BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN DIEUDONNÉ

Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. II

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 193-239
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__193_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE THÉORÈME DE LEBESGUE-NIKODYM (II);

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

Ce travail fait suite à un article que nous avons publié sous le même titre en 1941 ([1]), et que nous désignerons de façon abrégée par la lettre L dans ce qui suit. Nous nous proposons de compléter cet article en donnant en premier lieu une condition *nécessaire et suffisante* pour que le « théorème de Lebesgue-Nikodym abstrait », tel qu'il est énoncé dans L, soit vrai. En même temps, nous établirons, par des méthodes inspirées des récents travaux de F. Riesz ([2]), H. Freudenthal ([3]) et S. Kakutani ([4]), que les seuls « anneaux de Riesz » (*cf.* n° 4) pour lesquels ce théorème soit vrai, sont (à une isomorphie près) les *anneaux de fonctions sommables* pour une mesure complètement additive sur un ensemble Ω (deux fonctions n'étant pas considérées comme distinctes si elles sont égales sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle); en d'autres termes, on ne peut espérer arriver, par l'étude « abstraite » du théorème de Lebesgue-Nikodym, à des cas d'application de ce théorème, essentiellement distincts du cas classique.

Dans une seconde partie, nous étudions les cas où le théorème de Lebesgue-Nikodym *n'est plus valable*. Il est remarquable que, même alors, un anneau de Riesz soit encore, sous des hypothèses très larges, isomorphe à un anneau de fonctions sommables.

([1]) *Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 547-555. Autant que possible, nous conservons la terminologie et les notations de cet article.

Pour les notions et résultats de Topologie générale que nous utilisons, *voir* les *Eléments de Mathématique* de N. Bourbaki (*Actual. Scient. et Ind.*, n°s 846, 858 et 916).

([2]) F. RIESZ, *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires* (*Annals of Math.*, t. 41, 1940, p. 174-206). Nous désignerons ce Mémoire par R — 1.

([3]) H. FREUDENTHAL, *Teilweise geordnete Moduln* (*Proceedings Acad. Amsterdam*, t. 39, 1936, p. 641-651).

([4]) S. KAKUTANI, *Concrete representation of abstract* (L)*-spaces and the mean ergodic theorem* (*Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 523-537).

Il ne sera peut-être pas inutile au lecteur, pour une compréhension plus facile de la marche des démonstrations, d'avoir constamment à l'esprit ce résultat final; le principe directeur de tous les raisonnements est précisément cette analogie des « éléments » abstraits avec les fonctions, analogie en quelque sorte pressentie *a priori* avant d'être justifiée ([5]).

I.

1. Nous appellerons *espace de Riesz* un espace vectoriel E muni d'une *structure d'ordre* et satisfaisant aux conditions (I), (II) et (III) de L, n° 1. Le premier de ces axiomes entraîne que toute partie *finie* de E admet une borne supérieure; nous dirons que E est un espace de Riesz *cohérent* si *toute partie majorée* de E admet une borne supérieure; on sait ([6]) que l'espace F des formes linéaires « relativement bornées » (L, n° 1) sur un espace de Riesz quelconque E est un espace de Riesz cohérent. Il est facile de voir que toutes les propriétés démontrées par F. Riesz (*loc. cit.*) pour un tel espace de formes linéaires, sont valables plus généralement dans tout espace de Riesz cohérent E ([7]); il en est ainsi, en particulier, des théorèmes 14 et 15 du Mémoire cité de F. Riesz, dont nous aurons à nous servir par la suite. Si B est une « famille complète » dans un tel espace, tout élément $x \in E_+$ se met d'une seule manière, en vertu de ces théorèmes, sous la forme $x = x' + x''$, où x' et x'' sont deux éléments $\geqq 0$, tels que x' appartienne à B et que x'' soit disjoint de tout élément de B; nous dirons que x' est *la partie de x appartenant à la famille complète* B.

2. Avant d'aborder le sujet de cet article, nous aurons à établir des propositions préliminaires concernant les *topologies* qu'on peut définir sur un espace de Riesz E au moyen de formes linéaires positives (L, n° 1) sur E. Soit (U_α) une famille de formes linéaires positives sur E; les fonctions $N_\alpha(x) = U_\alpha(|x|)$ sont des *semi-normes* sur E; elles définissent donc sur E une topologie d'espace

([5]) C'est d'ailleurs ce même principe qui domine tous les travaux précités.
([6]) R — 1, p. 179, th. 1.
([7]) Je dois cette remarque à H. Cartan.

localement convexe [8], pourvu que, pour tout $x \neq 0$, il existe au moins un indice α tel que $U_\alpha(|x|) \neq 0$; nous supposerons cette condition vérifiée. Alors les formes linéaires U_α sont uniformément continues dans E, en vertu de l'inégalité

$$|U_\alpha(x)| \leqq U_\alpha(|x|) = N_\alpha(x);$$

la fonction $|x|$ est uniformément continue car

$$||x|-|y|| \leqq |x-y|,$$

d'où, pour tout α, $N_\alpha(|x|-|y|) \leqq N_\alpha(x-y)$. On en déduit que $x^+ = \frac{1}{2}(|x|+x)$ et $x^- = \frac{1}{2}(|x|-x)$ sont uniformément continues dans E, puis que $\sup(x, y) = x + (y-x)^+$ et $\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$ sont uniformément continues dans $E \times E$. Comme l'ensemble E_+ des éléments $\geqq 0$ de E est identique à l'ensemble des x tels que $x^- = 0$, il résulte de la continuité de x^- que E_+ est *fermé* dans E.

Considérons maintenant l'espace vectoriel $\overline{E}$, *complété* de l'espace vectoriel topologique E. Les fonctions $|x|$, x^+ et x^-, uniformément continues dans E, se prolongent par continuité à $\overline{E}$; nous désignerons leurs prolongements respectifs par les mêmes notations (bien que, jusqu'à présent, aucune structure d'ordre ne soit encore définie sur $\overline{E}$). De même, les formes linéaires U_α se prolongent par continuité à $\overline{E}$; les fonctions $U_\alpha(|x|)$ sont encore des semi-normes sur $\overline{E}$, et définissent la topologie de cet espace. Nous allons voir qu'on peut définir sur $\overline{E}$ une *structure d'ordre* pour laquelle $\overline{E}$ deviendra un espace de Riesz, et les fonctions prolongées x^+, x^- et $|x|$ coïncideront avec les fonctions correspondantes définies sur $\overline{E}$ au moyen de cette structure d'ordre.

On sait qu'on peut définir une structure d'ordre sur un espace vectoriel en se donnant l'ensemble P des éléments $\geqq 0$ pour cette structure, pourvu que P satisfasse aux conditions $P + P \subset P$, $\lambda P \subset P$ pour tout scalaire $\lambda > 0$, et $P \cap (-P) = \{0\}$. Dans

---

[8] Pour les notions relatives aux espaces localement convexes que nous utilisons ici, *voir* par exemple mon Mémoire *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (2), t. 59, 1942, p. 107-139).

l'espace $\overline{E}$, nous voulons que l'ensemble P soit l'ensemble des x tels que $x^- = 0$; il doit donc être *fermé*, et comme il contient E_+, il doit contenir son adhérence $\overline{E}_+$ dans $\overline{E}$; nous allons voir qu'en prenant $P = \overline{E}_+$, on répond au problème posé. En effet, l'application $(x, y) \to x + y$ est continue dans $\overline{E} \times \overline{E}$, et applique $E_+ \times E_+$ dans E_+; elle applique donc l'adhérence $\overline{E}_+ \times \overline{E}_+$ de $E_+ \times E_+$ dans $\overline{E}_+$, autrement dit, on a $\overline{E}_+ + \overline{E}_+ \subset \overline{E}_+$; on prouve de même que $\lambda \overline{E}_+ \subset \overline{E}_+$ pour $\lambda > 0$. D'autre part, on a, par prolongement, l'identité $x = x^+ - x^-$ dans $\overline{E}$; dans $\overline{E}_+$, on a, par prolongement, $x^- = 0$; comme $x \to -x$ est un homéomorphisme de $\overline{E}$ sur lui-même, $-\overline{E}_+$ est l'adhérence de $-E_+$, donc on a, par prolongement, $x^+ = 0$ dans $-\overline{E}_+$; il en résulte que, si x appartient à la fois à $\overline{E}_+$ et à $-\overline{E}_+$, l'on a $x = 0$.

$\overline{E}$ est ainsi muni d'une structure d'ordre; reste à montrer qu'il est *réticulé* pour cette structure; il suffira pour cela de prouver que, pour tout $x \in \overline{E}$, les éléments x et 0 ont une *borne supérieure* égale à x^+. Comme on a $x^+ - x \geqq 0$, c'est-à-dire $x^+ - x \in E_+$ pour tout $x \in E$, on a aussi, par prolongement, $x^+ - x \in \overline{E}_+$, c'est-à-dire $x^+ \geqq x$ pour tout $x \in \overline{E}$; de même, $x^+ \geqq 0$ pour tout $x \in \overline{E}$. Montrons inversement que, si $u \in \overline{E}$ est tel que $u \geqq x$ et $u \geqq 0$, on a $u \geqq x^+$. Comme x^+ est uniformément continue dans $\overline{E}$, pour tout voisinage V de 0, il existe un voisinage symétrique W de 0, contenu dans V, tel que, pour $x' - x \in 3W$, on ait $x'^+ - x^+ \in V$. Prenons $x' \in E$ tel que $x' - x \in W$; alors le voisinage $(u - x') + 2W$ de $u - x'$ contient le voisinage $(u - x) + W$ de $u - x$, et comme $u - x \in \overline{E}_+$ par hypothèse, il contient un point $u' - x' \in E_+$. De même, le voisinage $u + W$ de u contient un point $u'' \in E_+$; dans E, on a $u' \geqq x'$, $u'' \geqq 0$, donc $\sup(u', u'') \geqq x'^+$, ce qui s'écrit $u' + (u'' - u')^+ - x'^+ \in E_+$. Or, on a

$$u - x^+ - (u' + (u'' - u')^+ - x'^+) = (u - u') - (u'' - u')^+ + (x'^+ - x^+);$$

les hypothèses entraînent $u - u' \in 2W$, $u'' - u' \in 3W$, donc $(u'' - u')^+ \in V$; il en résulte que le voisinage $(u - x^+) + 4V$ de $u - x^+$ contient un point de E_+; comme V est arbitraire, on a $u - x^+ \in \overline{E}_+$, c'est-à-dire $u \geqq x^+$.

