Bulletin de la S. M. F.

L. Rodet

Sur un manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 139-149
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__139_0>

Sur un Manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien; par M. L. Rodet.

(Séance du 27 mars 1878.)

M. Eisenlohr, professeur de langue et d'archéologie égyptiennes à l'Université de Heidelberg, vient de publier en *fac-simile, traduction* et *commentaire*, un très-ancien papyrus égyptien, qui n'est autre chose qu'un *Manuel* à l'usage d'un calculateur. Ce qui rend cet ouvrage très-précieux pour l'histoire des Mathématiques, c'est que les calculs qui y sont faits sont exécutés tout au long, ce qui permet de se rendre compte de la façon dont les Égyptiens s'y prenaient pour effectuer les diverses opérations de l'Arithmétique, ou plutôt, comme disaient les Grecs, de la *Logistique*. Il est regrettable qu'on ne puisse pas, du moins pour le moment, lui assigner une date précise. Tout ce qu'on peut dire à ce sujet, c'est qu'il est certainement antérieur à la conquête grecque (332 ans avant notre ère), probablement même à celle de Cambyse (537). D'après ses caractères paléographiques, M. Eisenlohr pense qu'on pourrait le faire remonter jusqu'au xv^e^ et même au xvi^e^ siècle; mais cette conclusion n'est pas absolument certaine.

L'auteur sait effectuer sur les nombres entiers l'*addition*, si compliquée qu'elle soit; la *soustraction*, au moins lorsque le nombre à soustraire a tous ses chiffres, comme nous dirions aujourd'hui, plus petits que les chiffres de même ordre du nombre dont on soustrait; en fait de *multiplication*, il ne sait que *doubler* un nombre; pour effectuer un produit par 13; il prend, par exemple :

Le nombre simple..............	$1a$
Son double.....................	$2a$
Son quadruple..................	$4a$
Son octuple....................	$8a$

et, ajoutant le simple, le quadruple et l'octuple, il obtient le produit $13a$. Il ignore absolument ce que peut être la *division*, quoi qu'on en puisse croire en se fiant à la traduction de M. Eisenlohr. L'expression que le savant égyptologue a traduite par : *divise a par b'* doit être rendue d'une tout autre façon, que j'expliquerai tout à l'heure en partant des fractions. Pour obtenir le quotient de a par b, il multiplie b jusqu'à ce qu'il obtienne a, ou, plus mot à mot, il *fait croître b pour trouver a.*

Comme tous les anciens, notre calculateur fait un très-grand usage des fractions; seulement, pour lui, il ne peut exister d'autres fractions que celles qui ont pour numérateur l'unité, et quand un calcul le conduit à une autre expression fractionnaire, il la réduit en une somme de ce que les anciens appelaient des *fractions simples.* On sait, en effet, que cette manière de voir s'était perpétuée dans l'école grecque et chez les Arabes, chez ces derniers même avec une restriction tenant aux habitudes de la langue, et sur laquelle je vais revenir.

On rencontre dans le papyrus dont nous parlons des signes spéciaux pour les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; toutes les autres se représentent par le dénominateur surmonté d'un point. La première de toutes les fractions est pour notre auteur $\frac{2}{3}$. On sait que Héron le Jeune admettait aussi cette fraction comme une fraction simple, et la représentait par un signe que M. Hultsch, dans son édition du géomètre alexandrin, représente par ω''.

En ce qui concerne la manière dont les Égyptiens pratiquaient le calcul des fractions, un exemple en dira plus, et plus vite, que toute considération que je pourrais présenter. Je choisis pour cela le problème n° 36 de M. Eisenlohr, en avertissant le lecteur que :

1° J'emprunte l'explication des différentes opérations aux autres problèmes analogues, l'auteur ou le copiste les ayant omises dans celui-ci;

2° Pour tout ce qui est traduisible, énoncé ou explication des opérations, je refais la traduction, non d'après la version allemande, mais d'après le texte égyptien lui-même.

3° Je marque, comme dans l'original, d'un trait oblique les résultats partiels qui doivent être additionnés pour obtenir le total, les autres nombres n'étant que des intermédiaires dont notre Égyptien ne savait se passer.

