LAGUERRE

Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 101-104

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__101_1>

Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe; par M. Laguerre.

(Séance du 5 février 1873)

1. J'appellerai simplement *biquadratique sphérique* la courbe qui résulte de l'intersection d'une sphère S et d'une surface du second ordre.

On peut aussi la considérer à un autre point de vue (*). Soit une conique quelconque K; la développable, circonscrite à cette conique et à la sphère S, touche cette sphère le long d'une courbe qui est, comme on le sait, la biquadratique sphérique. Cette développable a d'ailleurs, indépendamment de la conique K, 3 autres lignes doubles K_1, K_2 et K_3, qui sont également des coniques et qui jouent, par rapport à la courbe, exactement le même rôle.

2. Une biquadratique sphérique à 16 foyers ordinaires; c'est-à-dire qu'il y existe 4 génératrices de la sphère de chacun des systèmes (*droites isotropes*), qui sont tangentes à la courbe. Leurs intersections mutuelles déterminent ses 16 foyers *ordinaires;* il est clair d'ailleurs que, la biquadratique étant supposée réelle, 4 de ces foyers sont réels et déterminent complétement tous les autres.

Dans ce qui suit, je désignerai par F, F_1, F_2 et F_3 ces 4 foyers réels. Les 16 foyers sont aussi, comme on le voit facilement, les points d'intersection de la sphère avec les coniques K, K_1, K_2 et K_3

D'où il résulte que les foyers réels peuvent être situés tous les 4 sur l'une de ces coniques, ou être distribués 2 par 2 sur 2 d'entre elles; à ce point de vue, nous distinguerons donc deux classes de biquadratiques, celles de

(*) Voir *Bulletin de la Société philomathique*, mars 1867, ma note *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du second ordre.*

première classe où les foyers réels appartiennent à la même conique, celles de seconde classe où ils sont répartis entre deux coniques.

3. Soit M un point de la sphère S; on sait que par ce point passent deux biquadratiques ayant pour foyers les points F, F_1, F_2 et F_3, et que ces deux courbes se coupent à angle droit.

Pour construire les tangentes en ce point, je distinguerai deux cas :

1° Si la biquadratique est de première espèce, menons un plan par le point M et 2 quelconques des foyers réels, et un second plan par ce même point et les 2 autres foyers.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *et* Mt′ *les traces de ces plans sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* t′Mt *sont les tangentes aux biquadratiques qui se croisent au point* M.

2° Si la biquadratique est de seconde espèce, appelons F et F_1 les foyers qui se trouvent sur une des coniques, F_2 et F_3 ceux qui se trouvent sur une deuxième conique, et menons respectivement des plans par le point M et les droites FF_1, F_2F_3.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *la trace du premier plan et par* Mt′ *une droite perpendiculaire à la trace du second sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* t′Mt *sont les tangentes aux deux biquadratiques qui se croisent au point* M.

4. Ayant ainsi déterminé les tangentes aux biquadratiques qui passent par un point de la sphère, proposons-nous de construire pour l'une d'entre elles le plan osculateur.

A cet effet, je rappellerai une notion géométrique dont je me suis déjà servi dans une note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en février 1867.

Soit M un point de l'espace, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n autres points donnés; déterminons un second point N par la relation suivante

$$\frac{n}{MN} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MA_2} + \ldots + \frac{1}{MA_n},$$

où $\frac{1}{MN}, \frac{1}{MA_1}, \ldots$ ne désignent pas les inverses des longueurs MN, $MA_1, \ldots$, mais bien des *quantités géométriques* égales à ces inverses en valeur absolue, et portées dans les directions des droites joignant M aux points N, $A_1, \ldots$, en sorte que ces quantités se composent comme des forces.

En donnant plus d'extension à la dénomination bien connue due à Maclaurin, nous dirons que le point N, déterminé comme je viens de le dire, est le centre harmonique du point M relativement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

On peut remarquer, à ce sujet, que si les points M, $A_1, A_2, \ldots$ sont sur une même sphère, il en sera de même du point N.