3. Avant d'établir la propriété fondamentale de l'espace de Riesz complété $\overline{E}$, nous noterons que, dans $\overline{E}$ (et aussi dans E), il y a un *principe de prolongement des inégalités* analogue à celui qui est valable pour les inégalités numériques.

De façon précise, soit A un ensemble *filtré* par un filtre $\mathfrak{F}$, et soient f et g deux fonctions définies dans A, à valeurs dans $\overline{E}$. Si, pour tout $x \in A$ (ou seulement pour tout x appartenant à un ensemble du filtre $\mathfrak{F}$), on a $f(x) \leqq g(x)$, et si les limites de f et de g suivant le filtre $\mathfrak{F}$ existent, on a $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqq \lim_{\mathfrak{F}} g$. En considérant la différence $g - f$, on peut se borner à faire la démonstration lorsque $f = 0$; l'hypothèse $g \geqq 0$ entraîne que, pour tout ensemble M du filtre $\mathfrak{F}$, on a $g(M) \subset \overline{E}_+$; comme $\overline{E}_+$ est fermé, il contient tout point adhérent à $g(M)$, et en particulier $\lim_{\mathfrak{F}} g$.

Théorème 1. — *Pour qu'un ensemble filtrant à droite* A *dans* $\overline{E}$ *admette une borne supérieure, il faut et il suffit que, pour tout indice* α, $U_\alpha(x)$ *soit majorée dans* A; *la borne supérieure de* A *est alors aussi la limite du filtre des sections de* A (⁹).

La condition est évidemment nécessaire; montrons qu'elle est suffisante. Comme la fonction numérique U_α est croissante et majorée dans A, elle tend vers une limite a_α suivant le filtre des sections $\mathfrak{F}$ de A; autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in A$ tel que, pour tout $x \in A$ tel que $x \geqq x_0$, $|U_\alpha(x) - a_\alpha| \leqq \varepsilon$. Si $y \geqq x_0$ et $z \geqq x_0$ appartiennent à A, il existe par hypothèse un $x \in A$ tel que $x \geqq y$ et $x \geqq z$, donc $U_\alpha(|x - y|) = U_\alpha(x - y) \leqq 2\varepsilon$, $U_\alpha(|x - z|) = U_\alpha(x - z) \leqq 2\varepsilon$, et finalement $U_\alpha(|y - z|) \leqq 4\varepsilon$. Cela prouve que $\mathfrak{F}$ est un *filtre de Cauchy* sur $\overline{E}$, donc converge vers une limite u dans $\overline{E}$. Pour tout $x \in A$, l'ensemble des $y \in A$ tels que $y \geqq x$ appartient à $\mathfrak{F}$ par définition, donc $u = \lim_{\mathfrak{F}} y \geqq x$; d'autre part, si v est un majorant de A, on a $x \leqq v$ pour tout $x \in A$, donc $u = \lim_{\mathfrak{F}} x \leqq v$, ce qui achève de montrer que u est la *borne supérieure* de A dans $\overline{E}$.

(⁹) Ce théorème généralise un résultat de F. Riesz, concernant le cas où il n'y a qu'une seule forme linéaire U_α, et où l'ensemble filtrant se réduit à une suite croissante [F. Riesz, *Sur la théorie ergodique des espaces abstraits* (*Acta Szeged.*, t. 10, 1941, p. 7)].

Corollaire. — *L'espace de Riesz* $\overline{E}$ *est cohérent.*

En effet, soit A un ensemble majoré dans $\overline{E}$, B l'ensemble des bornes supérieures des parties *finies* de A; B est évidemment filtrant à droite, et majoré par tout majorant de A; le théorème 1 montre que B admet une borne supérieure, qui est aussi la borne supérieure de A.

4. Nous dirons que E est un *anneau de Riesz* s'il est muni (en outre de sa structure d'espace de Riesz) d'une structure *d'anneau commutatif* avec la propriété $\lambda(xy) = (\lambda x)y$ pour tout scalaire λ, et s'il vérifie la condition (IV) de L, n° 2. De cette dernière condition, on déduit l'identité $|xy| = |x|.|y|$, qui lui est donc équivalente (L, n° 2). Pour tout $x \in E$, on a $x^+x^- = 0$ [L, n° 2 (10)]; on en déduit la relation $xy = \sup(x, y)\inf(x, y)$. En effet, on a $\sup(x, y) = x + (y - x)^+$, $\inf(x, y) = y - (y - x)^+$, donc $\sup(x, y)\inf(x, y) = xy + (y - x)(y - x)^+ - [(y - x)^+]^2 = xy$; *a fortiori*, on a l'inégalité

$$xy \leqq (x + y)\inf(x, y), \tag{1}$$

si x et y sont $\geqq 0$. En particulier, si x et y sont *disjoints*, on a $xy = 0$; pour que la réciproque soit vraie, il faut et il suffit que, dans E, la relation $x^2 = 0$ entraîne $x = 0$; on a alors en effet $0 \leqq [\inf(x, y)]^2 \leqq xy = 0$, donc $\inf(x, y) = 0$.

5. Nous allons désormais supposer donnée une forme linéaire positive U définie sur l'anneau de Riesz E, et assujettie à l'axiome suivant :

(V_a) *La relation* $U(x^2) = 0$ *entraîne* $x = 0$.

Cet axiome entraîne évidemment que si $x^2 = 0$, on a $x = 0$; inversement, si cette propriété est vraie, et si U vérifie l'axiome (V) de L (n° 3), il vérifie aussi (V_a) (11). Le lecteur observera que nous

(10) Dans la démonstration de cette proposition (L, p. 551), il faut lire, ligne 11,

$$|xx'| = x'^2 \quad \text{et} \quad |xx'| \leqq (x^+)^2 + (x^-)^2.$$

(11) Si les éléments de l'anneau E sont des fonctions réelles finies définies sur un certain ensemble Ω, les conditions (V) et (V_a) sont équivalentes. En général, il résulte de propositions démontrées plus loin (n^{os} 18 et 30) que (V_a) *entraîne* toujours (V).

n'introduisons pas la condition (VI) de L, n° 3, qui ne jouera *aucun rôle* dans ce qui suit.

Pour toute forme linéaire relativement bornée X sur E, et tout $y \in E$, nous désignerons par X_y la forme linéaire relativement bornée $x \to X(yx)$ Pour tout $y \geqq 0$, la forme linéaire U_y est positive, et réciproquement, comme le montre le raisonnement de L, n° 4 [où n'intervient en réalité que la condition (V_a)]; U_y ne peut donc être identiquement nulle que si $y = 0$. *A fortiori*, pour tout $x \neq 0$, il existe un $y > 0$ tel que $U_y(|x|) = U_{|x|}(y) \neq 0$, ce qui prouve que les semi-normes $N'_y(x) = U_y(|x|)$, où y parcourt l'ensemble des éléments > 0 de E, définissent sur E une structure d'espace localement convexe. Comme dans L, nous désignerons par E_U le *complété* de E, muni de cette structure topologique; il résulte des n^{os} 2 et 3 que E_U est un espace de Riesz *cohérent*, et que pour tout $y \in E$, la forme linéaire U_y est continue dans E, et se prolonge par suite à E_U en une forme linéaire continue (positive si $y \geqq 0$) que nous désignerons par la même notation; lorsque y parcourt l'ensemble des éléments > 0 de E, les $N'_y(x) = U_y(|x|)$ sont des semi-normes définissant la topologie de E_U; on notera qu'on obtient un système fondamental de voisinages de O dans E_U en prenant les ensembles définis par une seule inégalité $N'_y(x) \leqq 1$, y parcourant l'ensemble des éléments > 0 de E; en effet, si $y_1, \ldots, y_n$ sont des éléments > 0 de E en nombre fini, et $y = \sup(y_i)$ la relation $N'_y(x) \leqq 1$ entraîne $N'_{y_i}(x) \leqq 1$ pour $1 \leqq i \leqq n$.

6. Nous dirons qu'un élément x de E_U est *modéré* s'il existe $a \in E_+$ tel que $|x| \leqq a$. Il est immédiat que l'ensemble A_U des éléments modérés forme un sous-espace de Riesz de E_U; si x et y sont modérés et $x \leqq y$, tout élément $z \in E_U$ tel que $x \leqq z \leqq y$ est modéré; par suite, A_U est un espace de Riesz *cohérent*, car si B est une partie de A_U majorée *dans* A_U, sa borne supérieure *dans* E_U appartient à A_U et est donc aussi la borne supérieure de B *dans* A_U. Mais une partie de A_U peut être majorée *dans* E_U sans l'être *dans* A_U; de façon plus précise, *tout élément* $y \geqq 0$ *de* E_U *est la borne supérieure des éléments modérés* $z \leqq y$. En effet, lorsque x tend vers y en restant dans E_+, $\inf(x, y)$ tend vers $\inf(y, y) = y$, et est modéré.