N° 36. *Je verse trois fois (mon vase) dans un boisseau; j'ajoute* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{1}{5}$ *de mon vase; je remplis. Quelle est la quantité en question?*

Si l'on te dit cela, fais comme ceci :

	1	(30)	Exprime 30 entre 106, c'est-à-dire cherche quelle fraction de 106 vaut 30.	.	106
..	2	(60)		$\frac{1}{2}$	53
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(10)		/ $\frac{1}{4}$	$26\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	(6)		/ $\frac{1}{106}$	1
Total.	$3\frac{1}{3}\frac{1}{5}$	$\frac{106}{30}$		/ $\frac{1}{53}$	2
				/ $\frac{1}{212}$	$\frac{1}{2}$
				Total.	$1 = \frac{30}{30}$

La quantité est donc $\frac{1}{4}\ \frac{1}{53}\ \frac{1}{106}\ \frac{1}{212}$.

Preuve :

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{212}$		
..	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{795}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{636}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{265}$	$\frac{1}{530}$	$\frac{1}{1060}$		

Ici l'auteur réduit les petites fractions, mais les petites seulement, au dénominateur commun 1060, afin d'en faire plus facilement la somme

$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{212}$			
20	10	5			35
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{795}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	
$35\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	20	10	70
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{126}$		
$88\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$		100
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{265}$	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{1060}$		
56	4	2	1		60
			Total..........		$265 = \frac{1}{4}$

et, reprenant les grosses fractions, qu'il a laissées de côté, avec ces $\frac{265}{1060} = \frac{1}{4}$ qu'il vient de trouver,

	$\frac{1}{2}$	530
	$\frac{1}{4}$	265
	$\frac{1}{4}$	265
Total............		1060

On voit, par cet exemple, que :

1° Notre calculateur savait qu'en multipliant le dénominateur d'une fraction par un nombre on divise la fraction par ce nombre;

2° En multipliant les deux termes par un même nombre, on n'en change pas la valeur;

3° On les peut réduire, pour en faire la somme, à un dénominateur commun. Seulement, pour lui, il n'était pas nécessaire que ce dénominateur commun rendît tous les numérateurs entiers;

4° Quant aux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, voire même $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, il les ajoute fort bien sans les réduire au préalable à un dénominateur commun;

5° Il ne fait usage que de fractions ayant pour numérateur l'unité; aussi, dans la dernière ligne de sa *preuve*, remplace-t-il $\frac{2}{53}$ par $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{318}$, $\frac{1}{795}$.

On peut encore déduire d'autres exemples les règles suivantes :

6° Pour prendre une certaine fraction d'un nombre (entier ou fractionnaire), il procède autant que possible par *dimidiation*, comme il procède par *duplication* pour prendre les multiples.

7° Quand 3 doit entrer au dénominateur de la fraction du nombre qu'il veut avoir, *il commence par prendre les* $\frac{2}{3}$ *avant de prendre le* $\frac{1}{3}$. Pour faciliter cette opération, lorsque le nombre donné est fractionnaire, une table spéciale (n° 61) indique la façon dont on peut prendre les $\frac{2}{3}$ d'une fraction.

Je terminerai cette Notice par une Table des matières traitées dans le papyrus en question, en faisant, à mesure que l'occasion s'en présentera, les observations qui me paraîtront utiles.

Chapitre Ier. — *Réduction des fractions ayant* 2 *pour numérateur, et pour dénominateur un nombre impair, en une somme de fractions à numérateur* 1.

Cette opération est énoncée en ces termes (d'après l'égyptien, et non d'après l'allemand) : « *Exprime* 2 *entre* 13 » par exemple, ce qui rappelle l'expression analogue des Arabes et des Juifs : 2 *parties de* 13 *parties dans l'unité*, chose que les Arabes appellent *une expression inarticulable*, et l'auteur juif Aben-Ezra *une fraction que l'homme ne saurait prononcer*. Voilà pourquoi l'auteur égyptien la rend *prononçable* en la convertissant en une somme de fractions très-simples. Héron le Jeune fait souvent des conversions de ce genre; il dit par exemple :

ᾱ $\overline{\text{ͺεωος}}$, ὧν μέρος σ″ γίνεται $\overline{\text{οθ}}$ δ″η″σ″.

15876, *dont la* $\frac{1}{200}$ *partie est* 79 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{200}$. L'auteur arabe Al-Khàrizmi nous en offre aussi des exemples fréquents.

