{R}$) dans l'association d'une enveloppe de sphères et de sa déférente. — Nous avons, au numéro précédent, envisagé les réseaux ($\mathcal{R}$) d'une surface quelconque S considérée comme la déférente d'une famille quelconque de sphères à deux paramètres centrées sur S, l'association fournissant ces réseaux étant celle qui fait correspondre, à tout point M de S, l'un des points P où la sphère centrée en M touche son enveloppe Σ. Il est intéressant d'étudier les réseaux ($\mathcal{R}$) de l'enveloppe Σ correspondant par orthogonalité des éléments linéaires à leurs images sur S dans l'association indiquée. Si, pour éviter un changement de notations, nous échangeons les noms de la déférente et de l'enveloppe correspondante, nous avons à étudier les réseaux ($\mathcal{R}$) d'une surface S relatifs à une association [M, P] pour laquelle le point P correspondant à un point quelconque M de S est *constamment situé sur la normale en* M *à* S : la déférente est alors le lieu de P qui peut être une surface Σ arbitraire.

(Σ) étant choisie, dans l'équation générale (1) des réseaux ($\mathcal{R}$) de S, x^3 est une fonction arbitraire des deux variables u_1, u_2; on a $x^1 = x^2 = 0$, et (1) s'écrit

$$(1) \qquad (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 - x^3(\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}) = 0.$$

Si l'on suppose que les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ du repère attaché au point M sont portés par les tangentes principales, la deuxième forme fondamentale $(\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23})$ peut se mettre sous la forme

$$\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23} = \frac{1}{R_1}(\omega^1)^2 + \frac{1}{R_2}(\omega^2)^2,$$

R_1 et R_2 étant les deux rayons de courbure principaux de S en M, et (1) peut s'écrire

$$(10) \qquad (\omega^1)^2\left(1 - \frac{x^3}{R_1}\right) + (\omega^2)^2\left(1 - \frac{x^3}{R_2}\right) = 0,$$

dont la forme prouve que les différents réseaux ($\mathcal{R}$) de S correspondant aux divers choix possibles de Σ *sont bissectés par le réseau de courbure de* S (*sont harmoniques à ce réseau*).

La formule d'Euler relative aux rayons de courbure des sections normales de S en M permet de donner à (10) une forme géométrique très simple, que l'on peut d'ailleurs rattacher immédiatement aux propriétés des développables polaires des courbes gauches. Si ω est l'angle sous lequel une courbe du réseau (10) coupe la ligne de courbure de S tangente à $\vec{e}_1$, on a

$$\cos^2\omega\left(1-\frac{x^3}{R_1}\right)+\sin^2\omega\left(1-\frac{x^3}{R_2}\right)=0,$$

d'où l'on déduit

$$x^3=\rho,$$

ρ désignant le rayon de courbure normale en M de la courbe envisagée.

La surface Σ apparaît ainsi comme le lieu des centres de courbure normale des courbes de S formant le réseau $(\mathcal{R})$ relatif à l'association [M, P], et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Si l'on coupe la congruence des normales à une surface quelconque S *par une surface quelconque* Σ, *le réseau* $(\mathcal{R})$ *de* S *relatif à l'association* [M, P] *d'un point quelconque* M *de* S *et de l'un des points* P *où la normale en* M *à* S *coupe* Σ *est bissecté par le réseau des lignes de courbure de* S, *et, en chaque point* M *de l'une quelconque des courbes de ce réseau, le centre de courbure normale de la courbe envisagée coïncide avec le point* P *correspondant de* Σ.

On a des vérifications immédiates de la proposition précédente en prenant pour Σ l'une des deux nappes de la développée de S ou le plan de l'infini. Le réseau $(\mathcal{R})$ se réduit à l'un des deux systèmes de lignes de courbure de S compté deux fois dans le premier cas, et au réseau asymptotique dans le second cas.