Nous allons maintenant montrer qu'on peut définir sur A_U une structure d'*anneau de Riesz* telle que E soit un sous-anneau de A_U. Pour cela remarquons d'abord que, pour tout x fixe dans E, l'application linéaire $y \to xy$ de E dans E est *continue*; en effet, pour tout $z \in E_+$, on a $N'_z(yx) = U(z\,|\,xy\,|) = N'_{z|x|}(y)$. On peut donc prolonger par continuité cette application à E_U, et le produit xy ainsi défini possède les propriétés énumérées dans L, n°5. En particulier, xy est défini pour $x \in E$ et $y \in A_U$; de plus pour tout y fixe dans A_U, l'application $x \to xy$ est continue dans E; en effet, si $|y| \leqq a$, où $a \in E_+$, on a, pour tout $z \in E_+$,

$$N'_z(xy) = U_z(\,|\,xy\,|\,) \leqq U_z(a\,|\,x\,|\,) = N'_{az}(x).$$

Par un nouveau prolongement, on peut donc définir le produit xy pour $x \in A_U$ et $y \in E_U$, et l'on a encore les mêmes propriétés de ce produit que lorsque $x \in E$. En outre, si B est une partie majorée de E_U, et x un élément modéré et $\geqq 0$, on a

$$x \sup_{y \in B} y = \sup_{y \in B} xy. \tag{2}$$

En effet, si C est l'ensemble filtrant des bornes supérieures des parties finies de B, $\mathfrak{F}$ son filtre des sections, le premier membre de (2) est égal à $x \lim_{\mathfrak{F}} y$ et le second à $\lim_{\mathfrak{F}}(xy)$, en vertu du théorème 1 et de l'axiome (IV); la relation (2) résulte donc de la continuité de l'application $y \to xy$.

Le produit de deux éléments quelconques de A_U est donc en particulier défini, et détermine sur A_U une structure d'anneau de Riesz. En général, l'application $(x, y) \to xy$ n'est pas continue dans $A_U \times A_U$; mais si, pour tout $a \in E_+$ on désigne par I_a l'ensemble des $x \in E_U$ tels que $|x| \leqq a$, xy est *continue* (et même *uniformément continue*) *dans l'ensemble* $I_a \times I_a$. En effet, pour x, y, x', y' dans I_a, on a

$$|x'y' - xy| = |x'(y'-y) + y(x'-x)| \leqq a(|y'-y| + |x'-x|),$$

et par suite pour tout $z \in E_+$

$$N'_z(x'y' - xy) \leqq N'_{az}(y'-y) + N'_{az}(x'-x).$$

On notera que la trace J_a de I_a sur E est telle que I_a soit l'*adhérence* de J_a dans E_U; en effet, si $x \in I_a$, et si y tend vers x

en restant dans E, $\sup[\inf(y, a), -a]$ tend vers

$$\sup[\inf(x, a), -a] = \sup(x, -a) = x,$$

et appartient à J_a.

7. Suivant le même plan que dans L, considérons maintenant l'application $y \rightarrow U_y$ de E dans l'espace de Riesz (complet) F des formes linéaires relativement bornées sur E; c'est une application linéaire biunivoque de E sur un sous-espace F_U de F, et un isomorphisme de la structure d'ordre de E sur celle de F_U (L, n° 4). Pour aller plus loin, il nous faut établir le théorème suivant, qui est démontré dans L en utilisant l'axiome (VII), mais qui est en réalité valable moyennant le seul axiome (V_a).

Théorème 2. — *Pour tout $y \in E$, on a*

$$|U_y| = U_{|y|}. \tag{3}$$

Tout revient à démontrer que, pour tout $x \in E_+$, on a

$$U(|y|x) \leqq |U_y|(x),$$

$|U_y|(x)$ étant défini comme la borne supérieure des sommes $\sum_i |U(yx_i)|$ pour toutes les *partitions* (x_i) de x dans E_+ (L, Introduction et n° 4) [12]. On peut écrire

$$U(|y|x) = U(y^+x) + U(y^-x).$$

Dans l'espace de Riesz cohérent E_U, soit x' la partie de x appartenant à la famille complète de y^+; $x'' = x - x'$ est donc disjoint de y^+; si l'on pose $x_n = \inf(ny^+, x)$ les éléments x_n appartiennent à E_+ et forment une suite croissante telle que

$$x' = \sup x_n = \lim x_n \text{ [13]};$$

---

[12] Cette expression de $|X|(x)$, pour une forme linéaire relativement bornée X et un $x \geqq 0$, peut d'ailleurs s'obtenir sans utiliser le théorème général de N. Bourbaki [L, formule (2)]; il suffit d'appliquer à l'ensemble des deux formes linéaires X, —X, le raisonnement de F. Riesz dans la démonstration du théorème 1 de R-I (p. 179).

[13] Ce résultat, établi par H. Freudenthal et S. Kakutani par des raisonnements

on en tire $x'' = \inf(x - x_n) = \lim(x - x_n)$, et comme

$$\inf(y^+, x'') = 0,$$

on a, en vertu de la continuité de $\inf(u, v)$ dans $E_U \times E_U$,

$$\lim[\inf(y^+, x - x_n)] = 0.$$

On a aussi $\lim[y^+(x - x_n)] = 0$, car $y^+x'' = 0$ dans l'anneau de Riesz A_U. Nous nous proposons de montrer qu'on a

$$\lim U[y^+(x - x_n)] = 0;$$

cela ne résulte pas immédiatement de ce qui précède, car en général U *n'est pas continue* dans E, ni même dans un ensemble J_a[14]. Pour établir cette relation, remarquons que, si

$$t_n = \inf(y^+, x - x_n),$$

on a, d'après (1), $y^+(x - x_n) \leqq t_n(y^+ + x - x_n) \leqq (x + |y|)\, t_n$, d'où $U[y^+(x - x_n)] \leqq U_{x+|y|}(t_n)$; comme t_n tend vers o, et que $U_{x+|y|}$ est continue dans E_U, on a bien

$$\lim U[y^+(x - x_n)] = 0.$$

Cette relation s'écrit aussi $\lim U(y^+x_n) = U(y^+x)$; or, y^- et x_n sont disjoints, donc $y^-x_n = 0$, $y^+x_n = yx_n$, d'où finalement

$$\lim U(yx_n) = U(y^+x).$$

En d'autres termes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément z_1 de E_+, majoré par x et par un multiple scalaire de y^+, et tel que

$$U(y^+z) \leqq |U(yz_1)| + \varepsilon.$$

---

de nature topologique, est valable dans tout espace de Riesz cohérent (muni ou non d'une topologie). En effet, d'après le théorème 14 de R-I (p. 185), x' est la borne supérieure des éléments u de la famille complète engendrée par y^+, tels que $u \leqq x$; mais u est lui-même borne supérieure des éléments $w \leqq u$ et majorés par un multiple entier de y^+; il en résulte que x' est borne supérieure des éléments $w \leqq x$ et majorés par un multiple entier de y^+; comme tout x_n est de cette forme, et que réciproquement tout w est majoré par un x_n, on a bien $x' = \sup x_n$.

(14) Dans l'exemple donné dans L, n° 8, la forme linéaire U n'est continue dans aucun ensemble J_a, où a est une fonction telle que $a'(0) > 0$. *Voir* note (17).

De la même manière, on prouve qu'il existe $z_2 \in E_+$, majoré par x et par un multiple scalaire de y^-, et tel que

$$U(y^- x) \leqq |U(yz_2)| + \varepsilon.$$

Comme y^+ et y^- sont disjoints, il en est de même de z_1 et z_2 ; donc, de $z_1 \leqq x = (x - z_2) + z_2$, on tire $z_1 \leqq x - z_2$(15), ou $z_1 + z_2 \leqq x$. Si l'on pose $z_3 = x - (z_1 + z_2)$, les z_i ($i = 1, 2, 3$) forment une partition de x, et l'on a, d'après de qui précède,

$$U(|y|x) \leqq \sum_{i=1,2,3} |U(yz_i)| + 2\varepsilon \leqq |U_y|(x) + 2\varepsilon;$$

comme ε est arbitraire, le théorème est démontré.

Corollaire. — *Pour toute forme linéaire positive* X *sur* E *telle que* $X \leqq \lambda U$ *pour un scalaire* $\lambda > 0$, *et pour tout* $y \in E$, *on a*

$$(4) \qquad |X_y| = X_{|y|}.$$

En effet, la seule propriété de U qui soit intervenue dans la démonstration précédente est la continuité de U_y dans E pour tout $y \in E_+$; tout revient donc à prouver que X_y est continue dans E pour tout $y \in E_+$; mais comme, pour tout $x \in E$,

$$|X_y(x)| \leqq X_y(|x|) \leqq \lambda U_y(|x|) = \lambda N'_y(x),$$

cela résulte de la définition de la topologie dans E.

8. Le théorème 2 prouve que l'application $y \to U_y$ de E sur F_U est un isomorphisme de la structure topologique du premier de ces espaces sur celle du second (la topologie sur F étant définie, on le rappelle, par les semi-normes $N_x(X) = |X|(x)$, où x parcourt E_+); elle se prolonge donc en un isomorphisme du complété E_U de E sur l'adhérence $\overline{F}_U$ de F_U dans l'espace complet F; on désigne

(15) R-I, th. 5 (p. 183). Ce théorème est valable dans tout *groupe réticulé*, et pourrait être appelé *lemme d'Euclide*, car lorsqu'il s'agit du groupe multiplicatif des nombres rationnels > 0, ordonné par la relation « x divise y », il se réduit à la proposition bien connue d'Euclide : « si un nombre divise un produit de deux nombres et est premier à l'un d'eux, il divise l'autre »; le raisonnement par lequel Euclide démontre cette proposition est d'ailleurs identique au raisonnement de F. Riesz pour établir son théorème 5.

encore cet isomorphisme par $y \to U_y$, et l'on prouve, comme dans L, n° 4, que c'est un isomorphisme de la structure d'ordre de E_U sur celle de $\overline{F}_U$ (induite par celle de F), en montrant que $\overline{F}_U \cap F_+$ est l'adhérence de $F_U \cap F_+$. De plus, en vertu de la continuité de la fonction $X \to |X|$ dans F, on a encore, par prolongement, la relation (3) pour tout $y \in E_U$; on en conclut que la borne supérieure de U_x et U_y, prise *dans* F, appartient à $\overline{F}_U$ et est égale à $U_{\sup(x, y)}$, car elle est égale à

$$\frac{1}{2}(U_x + U_y + |U_x - U_y|) = \frac{1}{2}(U_{x+y} + U_{|x-y|}).$$

Plus généralement, si B est une partie de $\overline{F}_U$, majorée *dans* F, sa borne supérieure *dans* F (qui existe puisque F est cohérent) appartient à $\overline{F}_U$; c'est en effet la limite, dans F, du filtre des sections de l'ensemble filtrant formé des bornes supérieures des parties finies de B; comme cet ensemble est contenu dans l'ensemble fermé $\overline{F}_U$, la limite de son filtre des sections appartient aussi à $\overline{F}_U$.