Pour arriver à cette décomposition, notre auteur nous dira, par exemple : *Exprime* 2 *entre* 17.

Calcul :

	.	17		
	$\frac{2}{3}$	11 $\frac{1}{3}$		
	$\frac{1}{3}$	5 $\frac{2}{3}$		
	$\frac{1}{6}$	2 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
/	$\frac{1}{12}$	1 $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	manquent $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

	.	17	$\frac{1}{17}$	1
	..	34	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{2}$
/	...	51	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{3}$
/	....	68	$\frac{1}{68}$	$\frac{1}{4}$

Le résultat de la conversion est donc

$$\frac{1}{12} \quad \frac{1}{51} \quad \frac{1}{63},$$

valant

$$1\frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}.$$

Chapitre II, n^os 1 à 6. — *Partage de* 1, 3, 6, 7, 8 *et* 9 *rations entre* 10 *personnes.*

Chapitre III, n^os 7-23. — *Compléter une expression fractionnaire à* 1, *à* $\frac{1}{2}$, *à* $\frac{1}{4}$, *à* $\frac{1}{8}$, *à* $\frac{1}{16}$.

Chapitre IV, n^os 24-38. — *Calcul d'une quantité qui, augmentée de fractions d'elle-même, donne un nombre donné*

$$x + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} + \ldots = A.$$

Les quatre derniers problèmes (35-38) sont de la forme

$$kx + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} - \ldots = 1.$$

(*Voir* l'exemple cité plus haut.)

CHAPITRE V. — *Partage inégal.*

N° 39. *Partager* 100 *rations entre* 10 *personnes,* 50 *rations entre* 6, 50 *entre* 4; *quelle est la différence moyenne?*

N° 40. 100 *rations entre* 5 *personnes;* $\frac{1}{7}$ *des* 3 *premières parts vaut les* 2 *dernières; quelle est la différence?*

D'après la solution donnée, les parts sont en progression arithmétique. L'auteur n'explique pas comment il trouve que, de la condition posée par l'énoncé, il déduit que la raison (la *différence* comme il dit) doit être $5\frac{1}{2}$. M. Eisenlohr fait très-bien voir que, si les parts sont

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ a+4r,$$

les trois plus élevées font $3a+9r$, les deux dernières $2a+r$, et la condition énoncée

$$3a+9r=7(2a+r)$$

donne bien

$$r=5\tfrac{1}{2}a \quad \text{ou si} \quad a=1, \quad r=5\tfrac{1}{2}.$$

CHAPITRE VI, n^os^ 41-48. — *Calculs de volumes.*

Dans cette partie de son *Manuel,* notre Égyptien évalue la contenance en grains de certains volumes, que M. Eisenlohr n'a pas pu déterminer. Il calcule d'abord *une fois et demie* le produit de la surface de la base par la hauteur, et obtient ainsi ce qu'il appelle la *valeur du corps,* c'est-à-dire la *valeur estimée en unités de volume.* Il en prend $\frac{1}{20}$, qui lui donne la contenance en mesures de capacité pour les grains.

M. Eisenlohr a cherché vainement à se rendre compte de la signification géométrique de ces calculs; pourquoi les $\frac{3}{2}$ du produit de la base par la hauteur? Pourquoi $\frac{1}{20}$ de ce produit pour la contenance en mesures de capacité? Il a cru trouver la réponse à la première question en supposant qu'il s'agit d'un volume pyramidal ou conique tronqué, et que les dimensions horizontales données par l'auteur égyptien se rapportent à la base supérieure, à la petite base; mais le rapport qu'il trouve alors entre cette base supérieure, la κορυφή de Héron et la vraie base (βάσις) ne répond à aucune des formes de magasins à blé ou de meules dont les monuments égyptiens nous ont conservé la représentation figurée. Quant à la seconde question, il lui semble que la conversion pratiquée par le calculateur indique que le volume évalué serait du blé en gerbes, et que $\frac{1}{20}$ de ce volume se rapporte au rendement en grains après battage. Mais toutes ces hypothèses sont peu satisfaisantes, et il faut encore attendre que de nouveaux documents viennent jeter plus de jour sur la question.