Cette définition étant admise, on a ce théorème :

En un point quelconque M d'une biquadratique sphérique, le plan osculateur passe par le centre harmonique du point M par rapport aux 4 foyers réels de la courbe.

On en déduit la construction suivante :

La tangente au point M ayant été déterminée comme je l'ai dit précédemment, par M et les foyers F et F_1 faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point φ conjugué harmonique de M par rapport à F et F_1; par M et les 2 autres foyers faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point φ' conjugué harmonique de M par rapport à ces deux foyers. Faisons enfin passer un cercle par les trois points M, φ et φ'; le point μ de ce cercle, conjugue harmonique de M par rapport à φ et φ', déterminera avec la tangente le plan osculateur de la courbe au point M.

5. La conique sphérique est un cas particulier de la biquadratique; les 4 foyers réels sont respectivement les points d'intersection F et F_1, F_2 et F_3 de la sphère avec les deux focales réelles du cône du second degré dont elle est la base.

La construction précédente se simplifie alors un peu; en effet, les points F et F_1 étant alors diamétralement opposés, le conjugué harmonique de M par rapport à ces deux points est le second point où la sphère est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de M sur la focale FF_1. La même chose a lieu pour les 2 autres foyers.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donné un point M sur une conique sphérique, si de ce point on abaisse sur les deux focales réelles de la courbe des perpendiculaires rencontrant la sphère en m et m', le plan osculateur de la courbe au point M passe par le conjugué harmonique de ce point relativement aux points m et m'.

6. Il est presque inutile de faire remarquer que les propositions précédentes s'appliquent aux coniques et aux courbe planes (*anallagmatiques* du 4^{me} ordre) qui sont les projections stéréographiques des biquadratiques sphériques.

Relativement à ces dernières courbes, on a le théorème suivant :

En un point quelconque M d'une anallagmatique du 4^{me} ordre, le cercle osculateur passe par le centre harmonique du point M relativement aux 4 foyers réels de la courbe.

7. J'ajouterai quelques mots sur le problème analogue qui est relatif aux surfaces (*anallagmatiques du 4^{me} ordre*) qui, dans l'espace, correspondent aux biquadratiques sphériques.

Ces surfaces, d'après un beau théorème dû à M. Moutard, peuvent être considérées de 5 façons différentes comme l'enveloppe de sphères qui se déplacent en coupant orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre.

Les 5 surfaces du second ordre au moyen desquelles on peut décrire ainsi la surface sont homofocales. Une normale menée en un point M de la surface anallagmatique rencontre chacune de ces surfaces en deux points dont l'un est conjugué du point M.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Quand une normale à une surface anallagmatique se déplace, le rapport anharmonique de 4 quelconques des 5 points conjugués où elle coupe les 5 surfaces homofocales demeure constant (*).

On déduit de là, comme on le voit facilement, une construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique, en s'appuyant sur cette propriété bien connue, que les normales en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure sont dans un même plan, et en employant le théorème de Brianchon.

Mais le problème est susceptible d'une solution plus élégante reposant sur des considérations très-générales que j'ai données dans une note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques, etc.*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en décembre 1871.

Cette solution se déduit de la proposition très-simple qui suit.

Appelons centre d'une surface anallagmatique le centre C commun aux 5 surfaces du second ordre homofocales qui permettent de la décrire.

Cela posé :

Étant donnée une droite quelconque MT *touchant une anallagmatique au point* M, *cette tangente rencontre de nouveau la surface en deux points; désignons par* I *le milieu de la droite joignant les centres des sphères qui touchent la surface en ces points et passent par* M. *Si, par le point* M, *on mène une droite parallèle à* IC, *dirigée dans le même sens et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans la surface par le plan normal passant par* MT.

(*) J'ai communiqué verbalement ce théorème à la Société philomathique en mai 1868, et précisément dans le but d'en déduire la construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique. Depuis, M. Darboux l'a obtenu de son côté et en a développé les principales conséquences dans un *Mémoire sur la cyclide* inséré aux *Annales de l'École normale supérieure*, 1872.