Pour $y \in E_U$, la forme linéaire U_y sur E peut être définie de façon plus concrète; en effet, pour $x \in E$, U_x est une forme linéaire continue sur E, qui se prolonge, comme on l'a vu, en une forme linéaire continue sur E_U; d'autre part, l'application $X \to X(x)$ est continue dans F pour tout $x \in E$, donc $y \to U_y(x)$ est une forme linéaire continue dans E_U; comme on a

$$U_x(y) = U_y(x) = U(xy)$$

pour tout y appartenant à l'ensemble partout dense E dans E_U, on a aussi, par continuité

$$U_y(x) = U_x(y) \tag{5}$$

pour tout $x \in E$ et tout $y \in E_U$ (mais on ne peut plus écrire $U(xy)$ la valeur commune de ces deux fonctions, puisque U ne peut en général être prolongée à E_U; l'écriture $U(xy)$ introduite dans L, n° 5 est donc abusive). En outre, si $x \in E$, $z \in E$ et $y \in E_U$, on a

$$U_y(xz) = U_{xy}(z). \tag{6}$$

En effet, d'après (5), tout revient à montrer que $U_{xz}(y) = U_z(xy)$; or, cette relation est évidente lorsque $y \in E$, et on passe de là au cas général en remarquant que, dans E_U, les fonctions U_z, U_{xz} et $y \to xy$ sont continues.

9. Lorsque y n'appartient pas à E, la forme linéaire relativement bornée U_y sur E *n'est pas continue dans* E en général. Toutefois, nous allons voir que, pour tout $a \in E_+$, U_y est *uniformément continue dans l'ensemble* J_a des $x \in E$ tels que $|x| \leqq a$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in E$ tel que $|U_y - U_z|(a) \leqq \varepsilon$, c'est-à-dire, pour toute partition (x_i) de a dans E,

$$\sum_i |U_y(x_i) - U_z(x_i)| \leqq \varepsilon;$$

en particulier, pour tout $x \in E$ tel que $0 \leqq x \leqq a$, on a

$$|U_y(x) - U_z(x)| \leqq \varepsilon,$$

et par suite, pour tout $x \in J_a$, $|U_y(x) - U_z(x)| \leqq 2\varepsilon$. Cela signifie que, dans J_a, U_y est limite *uniforme* de fonctions uniformément continues, et est par suite uniformément continue; elle peut donc se prolonger par continuité à l'adhérence I_a de J_a dans E_U (nº 6), et il est immédiat que ce prolongement, qu'on note encore U_y, ne dépend pas de a; par continuité, on a

$$U_y(x + x') = U_y(x) + U_y(x') \qquad \text{et} \qquad U_y(\lambda x) = \lambda U_y(x)$$

pour deux éléments modérés quelconques x, x', et un scalaire quelconque λ; autrement dit, U_y est ainsi prolongée en une forme linéaire relativement bornée *sur l'anneau de Riesz* A_U, continue dans tout ensemble I_a, mais non continue dans A_U lui-même, en général.

Dans le cas particulier où $y \in A_U$, la forme linéaire U_y est *continue dans* E, et peut par suite être prolongée à E_U par continuité; en effet, si $|y| \leqq a$, où $a \in E_+$, on a, pour tout $x \in E_+$,

$$|U_y(x)| \leqq |U_y|(x) = U_{|y|}(x) \leqq U_a(x),$$

et U_a est continue dans E.

En outre, on a encore la relation (5) pour $x \in A_U$ et $y \in E_U$; pour le voir, il suffit de prouver que l'application $y \to U_y(x)$ est continue dans E_U; or, si $|x| \leqq a$, où $a \in E_+$,

$$|U_y(x)| \leqq U_{|y|}(|x|) \leqq U_{|y|}(a) = N'_a(y).$$

De ces remarques, on déduit qu'on peut étendre la validité de la relation (6) lorsque $x \in A_U$, $z \in A_U$ et $y \in E_U$. En effet, du cas évident où $x \in E$, $z \in E$ et $y \in E$, on passe d'abord par continuité au cas où $z \in A_U$, $x \in E$, $y \in E$; laissant z fixe, et écrivant la relation sous la forme $U_y(zx) = U_z(xy)$, on passe au cas où $x \in A_U$, $z \in A_U$, $y \in E$; enfin, en écrivant la relation sous la forme $U_{xz}(y) = U_z(xy)$, et utilisant la continuité de $y \to xy$ dans E_U, on passe au cas général.

10. Pour toute forme linéaire X sur E, telle que $o \leqq X \leqq \lambda U$ pour un scalaire $\lambda > o$, l'application linéaire $y \to X_y$ de E dans F est encore continue; en effet, pour tout $x \in E_+$, on a, d'après (4),

$$N_x(X_y) = |X_y|(x) = X_{|y|}(x) \leqq \lambda\, U_{|y|}(x) = \lambda\, N'_x(y).$$

On en conclut, comme au n° 8, qu'on peut prolonger cette application linéaire à E_U par continuité, et que, si on la désigne encore par $y \to X_y$, on a identiquement, pour $x \in E$, $y \in E_U$, $X_y(x) = X_x(y)$ (on a noté en effet, dans le corollaire du théorème 2, que X_x est continue dans E, et se prolonge par suite à E_U par continuité). En outre, tous les raisonnements du n° 9 sont encore valables lorsqu'on y remplace U par X.

11. Notre but va être maintenant de démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 3. — *Étant donnés un anneau de Riesz* E, *et une forme linéaire positive* U *sur* E, *satisfaisant à* (V_a), *pour que le théorème de Lebesgue-Nikodym soit vrai pour* E *et* U (c'est-à-dire que l'ensemble des éléments $\geqq o$ de $\overline{F}_U$ soit identique à la famille complète engendrée par U), *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

(VII_a). *Pour tout* $x \in E_+$, *on a* $U(x) = \sup\limits_{y \in S} U(yx)$.

On rappelle (L, n° 3) que S est l'ensemble des $y \in E_+$ tels que $yx \leqq x$ pour *tout* $x \in E_+$.

Théorème 4. — *Les hypothèses sur* E *et* U *étant les mêmes que dans le théorème* 3, *pour que le théorème de Lebesgue-*

Nikodym soit vrai, pour E *et* U, *il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme* ψ *de* E *sur un anneau de Riesz formé de classes* [16] *de fonctions sommables sur un ensemble* Ω *pour une mesure* μ, *tel que pour tout* $x \in$ E *et toute fonction* u_x *de la classe* $\psi(x)$, *on ait* $\mathrm{U}(x) = \int_\Omega u_x(\xi)\, d\mu$.

Désignons par T l'ensemble des éléments $y \geqq 0$ *de* $\mathrm{A_U}$ tels que, pour tout $x \in \mathrm{E}_+$, on ait $yx \leqq x$. A côté de la condition (VII_a), nous introduirons aussi la suivante :

(VII_b). *Pour tout* $x \in \mathrm{E}_+$, *on a* $\mathrm{U}(x) = \sup\limits_{y \in \mathrm{T}} \mathrm{U}_y(x)$.

Il est clair que (VII_a) entraîne (VII_b), car l'ensemble S n'est autre que la *trace* sur E de l'ensemble T. On notera d'autre part que (VII_a) n'exprime qu'une partie de la condition (VII) de L, n° 3 : on obtient (VII_a) en se restreignant, dans (VII), au cas où $\mathrm{X} = \mathrm{U}$ et $x \geqq 0$; (VII) entraîne donc (VII_a). Cela étant, nous allons raisonner comme suit : nous démontrerons d'abord une forme imparfaite du théorème 3, en y remplaçant la condition (VII_a) par (VII_b). Nous établirons ensuite que la validité du théorème de Lebesgue-Nikodym [ou la condition équivalente (VII_b)] entraîne l'isomorphie de E avec un anneau de classes de fonctions

---

(16) On range dans une même classe deux fonctions sommables ne différant que sur un ensemble de mesure-μ nulle. Une fonction sommable étant finie presque partout, la somme et le produit de deux fonctions sommables sont définis presque partout, et ne dépendent que des classes des deux fonctions considérées; d'où la définition de l'addition et de la multiplication des classes. En général, l'ensemble de *toutes* les classes de fonctions sommables sur Ω ne forme pas un anneau, le produit de deux fonctions sommables n'étant pas nécessairement sommable. L'ensemble des classes de fonctions sommables *bornées* (presque partout) forme un anneau; mais on peut aussi donner des exemples d'anneaux de classes de fonctions sommables qui ne sont pas toutes bornées. Considérons par exemple les fonctions continues dans l'intervalle $0 < t \leqq 1$, et telles que, pour chacune de ces fonctions x, il existe une décomposition de l'intervalle $0 < t \leqq 1$ en un nombre fini d'intervalles partiels, telle que, dans chacun de ces derniers, $x(t)$ soit égale à un polynome par rapport à $\log t$. On vérifie aussitôt que ces fonctions sont sommables pour la mesure de Lebesgue, et que leurs classes forment un anneau de Riesz.