La réalité de $(\mathcal{R})$ dépend du signe de l'expression

$$\left(1-\frac{x^3}{R_1}\right)\left(1-\frac{x^3}{R_2}\right),$$

qui, en désignant par K et H les courbures totale $\left(K=\frac{1}{R_1R_2}\right)$ et moyenne $\left(2H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ de S peut s'écrire

$$K(x^3)^2-2Hx^3+1.$$

Si $K>0$, $(\mathcal{R})$ est réel ou imaginaire suivant que les surfaces (ou les portions de surfaces) Σ, que l'on associe à S, coupent les rayons de la congruence des normales à S entre les deux centres de courbure principaux ou en dehors du segment qu'ils déterminent. La conclusion est inverse si $K<0$.

Il convient de noter que tout réseau harmonique au réseau de courbure d'une surface S est un réseau $(\mathcal{R})$ pour l'association de S et d'une certaine surface bien déterminée Σ, et cela permet de définir les réseaux harmoniques au réseau de courbure d'une surface quelconque S au moyen d'*une relation d'orthogonalité* (orthogonalité des éléments linéaires des courbes des réseaux envisagés, et des éléments correspondants sur les surfaces Σ associées).

Cette remarque fait apparaître un mode de repérage des surfaces de l'espace, dans lequel chaque surface Σ est déterminée en grandeur et position par le réseau $(\mathcal{R})$ qui lui correspond sur une surface base fixe S; on peut d'ailleurs repérer Σ au moyen d'*une famille de courbes de* S puisque, le réseau $(\mathcal{R})$ dont il vient d'être question étant bissecté par le réseau des lignes de courbure de S, la connaissance de l'une des deux familles de courbes qui le constituent entraîne celle de l'autre.

Nous reviendrons plus loin sur cette façon de définir et de localiser une surface quelconque de l'espace au moyen d'un réseau. Plaçons-nous pour l'instant dans le cas spécial où S est une surface *de roulement*, ce qui signifie, comme on l'a rappelé au n° 3, que S est décrite par un point M invariablement lié à une certaine surface Σ_0 roulant sans glisser sur une surface fixe Σ (base du roulement) applicable sur Σ_0. Si P est le point où Σ_0 touche Σ lorsque M occupe une position déterminée sur S, MP est normale à S, et l'association [M, P] est l'une de celles dont il vient d'être question. D'après ce qu'on a vu, le réseau $(\mathcal{R})$ de (Σ) correspondant à l'association [M, P] est le réseau cinématiquement autoconjugué de Σ dans le roulement de Σ_0 sur Σ, et la proposition générale établie ci-dessus montre que :

Dans le roulement d'une surface sur une surface applicable fixe, les images du réseau cinématiquement autoconjugué de la surface base sur une surface quelconque de roulement sont bissectées par le réseau de courbure de cette surface de roulement.

Le cas où la roulante Σ_0 est symétrique de la base Σ (le réseau cinématiquement autoconjugué est alors, comme on l'a vu, le réseau *asymptotique* de Σ) conduit à une vérification directe simple de cette dernière proposition. Dans ce cas la perpendiculaire au plan tangent commun à Σ_0 et Σ au point de contact M, menée par le point P correspondant de la surface S de roulement, passe (n° 3) constamment par le point *fixe* P_0 symétrique de P par rapport au plan tangent commun en M à Σ et Σ_0. S est l'homothétique de la podaire Π de Σ dans l'homothétie de centre P_0 et de rapport 2, et si p_0 est le point du plan Π milieu de P_0P, l'association $[M, p_0]$ donne lieu (*voir* le n° 2) au *même* réseau $(\mathcal{R})$ que l'association [M,P], c'est-à-dire au réseau asymptotique de Σ. L'homothétie indiquée, transformant les lignes de courbure de S en celles de la podaire Π, et faisant se correspondre les réseaux images sur S et Π du réseau asymptotique de Σ, on voit que le réseau image, sur Π, du résau asymptotique de Σ, est bissecté par le réseau des lignes de courbure de Π.

Le point P_0 pouvant évidemment occuper une position quelconque dans l'espace, la propriété qui nous intéresse affecte ici la forme suivante :

Sur toute surface podaire d'une surface Σ le réseau de courbure bissecte l'image du réseau asymptotique de Σ, et cette dernière proposition est une conséquence immédiate du fait que toute podaire d'une surface Σ est inverse d'une transformée par polaires réciproques de Σ.