Quant à la base de ces solides, elle est ou carrée ou circulaire. Pour la base carrée, on fait le produit du côté par lui-même; pour la base circulaire, notre calculateur prend $\frac{8}{9}$ du diamètre, qu'il élève au carré. Cette fraction $\frac{8}{9}$ est la quatrième réduite de la valeur de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ évaluée en fraction continue, ou, si l'on aime mieux, elle substitue 0,888888... à la vraie valeur 0,88622682....

CHAPITRE VII, nos 49-55. — *Évaluation de surfaces.*

Nous avons, dans les problèmes de ce Chapitre, l'évaluation des surfaces suivantes :

N° 49. *Rectangle de* 10 *perches sur* 2.

L'auteur fait le produit des deux dimensions, mais d'une façon particulière, dans le but d'exprimer la surface en unité superficielle usuelle. Comme cette conversion touche à la métrologie, dont je n'ai pas l'intention de parler ici, je la laisse de côté.

N° 50. *Cercle de* 9 *perches de diamètre,* calculé comme plus haut.

N° 51. *Triangle isoscèle, de* 10 *perches sur chaque rive et* 4 *perches à l'embouchure* (le triangle est dessiné sur le côté).

N° 52. *Trapèze ayant* 20 *perches sur chaque rive,* 6 *perches à l'embouchure,* 4 *perches à la troncature.*

Pour évaluer ces deux surfaces, notre Égyptien fait le produit de la moitié de la base dans le premier cas, de la demi-somme des bases dans le second par un des côtés, ou si l'on veut par la demi-somme des côtés. Je donne à l'expression de la surface cette forme, parce que nous y retrouvons la formule employée par l'auteur indien Brahmagupta, lequel prenait comme règle générale, pour trouver la surface *grossière* d'un trilatère ou d'un quadrilatère, de faire le produit des demi-sommes des côtés opposés ; mais l'Égyptien n'ajoute pas, comme l'Indien, que l'aire *exacte* s'obtiendra *en écrivant quatre fois la demi-somme des côtés, retranchant à chacun de ces nombres un des côtés successivement, faisant le produit des quatre restes, et extrayant la racine carrée du produit.*

N° 53. Il est impossible, pour le moment, de rien comprendre au problème de ce numéro. La figure qui l'accompagne représente un triangle partagé par deux parallèles à la base, portant, la première, comme la base, le chiffre 6, la seconde le chiffre $2\frac{1}{4}$. Les segments sont marqués 5, $3\frac{1}{4}$ et, en chiffres spéciaux à l'évaluation des surfaces, $7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Enfin, auprès du sommet, est inscrit le chiffre 7.

N^{os} 54 et 55. *Partager respectivement 7 et 3 unités agraires en 10 et 5 parts.*

CHAPITRE VIII, n^{os} 56-60. — *Calcul des pentes des pyramides.*

EXEMPLE, n° 56. — *Préceptes pour énoncer une pyramide de* 360 *au « travers de la plante » du pied,* 250 *à la « saillie en tranchant »* (c'est-à-dire 360 de diagonale de base, 250 d'arête ; le mot qui désigne l'arête, et qui signifie littéralement *saillie en tranchant,* est écrit *pir-em-us :* c'est vraisemblablement de là qu'est emprunté le grec *πύραμις*). *Donne-moi son rapport. Fais la moitié de* 360, *ce qui donne* 180. *Fais croître le nombre* 250 *pour trouver* 180 (c'est-à-dire divise 180 par 260, la demi-diagonale par l'arête, ce qui donne par conséquent le *sinus* de l'angle d'inclinaison). *Cela fait* $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{50}$ *de coudée. Or la coudée est de 7 palmes. Fais croître le nombre 7 :*

·	7	
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$

Son rapport (sinus) *en palmes est* $5\frac{1}{25}$.

Le n° 57 est le problème inverse : *Une pyramide a* 140 *en diagonale,* $5\frac{1}{4}$ *palmes de rapport ; on demande son arête.*

N^{os} 58 et 59. Sont des problèmes du même genre.

N° 60. Est ainsi conçu :

Un monument dit ân *de* 15 *coudées à la base* (côté de la base), 30 *dans sa hauteur vers le ciel : donne-moi son rapport. Fais croître* 15, *sa moitié* $7\frac{1}{2}$; *fais croître le nombre* $7\frac{1}{2}$ *quatre fois pour trouver* 30 : *son rapport est* 4.