Il est facile de voir que, lorsque E est un anneau de classes de fonctions sommables, la condition (VI) de L (n° 3) équivaut au fait que les fonctions dont se compose E sont *bornées* presque partout.

sommables; enfin, nous établirons que, pour un anneau de cette nature, la condition (VII) [et *a fortiori* (VII_a)] est vérifiée, ce qui donnera en même temps le théorème 3 sous sa forme définitive, et prouvera *l'équivalence* des trois conditions (VII), (VII_a) et (VII_b).

12. 1° *S'il existe* $e \in \mathrm{E}_{\mathrm{U}}$ *tel que* $\mathrm{U} = \mathrm{U}_e$, *la condition* ($\mathrm{VII}_b$) *est vérifiée.*

En effet, quels que soient $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{U}_x(y) = \mathrm{U}(xy) = \mathrm{U}_e(xy),$$

et, d'après (6), $\mathrm{U}_e(xy) = \mathrm{U}_{ex}(y)$; donc $\mathrm{U}_x(y) = \mathrm{U}_{ex}(y)$ pour tout $y \in \mathrm{E}$, ce qui entraîne $ex = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{U}_e(x) = \mathrm{U}(x) \geqq 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}_+$, on a $e > 0$ dans E_{U}; il en résulte que, pour tout $z \in \mathrm{E}_{\mathrm{U}}$ tel que $0 \leqq z \leqq e$, on a $zx \leqq ex = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}_+$. En particulier, l'ensemble filtrant T_0 des $z \in \mathrm{A}_{\mathrm{U}}$ tels que $0 \leqq z \leqq e$, est contenu dans T; et l'on sait par ailleurs (n° 6) que e est la borne supérieure de l'ensemble T_0. Pour tout $x \in \mathrm{E}_+$, on a $\mathrm{U}(x) = \mathrm{U}_e(x) = \mathrm{U}_x(e)$, et, d'après la continuité de U_x dans E_{U}, $\mathrm{U}_x(e) = \sup\limits_{z \in \mathrm{T}_0} \mathrm{U}_x(z) = \sup\limits_{z \in \mathrm{T}_0} \mathrm{U}_z(x)$; *a fortiori* la condition (VII_b) est vérifiée.

13. 2° *Si la condition* (VII_b) *est vérifiée, le théorème de Lebesgue-Nikodym est vrai pour* E *et* U.

Montrons d'abord que toute forme linéaire X sur E telle que $0 \leqq \mathrm{X} \leqq \lambda \mathrm{U}$ est de la forme U_y, avec $y \in \mathrm{E}_{\mathrm{U}}$. En premier lieu, si e est la borne supérieure de l'ensemble filtrant T [qui existe en vertu du théorème 1 et de (VII_b)], on a, d'après (VII_b), pour tout $x \in \mathrm{E}_+$, $\mathrm{U}(x) = \sup\limits_{y \in \mathrm{T}} \mathrm{U}_y(x) = \sup\limits_{y \in \mathrm{T}} \mathrm{U}_x(y) = \mathrm{U}_x(e) = \mathrm{U}_e(x)$, puisque U_x est continue; donc $\mathrm{U} = \mathrm{U}_e$. Par suite (n° 12), on a $ex = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}_+$, ou, d'après la formule (2), $x = \sup\limits_{z \in \mathrm{T}} zx$. Comme $\mathrm{U} = \mathrm{U}_e$, U est continue dans tout ensemble J_a (n° 9), et il en est de même de X puisque $0 \leqq \mathrm{X} \leqq \lambda \mathrm{U}$; en procédant comme au n° 9, on peut donc prolonger par continuité X à tout ensemble I_a, et l'on définit ainsi X dans A_{U}; en outre, comme $z \to zx$ est continue dans E_U et applique I_a dans I_{ax}, $z \to X(zx)$ est continue dans tout ensemble I_a; comme il en est de même de $z \to X_x(z)$, et que ces deux applications sont égales dans la partie partout dense J_a de I_a, on a $X(zx) = X_x(z) = X_z(x)$ pour tout $z \in A_U$. Si maintenant $z \in T$, on a $zx \in I_x$, donc en passant à la limite suivant le filtre des sections de T, on a

$$X(x) = \sup_{z \in T} X(zx) = \sup_{z \in T} X_x(z) = X_x(e) = X_e(x),$$

autrement dit, on a aussi $X = X_e$ ([17]).

Suivons maintenant la même marche que dans L, n° 6. Nous considérerons l'espace de Hilbert H, obtenu en complétant l'espace E, dans lequel on a pris $U(xy)$ comme produit scalaire, et $\sqrt{U(x^2)}$ comme norme. L'inégalité de Schwarz prouve que l'application identique φ de E (considéré comme sous-espace de H) dans E (considéré comme sous-espace de E_U) est continue, et se prolonge donc en une application linéaire continue φ de H dans E_U. Si (x, y) désigne le produit scalaire de deux éléments de H, les fonctions $y \to (x, y)$ et $y \to U_x[\varphi(y)]$ sont continues dans H et identiques dans la partie partout dense E de H, pour tout $x \in E$; on a donc identiquement, pour $x \in E$, $y \in H$,

$$(x, y) = U_x[\varphi(y)] = U_{\varphi(y)}(x).$$

Cette identité prouve d'ailleurs que φ est *biunivoque*, car la relation $\varphi(y) = 0$ entraîne $(x, y) = 0$ pour tout $x \in E$, donc, par prolongement à H, $(x, y) = 0$ pour tout $x \in H$, c'est-à-dire $y = 0$. En d'autres termes, on peut identifier l'*ensemble* H au sous-ensemble $\varphi(H)$ de E_U (la topologie de H étant naturellement distincte de celle induite sur lui par la topologie de E_U).

Cela étant, pour tout $y \in E$, X_y est continue dans E, considéré comme sous-espace de E_U; *a fortiori*, X_y est continue dans E, considéré comme sous-espace de H, donc il existe $z_y \in E_U$ tel que $X_y = U_{z_y}$. On voit, comme dans L, n° 6, que $y \to z_y$ est une application linéaire, continue et croissante de E dans E_U; elle se prolonge donc en une application linéaire continue de E_U dans

---

([17]) Ce raisonnement, joint au théorème qui sera démontré dans la seconde partie (n°s 24-29), montre que la *continuité* de U dans tout ensemble J_a est *équivalente* aux conditions (VII_a) et (VII_b).

lui-même, qu'on notera encore $y \to z_y$; comme les applications $y \to U_y$ et $y \to X_y$ de E_U dans F sont continues, on a encore $X_y = U_{z_y}$ pour tout $y \in E_U$, par continuité. En particulier, on a $X = X_e = U_{ze}$.

Pour démontrer le théorème de Lebesgue-Nikodym, il reste à établir qu'aucun élément $> o$ de $\overline{F}_U$ ne peut être disjoint de U [18]; en raison de l'isomorphie des structures d'ordre de E_U et de $\overline{F}_U$, tout revient à prouver que, dans E_U, il n'existe aucun élément $y > o$ qui soit *disjoint* de e (ce qui peut encore s'exprimer en disant que E_U^+ est identique à la *famille complète engendrée par* e).

Pour cela, remarquons d'abord que $ex = x$ pour tout $x \in E$; on va en déduire que, pour tout $x \in A_U$, le produit ex (défini au n° 6) est encore égal à x. Cela résulte de ce que, dans l'ensemble $T \times J_a$ (a quelconque dans E_+), l'application $(z, x) \to zx$ est *uniformément continue :* on a, en effet, quels que soient z, z' dans T, x, x' dans J_a,

$$|z'x' - zx| = |(z' - z)x' + (x' - x)z| \leqq a|z' - z| + |x' - x|$$

d'après la définition de T. Pour $x \in I_a$, ex, qui est par définition égal à la limite de $z \to zx$ suivant le filtre des sections $\mathfrak{F}$ de T, est aussi égal à la limite de $(z, x') \to zx'$ suivant le produit du filtre $\mathfrak{F}$ et du filtre des voisinages de x dans I_a; c'est donc aussi la limite de ex' lorsque x' tend vers x en restant dans J_a, et par suite $ex = x$.

Si alors y est un élément $\geqq o$ de E_U disjoint de e, tout $x \in A_U$ tel que $o \leqq x \leqq y$ est disjoint de tout $z \in T$, donc $zx = o$, et par suite $x = ex = \sup_{z \in T} zx = o$; comme y est borne supérieure des $x \in A_U$ tels que $o \leqq x \leqq y$, on a $y = o$.

14. 3° *Si la condition* (VII_b) *est vérifiée, l'anneau* E *est isomorphe à un anneau de classes de fonctions sommables.*

La démonstration de cette partie du théorème 4 nous retiendra jusqu'à la fin du n° 18. En premier lieu, montrons que, si $z \in \dot{E}_U$

---

[18] Ce résultat est démontré dans L, n° 7, en utilisant la condition superflue (VI).

est tel que $|z| \leqq \lambda e$ pour un scalaire $\lambda > 0$ convenable, l'application $x \rightarrow zx$ est continue dans A_U; cela résulte de l'inégalité

$$|zx| = |z|.|x| \leqq \lambda e|x| = \lambda |x|,$$

qui entraîne, pour tout $y \in E_+$, $N'_y(zx) \leqq \lambda N'_y(x)$. Cette application se prolonge donc à E_U, ce qui permet de définir le produit zx pour tout $x \in E_U$; on a évidemment, par continuité, $zx \leqq \lambda x$ pour tout $x \geqq 0$. Par prolongement, il est immédiat que le produit ainsi défini possède toutes les propriétés énoncées dans L, n° 5; en particulier, il définit une structure *d'anneau de Riesz* sur l'ensemble B_U des z tels que $|z| \leqq \lambda e$ pour un $\lambda > 0$ convenable (dépendant de z); il définit aussi une structure d'anneau de Riesz sur l'ensemble $C_U = A_U + B_U$.