5. **Sur le repérage des surfaces de l'espace au moyen de réseaux d'une surface fixe.** — Nous allons, dans ce numéro, illustrer par quelques exemples le point de vue, auquel il a été fait allusion au numéro précédent, relatif à la possibilité de représenter biunivoquement l'ensemble des surfaces de l'espace par l'ensemble

des réseaux *harmoniques* au réseau de courbure d'une surface repère fixe (bissectés par le réseau de courbure).

Soit S la surface repère (supposée non sphérique). On sait qu'il existe *un réseau et un seul harmonique au réseau de courbure de* S *et conjugué sur* S *au sens de Dupin.* Demandons-nous quelle est la surface Σ ayant ce réseau pour image sur S. Les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ du repère attaché à un point quelconque M de S étant tangents aux lignes de courbure, R_1 et R_2 désignant les deux rayons de courbure principaux de S en M, et x^3 étant la distance $\overline{MP}$ du point M au point correspondant P de Σ situé sur la normale en M à S, l'équation définissant le réseau image de Σ sur S est l'équation (10) du n° 4

$$(\omega^1)^2\left(1-\frac{x^3}{R_1}\right)+(\omega^2)^2\left(1-\frac{x^3}{R_2}\right)=0. \tag{10}$$

En exprimant que le réseau (10) est conjugué au sens de Dupin sur S, on obtient l'équation

$$\frac{1}{R_2}\left(1-\frac{x^3}{R_1}\right)+\frac{1}{R_1}\left(1-\frac{x^3}{R_2}\right)=0,$$

qui donne

$$x^3=\frac{1}{2}(R_1+R_2),$$

d'où l'on conclut que P est le milieu du segment déterminé par les deux centres de courbure principaux de S en M, et que par suite Σ *est la développée moyenne de* S.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant qui fournit une définition géométrique intéressante du réseau conjugué d'une surface partageant harmoniquement le réseau des lignes de courbure de la surface :

Le réseau conjugué d'une surface quelconque S *(non réduite à une sphère) harmonique au réseau de courbure, est celui formé par les courbes de* S *qui, dans la correspondance établie par les normales à* S *entre* S *et sa développée moyenne, correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires aux courbes homologues de la développée moyenne.*

Posons-nous de même la question suivante :

Étant donné une surface quelconque S, et deux autres surfaces distinctes Σ, Σ_1 coupant respectivement une normale quelconque MN à S en deux points P et P_1, quelle relation doit-il y avoir entre Σ et Σ_1 pour que les réseaux $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_1)$ de S relatifs aux associations [M, P] et [M, P_1], qui comme on l'a vu sont conjugués harmoniques par rapport au réseau de courbure de S, *soient conjugués harmoniques entre eux, et forment par suite avec le réseau de courbure de* S *un triple harmonique.*

Si $\overline{MP}=x^3$ et $\overline{MP_1}=x_1^3$ sont les cotes de P et P_1, les équations des réseaux $(\mathcal{R})$ relatifs aux deux associations [M, P] et [M, P_1] sont, l'équation (10), et celle qu'on en déduit en remplaçant x^3 par x_1^3 :

$$(\omega^1)^2\left(1-\frac{x^3}{R_1}\right)+(\omega^2)^2\left(1-\frac{x^3}{R_2}\right)=0,$$
$$(\omega^1)^2\left(1-\frac{x_1^3}{R_1}\right)+(\omega^2)^2\left(1-\frac{x_1^3}{R_2}\right)=0.$$

Les deux réseaux $(\mathcal{R})$ envisagés se partagent harmoniquement si, K et H désignant les courbure totale et moyenne de S on a

$$Kx^3x_1^3-H(x^3+x_1^3)+1=0,$$

condition qui exprime, comme on le voit aussitôt, que les différents couples de points P et P_1 sont *conjugués harmoniques par rapport aux centres de courbure principaux correspondants de* S.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant, qui donne une signification géométrique méritant d'être notée aux couples de réseaux $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_1)$ d'une surface quelconque S formant un triple harmonique avec le réseau des lignes de courbure de la surface.