Donc ici l'auteur calcule le quotient de la hauteur par la moitié du côté de la base : il obtient donc la *tangente* de l'angle dièdre, inclinaison de la face sur la base.

Le n° 61 intercale une Table pour faire des produits de fractions simples, avec ces deux lignes d'explication :

Faire les $\frac{2}{3}$ *d'une fraction. Si l'on te dit : quels sont les* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{5}$? *fais-le* (*le dénominateur s'entend*) 2 *fois,* 6 *fois : ce sont ses* $\frac{2}{3}$.

Tu feras de même pour avoir une fraction de fraction.

Chapitre IX. — *Problèmes divers.*

Les problèmes 62 à 65 se rapportent à des partages proportionnellement à certains nombres donnés, ou les parts ayant entre elles un certain rapport.

Le n° 66 évalue le revenu d'un jour, étant donné celui d'une année : l'année y est comptée de 365 jours.

Les nos 67, 68 sont des évaluations de salaires.

Enfin, de 69 à 78, divers problèmes relatifs au rendement en pains ou en brocs de bière d'un certain volume de farine ou de grains. Je n'entrerai dans aucun détail sur ce sujet, qui m'entraînerait trop loin.

Le n° 79 est un calcul de la somme des termes d'une progression géométrique. Dans une première colonne, l'auteur a rangé les cinq premières puissances de 7, et il en fait la somme, ce qui lui donne naturellement 19607. Dans une seconde colonne, dont le titre n'a pu être déchiffré, il multiplie par 7 le nombre 2801, qui est la somme des cinq premiers termes de la progression de raison 7 commençant à 1, et trouve pour résultat 19607. Chacune des puissances porte un nom que M. Eisenlohr n'a certainement pas su lire, car la traduction qu'il en donne n'a aucun sens; ces noms seraient, suivant lui, dans l'ordre des puissances croissantes :

L'écrit;
Le chat;
La souris;
L'orge;
Le boisseau.

Il faut attendre assurément une interprétation plus rationnelle de ces mots, interprétation qui nous permettra peut-être d'y retrouver l'origine des dénominations de *nombre*, ἀριθμός, *puissance*, δύναμις, *cube* ou *solide*, κύβος, employés par les Grecs, de *chose*, SHAY, *fortune* ou *quantité*, MAL, et *cube* ou *solide*, KA8B, en usage chez les Arabes.

Suit une Table de concordance des mesures de capacité pour les grains, et de celles servant pour les liquides. L'unité de cette dernière est appelée *hinnu*, comme chez les Hébreux, tandis que l'unité pour les grains, de 10 *hinnus*, porte deux noms que M. Eisenlohr croit pouvoir lire *besha* et *auit*, rappelant assez les noms hébreux de *bath* (liquides) et *epha* (grains), lesquels contenaient également 10 *hin*. Cette Table est intéressante pour la métrologie. Pour l'Arithmétique, elle permet de déterminer la valeur des signes qui représentent les multiples et les fractions de l'étalon pour les grains.

Enfin trois problèmes assez longs dans lesquels, suivant M. Eisenlohr, l'auteur enseignerait la manière de calculer la nourriture des oies et des bœufs.

Tel est, en résumé, le contenu de ce curieux Ouvrage, intéressant encore une fois par les détails qu'il nous fournit sur la manière dont se pratiquaient les calculs arithmétiques à une époque bien antérieure à aucun des documents de ce genre qui nous soient parvenus de la Grèce. Les historiens des Mathématiques pourront y puiser des renseignements intéressants; mais ils devront, s'ils recourent seulement à la traduction résumée par laquelle M. Eisenlohr termine son commentaire, sans consulter ce commentaire lui-même, se rappeler que, en plus d'un point, la traduction *du texte* est loin d'être encore certaine. Seule l'interprétation des calculs est faite avec une exactitude scrupuleuse, et, n'y eût-il que cela, le traducteur allemand aurait déjà mérité de la Science; d'autant mieux, et il faut lui rendre ici hautement cette justice, qu'il a su, avec un vrai talent divinatoire, débrouiller l'enchaînement des calculs, entassés sans ordre dans le papyrus original, et souvent transposés fort loin de la place où ils devraient raisonnablement se trouver.