Montrons que, dans l'anneau C_U, la relation $x^2 = 0$ entraîne $x = 0$; tout élément $x \geqq 0$ de C_U étant borne supérieure des éléments $y \in A_U$ tels que $0 \leqq y \leqq x$, il suffit de faire la démonstration pour $x \in A_U$. Or, d'après l'inégalité de Schwarz appliquée à une forme linéaire U_y, où y parcourt E_+, la relation $x^2 = 0$ entraîne $xz = 0$ pour tout $z \in E$, et par suite pour tout $z \in E_U$ par continuité; en particulier, $x = ex = 0$.

Notons encore que, pour $x \in E$, $z \in C_U$, $y \in E_U$, $U_y(zx)$ est défini, puisque $zx \in A_U$; en outre, $U_y(zx) = U_x(zy)$, car cette relation est vraie pour $y \in E$ [formule (6)], et les deux membres sont fonctions continues de y dans E_U [le premier s'écrivant $U_{zx}(y)$]. En désignant par K_λ l'ensemble des z tels que $|z| \leqq \lambda e$, on en déduit que, pour tout $y \in E_U$, l'application $z \rightarrow zy$ est *continue dans* K_λ; en effet, pour tout $x \in E_+$, on a

$$U_x(|zy|) = U_{|y|}(|z|x),$$

et le second membre tend vers 0 lorsque z tend vers 0 dans K_λ, l'application $z \rightarrow zx$ transformant K_λ en un ensemble contenu dans un I_a, où $U_{|y|}$ est continue.

15. Considérons, avec H. Freudenthal et S. Kakutani, une décomposition $e = c_1 + c_2$ de e en deux éléments *disjoints*; comme $c_1 c_2 = 0$ dans l'anneau C_U (n° 4), on a $c_1 = ec_1 = c_1^2$ et $c_2 = ec_2 = c_2^2$, c_1 et c_2 sont des *idempotents* de C_U. Inversement,

si c est un idempotent de C_U, $c = c^2 \geqq 0$; comme $ec = c$, on a $(e - c)^2 = e - c$, donc $e - c \geqq 0$, $0 \leqq c \leqq e$; enfin $c(e - c) = 0$, donc (n° 4), c et $e - c$ sont *disjoints*.

Pour tout élément $x \geqq 0$ de C_U, soit x' la partie de x appartenant à la famille complète de l'idempotent c; $x'' = x - x'$ est disjoint de c, donc $cx'' = 0$, $cx = cx'$; d'autre part, $e - c$ est disjoint de c, donc de x', d'où $(e - c)x' = 0$, $cx' = ex' = x'$, et finalement $cx = x'$.

Si c_1, c_2 sont deux idempotents, on a $\inf(c_1, c_2) = c_1 c_2$; en effet, on a $c_1 c_2 \leqq c_1$ et $c_1 c_2 \leqq c_2$; d'autre part, $c_1(c_2 - c_1 c_2) = 0$, donc c_1 est disjoint de $c_2 - c_1 c_2$; donc, si $x \leqq c_1$ et

$$x \leqq c_2 = c_1 c_2 + (c_2 - c_1 c_2),$$

x est disjoint de $c_2 - c_1 c_2$, et par suite $x \leqq c_1 c_2$. On en conclut que $(c_2 - c_1)^+ = c_2 - c_1 c_2$, d'où

$$\sup(c_1, c_2) = c_1 + (c_2 - c_1)^+ = c_1 + c_2 - c_1 c_2;$$

on vérifie immédiatement que

$$e - \sup(c_1, c_2) = \inf(e - c_1, e - c_2) = (e - c_1)(e - c_2).$$

On peut résumer ces propriétés en disant que, pour les opérations sup, inf, et $c' = e - c$ (« complémentaire » de c), l'ensemble $\mathfrak{J}$ des idempotents de C_U est une *algèbre booléienne* dont e est l'élément unité [19]. En outre, le produit $c_1 c_2$ est uniformément continu dans $\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}$, donc se prolonge par continuité à l'adhérence $\overline{\mathfrak{J}} \times \overline{\mathfrak{J}}$ de cet ensemble dans $E_U \times E_U$; pour tout $c \in \overline{\mathfrak{J}}$, on a donc, par continuité, $c^2 = c$, ce qui prouve que $\mathfrak{J}$ est *fermé* dans E_U; en particulier, la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble *quelconque* d'idempotents sont encore des idempotents.

16. En général, un idempotent c n'est pas modéré, et par suite $U(c)$ n'est pas défini. Mais nous allons voir [20] *qu'il existe*

---

[19] Pour la définition d'une algèbre booléienne, *voir* par exemple M. H. STONE, *The theory of representations for boolean algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 37-111).

[20] *Cf.* S. KAKUTANI, *loc. cit.*, p. 528-529. Le raisonnement est essentiellement dû à F. Wecken (*Math. Ann.*, t. 116, 1938, p. 422-455).

une famille (c_α) *d'idempotents modérés, deux à deux disjoints et tels que* $e = \sum_\alpha c_\alpha$ [la somme étant définie comme borne supérieure des sommes partielles d'un nombre fini de termes ([21])]. Pour cela, remarquons d'abord que, pour tout élément modéré $x > 0$, il existe un idempotent $c > 0$, modéré et appartenant à la famille complète engendrée par x. En effet, on ne peut avoir $\lambda x \leqq e$ pour tout $\lambda > 0$, car on en déduirait, pour tout $z \in E_+$, $\lambda xz \leqq z$, d'où $\lambda U_x(z) = \lambda U(zx) \leqq U(z)$ pour tout $\lambda > 0$, ce qui entraînerait $U_x(z) = 0$ pour tout $z \in E$, et par suite $x = 0$. Il existe par suite un scalaire $\lambda > 0$ tel que $(x - \lambda e)^+ > 0$; soit c la partie de e appartenant à la famille complète de $(x - \lambda e)^+$; comme e n'est pas disjoint de $(x - \lambda e)^+$, on a $c > 0$, et d'autre part $cx - \lambda c = c(x - \lambda e) = c(x - \lambda e)^+ \geqq 0$, puisque c est disjoint de $(x - \lambda e)^-$; on a donc $c \leqq \frac{1}{\lambda} cx \leqq \frac{1}{\lambda} x$, ce qui prouve que c est un idempotent modéré appartenant à la famille complète de x.

Cela étant, considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des ensembles Φ d'idempotents modérés et deux à deux disjoints; il est immédiat que cet ensemble, ordonné par inclusion, est *inductif* ([22]), et possède par suite un élément maximal $\Phi_0 = (c_\alpha)$, en vertu du théorème de Zorn; tout revient à prouver que e est la borne supérieure des c_α.

Dans le cas contraire, cette borne supérieure e_0 serait un idempotent $< e$; on ne pourrait avoir $(e - e_0)x = 0$ pour tout $x \in E_+$, car on en déduirait, par continuité, $(e - e_0)x = 0$ pour tout $x \in C_U$, et en particulier, $(e - e_0)^2 = e - e_0 = 0$. Mais, si $x \in E_+$ est tel que $(e - e_0)x = x' \neq 0$, x' est modéré, donc il existe un idempotent c modéré, > 0 et appartenant à la famille complète de x', donc disjoint de e_0; mais alors, l'ensemble réunion de Φ_0 et de $\{c\}$ appartiendrait à $\mathcal{F}$, contrairement à l'hypothèse que Φ_0 est maximal.

Ayant une telle famille (c_α) d'idempotents, pour tout $x > 0$ dans C_U, on peut écrire $x = \sum_\alpha c_\alpha x$, en vertu de la formule (2) et

([21]) Cette définition coïncide avec la définition générale de la somme d'une famille infinie d'éléments d'un groupe abélien topologique (N. Bourbaki, *loc. cit.*, n° 916, p. 34).

([22]) *Cf.* N. Bourbaki, *loc. cit.*, n° 846, p. 36-37.

de la continuité de l'application $z \to zx$ dans E_U. Mais cette formule peut s'étendre à tout $x \in E_U^+$; en effet, comme E_U^+ est la famille complète engendrée par e, on a $x = \sup\limits_n x_n$, ou $x_n = \inf(ne, x)$ ([13]) appartient à C_U; on a donc

$$x_n = \sup_K \sum_{\alpha \in K} c_\alpha x_n,$$

où K parcourt l'ensemble des parties finies de l'ensemble des indices α; on peut donc écrire

$$x = \sup_n \left[\sup_K \left(\sum_{\alpha \in K} c_\alpha x_n \right) \right] = \sup_K \left[\sup_n \left(\sum_{\alpha \in K} c_\alpha x_n \right) \right].$$

D'après la formule (2) et la continuité de la fonction $x + y$ dans $E_U \times E_U$, on a

$$\sup_n \left(\sum_{\alpha \in K} c_\alpha x_n \right) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha x, \qquad \text{d'où} \qquad x = \sup_K \left(\sum_{\alpha \in K} c_\alpha x \right) = \sum_\alpha c_\alpha x.$$

17. Suivant toujours H. Freudenthal et S. Kakutani, nous allons former, pour tout élément $x \geqq 0$ de E_U, une « résolution de l'unité » qui nous donnera une représentation de x sous forme « d'intégrale de Stieltjes abstraite » sur l'algèbre booléienne $\mathcal{J}$ ([23]).

Pour tout $\lambda \geqq 0$, nous désignerons par $c(\lambda)$ l'idempotent égal à la partie de e appartenant à la famille complète de $(\lambda e - x)^+$. De la relation $\lambda \leqq \mu$, on tire $(\lambda e - x)^+ \leqq (\mu e - x)^+$, donc $c(\lambda) \leqq c(\mu)$. Si c est un idempotent tel que $c \leqq c(\lambda)$, on a $cx \leqq \lambda c$, car $\lambda c - cx = c(\lambda e - x) = c(\lambda e - x)^+ \geqq 0$, puisque c est disjoint de $(\lambda e - x)^-$. De même, si $c \leqq e - c(\lambda)$, on a $cx \geqq \lambda c$, car $cx - \lambda c = c(x - \lambda e) = c(x - \lambda e)^+ \geqq 0$, c étant cette fois disjoint de $(\lambda e - x)^+ = (x - \lambda e)^-$.