Les différents couples de réseaux $[(\mathcal{R}), (\mathcal{R}_1)]$ *d'une surface* S, *formant avec le réseau de courbure de* S *un triple harmonique, sont ceux formés par les courbes de* S *qui correspondent, par orthogonalité des éléments linéaires, aux courbes homologues de deux surfaces quelconques* Σ *et* Σ_1 *partageant harmoniquement les différents segments focaux de la congruence des normales à* S.

Comme cas particulier de la proposition générale précédente nous signalerons celui où Σ_1 coïncide avec S. Le réseau $(\mathcal{R}_1)$ correspondant, dont les tangentes aux différentes courbes doivent être perpendiculaires sur elles-mêmes, est le réseau des courbes minima de S; Σ est la *développée harmonique de* S (lieu des conjugués harmoniques des pieds des normales de S par rapport aux deux centres de courbure principaux correspondants); le réseau $(\mathcal{R})$ relatif à Σ devant alors partager harmoniquement le réseau de courbure et le réseau minima de S est le réseau orthogonal bissectant le réseau de courbure, et l'on peut énoncer ce résultat :

Dans la correspondance ponctuelle établie par les normales d'une surface quelconque S *entre cette surface et sa développée harmonique* Σ, *les courbes de* S *qui correspondent par orthogonalité des éléments linéaires à leurs images sur* Σ, *sont les courbes du réseau orthogonal bissectant le réseau de courbure de* S.

Ainsi, par exemple, si S est applicable sur une sphère de rayon R, les deux surfaces Σ et Σ_1 obtenues en portant sur les normales à S, de part et d'autre de S, des longueurs égales à R (surfaces parallèles *à courbure moyenne constante* d'O. Bonnet), sont *développées harmoniques l'une de l'autre*. La proposition précédente s'applique donc : dans la correspondance ponctuelle établie entre Σ

et Σ_1 par les normales communes, les réseaux (orthogonaux) bissecteurs des réseaux de courbure se correspondent sur les deux surfaces.

Comme les réseaux (orthogonaux) de courbure se correspondent aussi, il existe dans la correspondance parallèle entre Σ et Σ_1 *deux* réseaux orthogonaux se transformant en réseaux orthogonaux, et la correspondance est une *correspondance conforme* (propriété bien connue des couples de surfaces parallèles à courbure moyenne constante).

Si, revenant au cas où S est quelconque, Σ est la développée moyenne de S, Σ_1 se réduit au plan de l'infini, $(\mathcal{R}_1)$ est le réseau asymptotique de S, et $(\mathcal{R})$ partageant harmoniquement ce réseau asymptotique, est *conjugué au sens de Dupin* conformément à un résultat antérieur.

Pour terminer, nous signalerons une relation géométrique entre la position d'un point quelconque P d'une surface quelconque Σ, et l'angle 2ω sous lequel se coupent, au point correspondant M de la surface repère S, les courbes du réseau $(\mathcal{R})$ image de Σ sur S.

L'équation (10) du n° 4 peut s'écrire

$$\frac{R_2(R_1 - x^3)}{R_1(R_2 - x^3)} = -\operatorname{tg}^2 \omega.$$

Or, si l'on désigne par F_1 et F_2 les centres de courbure principaux de S en M, le premier membre de la relation précédente n'est pas autre chose que le rapport anharmonique (F_1, F_2, P, M). On a donc, pour tout point P de Σ :

$$(F_1, F_2, P, M) = -\operatorname{tg}^2 \omega, \tag{11}$$

relation qui exprime l'angle du réseau image d'une surface quelconque au moyen du rapport anharmonique du point qui la décrit, du pied de la normale à la surface repère, et des deux centres de courbure principaux correspondants de cette surface repère.

La relation (11) prouve, en particulier, que *les réseaux isogonaux d'une surface quelconque* S *harmoniques au réseau de courbure*, sont les images, sur S, des surfaces Σ, coupant les normales à S en ses différents points M, en des points P, *formant avec* M *et les deux centres de courbure principaux correspondants* F_1 *et* F_2 *un système de quatre points de birapport constant.*