Montrons maintenant qu'on a $c(\mu) = \sup\limits_{\lambda < \mu} c(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to \mu,\, \lambda < \mu} c(\lambda)$; comme $c(\mu) - c(\lambda) \leqq e - c(\lambda)$, on a

$$\lambda[c(\mu) - c(\lambda)] \leqq c(\mu)x - c(\lambda)x,$$

d'après ce qui précède; tout revient à prouver que le second

([23]) Les raisonnements de S. Kakutani (*loc. cit.* p. 530-532) se simplifient un peu ici, grâce aux propriétés multiplicatives des idempotents.

membre de cette inégalité tend vers zéro. Or, $c(\lambda)x$ [resp. $c(\mu)x$] est la partie de x appartenant à la famille complète de $(\lambda e - x)^+$ [resp. $(\mu e - x)^+$]; lorsque λ tend vers μ, $(\lambda e - x)^+$ tend en croissant vers $(\mu e - x)^+$: il suffit pour le voir de montrer que λe tend vers μe; or, pour tout $y \in E_+$, on a

$$U_y[(\mu - \lambda)e] = U[(\mu - \lambda)y] = (\mu - \lambda)U(y),$$

qui tend vers zéro avec $\mu - \lambda$. On est donc ramené à prouver le lemme suivant ([24]) : *si une suite (u_n) d'éléments $\geqq 0$ de E_U tend en croissant vers u, la partie x'_n de x appartenant à la famille complète de u_n tend vers la partie x' de x appartenant à la famille complète de u*. Or, on a

$$x' = \sup_m [\inf(mu, x)] \quad \text{et} \quad x'_n = \sup_m [\inf(mu_n, x)];$$

pour tout $y \in E_+$, on a donc

$$\begin{aligned} U_y(x' - x'_n) &\leqq U_y[x' - \inf(mu_n, x)] \\ &= U_y[x' - \inf(mu, x)] + U_y[\inf(mu, x) - \inf(mu_n, x)]; \end{aligned}$$

on peut prendre m assez grand pour que $U_y[x' - \inf(mu, x)] \leqq \frac{\varepsilon}{2}$; m étant fixé, il résulte de la continuité de $\inf(u, v)$ dans $E_U \times E_U$ qu'on peut trouver n_0 tel que, pour tout $n \geqq n_0$, on ait

$$U_y[\inf(mu, x) - \inf(mu_n, x)] \leqq \frac{\varepsilon}{2};$$

pour tout $n \geqq n_0$, on aura donc $U_y(x' - x'_n) \leqq \varepsilon$, ce qui établit le lemme.

On a évidemment $c(0) = 0$, puisque $(-x)^+ = 0$; montrons enfin que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} c(\lambda) = e$. En effet, cette limite existe et est un idempotent e_0, et l'on a $e - e_0 \leqq e - c(\lambda)$ pour tout λ; donc $(e - e_0)x \geqq \lambda(e - e_0)$ pour tout λ; pour tout $y \in E_+$, on en tire $\lambda U_y(e - e_0) \leqq U_y(x)$ pour tout λ, d'où $U_y(e - e_0) = 0$, et par suite $e - e_0 = 0$.

Ces propriétés des $c(\lambda)$ étant établies, considérons une suite finie strictement croissante de nombres réels, $\Delta = (\lambda_i)_{0 \leqq i \leqq n}$ telle que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i - \lambda_{i-1} \leqq \varepsilon$ pour $1 \leqq i \leqq n$; nous poserons $\lambda_n = \omega$.

([24]) S. Kakutani, *loc. cit.*, lemme 3.5, p. 527.

Formons l'élément $x_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1}[c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})]$. Nous allons voir que $x_\Delta \leqq x$ et que, pour ε assez petit et ω assez grand, x_Δ est aussi voisin qu'on veut de x. En effet, comme

$$c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}) \leqq e - c(\lambda_{i-1}),$$

on a

$$\lambda_{i-1}[c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})] \leqq [c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})]\, x,$$

d'où $x_\Delta \leqq c(\omega)\, x$; d'autre part, comme $c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}) \leqq c(\lambda_i)$, on a

$$[c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})]\, x \leqq \lambda_i[c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})] \leqq (\lambda_{i-1} + \varepsilon)[c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})],$$

d'où $c(\omega)\, x \leqq x_\Delta + \varepsilon e$, ou encore $0 \leqq c(\omega)\, x - x_\Delta \leqq \varepsilon e$; donc x_Δ et $c(\omega)\, x$ sont aussi voisins qu'on veut lorsque ε est assez petit; et d'autre part, $c(\omega)\, x$ tend vers $ex = x$ lorsque ω tend vers $+\infty$ (n° 14). En prenant en particulier $\omega = 2^p$, $n = 4^p$, et tous les $\lambda_i - \lambda_{i-1}$ égaux à $\frac{1}{2^p}$, on définit de cette manière une suite croissante (x_p) d'éléments de la forme x_Δ, qui tendent vers x. On peut, avec H. Freudenthal, exprimer ce résultat par l'écriture symbolique

$$x = \int_0^\infty \lambda\, dc(\lambda).$$

18. Démontrons maintenant la première partie du théorème 4, en commençant par le cas où e est un élément *modéré* de E_U.

Remarquons d'abord que (sans hypothèse sur e), pour x modéré et $\geqq 0$, la relation $U(x) = 0$ entraîne $x = 0$; en effet, elle s'écrit $U_e(ex) = 0$, donc, si $z = \inf(e, x)$, on en déduit $U_e(z^2) = 0$, et par suite, pour tout $y \in E_+$, $U_e(yz) = 0$ d'après l'inégalité de Schwarz; mais cela s'écrit aussi $U_z(y) = 0$ pour tout $y \in E_+$, ce qui entraîne $z = 0$, et par suite $x = 0$, puisque aucun élément $\neq 0$ de E_U^+ n'est disjoint de e.

Dans le cas actuel, $U = U_e$ est définie dans E_U tout entier; la relation $U(x) = 0$ entraîne $x = 0$ pour tout $x \in E_U^+$, car pour tout z modéré tel que $0 \leqq z \leqq x$, on a *a fortiori* $U(z) = 0$, donc $z = 0$, et x est borne supérieure de ces éléments z. En d'autres termes, $U(|x|)$ est une *norme* sur E_U; comme il existe par hypothèse un $a \in E_+$ tel que $e \leqq a$, on a $U(|x|) \leqq N'_a(x)$, donc la topologie d'espace normé définie sur E_U par $U(|x|)$ est *moins fine* que celle définie par les semi-normes $N'_\gamma(x)$. Il en résulte qu'on peut considérer *l'ensemble* E_U comme une partie partout dense de l'espace de Riesz complet E_U^1, obtenu en complétant E_U muni de la norme $U(|x|)$.

Or, S. Kakutani a montré ([25]) qu'on peut définir un isomorphisme de E_U^1 sur l'espace de Riesz $L(\Omega)$ des classes de fonctions sommables pour une mesure de Radon sur un espace compact Ω. Rappelons brièvement son procédé : on remarque que, d'après un théorème de Stone ([26]), l'algèbre booléienne $\mathfrak{J}$ des idempotents de E_U est isomorphe à l'algèbre booléienne des ensembles *à la*

([25]) *loc. cit.*, p. 532-534.

([26]) M. H. Stone, *Application of the theory of boolean rings to general topology* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 41, 1937, p. 375-481). En raison de l'intérêt de ce théorème, indiquons une variante rapide de sa démonstration. On commence par établir un premier théorème de Stone [*loc. cit.*, note ([19]),], d'après lequel une algèbre booléienne A est toujours isomorphe à une algèbre booléienne formée de parties d'un ensemble convenable Ω. Le principe de la démonstration de Stone peut être présenté comme suit (selon H. Cartan) : on appelle *pseudofiltre* sur A toute partie F de A telle que : 1° si $x \in F$, tout $y \geqq x$ appartient à F; 2° si $x \in F$ et $y \in F$, $\inf(x, y) \in F$; 3° le plus petit élément o de A n'appartient pas à F. Si l'on ordonne l'ensemble des pseudofiltres par inclusion, on voit par le théorème de Zorn, que tout pseudofiltre est contenu dans un pseudofiltre *maximal*. En outre, si F est un pseudofiltre maximal, et si $x \notin F$, le complémentaire x' de x appartient à F : il existe en effet un $y \in F$ tel que $\inf(x, y) = 0$, sans quoi les $\inf(x, y)$ où y parcourt F, formeraient un pseudofiltre contenant F et x. On prend alors pour ensemble Ω l'ensemble des pseudofiltres maximaux de A; et l'on fait correspondre à tout élément $x \in A$ l'ensemble E_x de tous les pseudofiltres maximaux F tels que $x \in F$; en raison de la propriété précitée des pseudofiltres maximaux, on voit sans peine que cette correspondance est un isomorphisme de A sur une sous-algèbre booléienne de l'algèbre booléienne $P(\Omega)$ de toutes les parties de Ω.

Ce premier résultat obtenu, identifions A à la sous-algèbre booléienne de $P(\Omega)$ qui lui est isomorphe. Pour toute *partition finie* (U_i) de Ω en ensembles appartenant à A, considérons dans $\Omega \times \Omega$ la réunion V des ensembles $U_i \times U_i$; on vérifie aussitôt que ces ensembles forment (pour toutes les partitions finies de l'espèce considérée) un *système fondamental d'entourages* d'une structure uniforme séparée sur Ω, pour laquelle l'espace Ω est *précompact*. Dans l'espace *compact* $\overline{\Omega}$, *complété* de Ω, l'adhérence de tout ensemble appartenant à A est ouvert et fermé, car en raison de la relation $V(U_i) = U_i$, deux points appartenant à des U_i d'indices distincts ne peuvent être arbitrairement voisins, donc les $\overline{U_i}$ forment une partition de $\overline{\Omega}$; réciproquement, tout ensemble à la fois ouvert et fermé dans $\overline{\Omega}$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $\overline{U}$, où $U \in A$, en raison de l'axiome de Borel-Lebesgue et de la définition des entourages dans $\overline{\Omega}$; on en conclut sans peine que A est isomorphe à l'algèbre *fois ouverts et fermés* d'un espace compact totalement discontinu Ω. Si $\Gamma(c)$ est l'ensemble ouvert et fermé dans Ω qui correspond à un idempotent c, on montre qu'on définit une mesure de Radon μ dans Ω en posant $\mu[\Gamma(c)] = U(c)$. Cela étant, soit D_U l'ensemble des éléments de E_U de la forme $x = \sum_i \lambda_i c_i$, où les c_i sont des idempotents non nuls deux à deux disjoints, et les λ_i des nombres réels $\neq 0$, deux à deux distincts; on montre facilement ([27]) qu'un élément de D_U ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule manière; à un tel élément x, on fait correspondre la classe $\psi(x)$ de la fonction $u_x = \sum_i \lambda_i \varphi_{\Gamma(c_i)}$, φ_Γ désignant comme d'ordinaire la fonction caractéristique d'une partie Γ de Ω. On vérifie aisément ([28]) que ψ est une application *linéaire* biunivoque

---

booléienne $\overline{A}$ formée des adhérences dans $\overline{\Omega}$ des ensembles de A, ou encore des ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\overline{\Omega}$.

L'avantage du procédé topologique de S. Kakutani que nous suivons ici, est qu'il dispense de vérifier que sur l'ensemble des ensembles à la fois ouverts et fermés dans Ω, la mesure μ est complètement additive (grâce à l'axiome de Borel-Lebesgue). On pourrait aussi utiliser seulement le premier théorème de Stone, permettant d'identifier l'algèbre booléienne $\mathfrak{I}$ à une algèbre booléienne formée de parties d'un ensemble Ω (non muni d'une topologie); il faut alors, quand on veut définir la mesure μ sur les ensembles appartenant à cette algèbre booléienne, montrer qu'elle y est complètement additive, ce qui du reste ne présente pas de grandes difficultés.

([27]) De la relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j d_j$, on tire, en multipliant par c_i, que $\lambda_i c_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j c_i d_j$; les $c_i d_j$ ne peuvent donc être tous nuls; si $c_i d_j \neq 0$, on a $\lambda_i c_i d_j = \lambda'_j c_i d_j$, donc $\lambda_i = \lambda'_j$; les λ'_j étant deux à deux distincts, on a nécessairement $c_i d_j = 0$ pour tous les indices j sauf un, $c_i = c_i d_j = d_j$ pour l'indice j restant; d'où la proposition.

([28]) Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j d_j$ sont deux éléments de D_U, on montre d'abord que $x + y$ appartient à D_U; si $c_0 = e - \sum_{i=1}^{n} c_i$, $d_0 = e - \sum_{j=1}^{m} d_j$, on peut aussi écrire $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i c_i$, $y = \sum_{j=0}^{m} \lambda'_j d_j$, avec $\lambda_0 = \lambda'_0 = 0$; on remarque alors que et bicontinue de D_U (considéré comme sous-espace de E_U^1) sur un sous-espace partout dense de $L(\Omega)$. Il en résulte que ψ se prolonge en une application linéaire biunivoque et bicontinue de E_U^1 sur $L(\Omega)$, telle que $U(x) = \int_\Omega u_x(\xi)\, d\mu$. C'est en outre un isomorphisme de la structure d'*espace de Riesz* de E_U^1 sur celle de $L(\Omega)$; il suffit pour le voir de prouver que $\psi(x^+) = [\psi(x)]^+$; or, on vérifie immédiatement cette relation lorsque $x \in D_U$, et elle en résulte par continuité pour tout $x \in E_U^1$.

Si maintenant nous restreignons à E l'isomorphisme ψ, nous aurons établi la première partie du théorème 4 (pour e modéré) si nous prouvons que $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ pour x et y dans E; il suffit évidemment de montrer que $\psi(x^2) = [\psi(x)]^2$. Or, cette relation est évidente pour $x \in D_U$; d'après le n° 17, tout $x \in E_+$ est limite *dans* E_U d'une suite croissante (x_p) d'éléments de D_U; d'après la continuité de $y \to y^2$ dans I_a, la suite (x_p^2) tend aussi vers x^2 *dans* E_U; comme la topologie de E_U^1 est moins fine que celle de E_U, les suites (x_p) et (x_p^2) tendent respectivement vers x et x^2 *dans* E_U^1; la relation cherchée s'obtient donc par continuité, en remarquant que, dans E_U^1, l'application $y \to y^2$ est encore continue dans tout I_a (même raisonnement qu'au n° 6 pour E_U).

Passons au cas où e n'est pas modéré; alors, on a vu au n° 16 qu'on peut écrire $e = \sum_\alpha c_\alpha$, où les c_α sont des idempotents modérés deux à deux disjoints. Pour chaque α, on définit comme ci-dessus un espace compact Ω_α, une mesure de Radon μ_α sur cet espace, et un isomorphisme ψ_α de l'espace de Riesz des $c_\alpha x$, où x parcourt E_U, sur un sous-espace de l'espace $L(\Omega_\alpha)$ des classes de fonctions sommables sur Ω_α. Soit alors Ω l'espace localement compact *somme topologique* ([29]) des Ω_α; on définit sur Ω une

---

les $c_i d_j$ sont deux à deux disjoints, et que $c_i = \sum_{j=0}^{m} c_i d_j$, $d_j = \sum_{i=0}^{n} c_i d_j$, d'où $x + y = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\lambda_i + \lambda'_j) c_i d_j$; en ne conservant que les $c_i d_j$ non nuls, et groupant ceux pour lesquels $\lambda_i + \lambda'_j$ prend la même valeur, on voit que $x + y \in D_U$; la même décomposition faite parallèlement pour les $\Gamma(c_i)$ et $\Gamma(d_j)$ montre que $u_{x+y} = u_x + u_y$.

([29]) *Cf.* N. Bourbaki, *loc. cit.*, n° 858, p. 50-51.

mesure de Radon μ en prenant pour ensembles mesurables les ensembles Γ tels que $\Gamma \cap \Omega_\alpha$ soit mesurable dans Ω_α pour tout α, et posant $\mu(\Gamma) = \sum_\alpha \mu_\alpha(\Gamma \cap \Omega_\alpha)$. A tout $x \in E_U$, on fera correspondre la classe de fonctions mesurables $\psi(x)$ telle que la restriction d'une fonction quelconque de cette classe à Ω_α appartienne à $\psi_\alpha(c_\alpha x)$ pour tout α. Si $x \in E_+$, on a, d'après la continuité de U dans I_x, $U(x) = \sum_\alpha U(c_\alpha x)$, donc il n'y a qu'une infinité dénombrable (au plus) d'indices α pour lesquels $c_\alpha x \neq 0$. En outre, si u_α est une fonction de la classe $\psi_\alpha(c_\alpha x)$, on voit que la somme $\sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} u_\alpha(\xi)\, d\mu$ est finie, donc toute fonction u_x de la classe $\psi(x)$ est sommable et $U(x) = \int_\Omega u_x(\xi)\, d\mu$. A l'anneau de Riesz E correspond donc un ensemble de classes de fonctions sommables sur Ω et l'on voit immédiatement que cet ensemble est un anneau de Riesz, et ψ un isomorphisme de la structure d'anneau de Riesz de E sur celle de $\psi(E)$.

19. 4° *Si* E *est un anneau de fonctions sommables* ([30]) *sur un ensemble* Ω *pour une mesure* μ, *et*

$$U(x) = \int_\Omega x(\xi)\, d\mu,$$

la condition (VII_a) *est vérifiée.*

Soit x un élément quelconque de E_+. Étant donné $\varepsilon > 0$, déterminons d'une part un nombre $\lambda > 0$ tel que, si N est l'ensemble des points $\xi \in \Omega$ où $x(\xi) \leqq \lambda$, on ait $\int_N x(\xi)\, d\mu \leqq \varepsilon$, et d'autre part un nombre λ' tel que, si M est l'ensemble des points ξ où $x(\xi) \geqq \lambda'$, on ait $\int_M x(\xi)\, d\mu \leqq \varepsilon$. Soit $f(t)$ la fonction de la variable réelle t, définie pour $0 \leqq t \leqq \lambda'$, égale à t pour $0 \leqq t \leqq \frac{\lambda}{2}$, à $\frac{\lambda}{2}$ pour $\frac{\lambda}{2} \leqq t \leqq \lambda'$;

([30]) Dans les raisonnements qui suivent (jusqu'au n° 22 inclus), il est commode de parler de « fonctions sommables » au lieu de « classes de fonctions sommables »; il faut naturellement se souvenir que les fonctions que l'on considère ne doivent pas être distinguées de celles qui n'en diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

soit d'autre part α un nombre $>$ o; d'après le théorème de Weierstrass, il existe ([31]) un polynome $g(t)$ sans terme constant tel que, pour $0 \leqq t \leqq \lambda'$, on ait $g(t) \geqq 0$ et $0 \leqq f(t) - g(t) \leqq \alpha$; en outre, dès que α est assez petit, g est certainement du second degré au moins, donc il existe un nombre ρ tel que, pour $t \geqq \rho$, $|g(t)| \geqq t$. Considérons alors l'élément $g(x)$ de E, et soit $y = \inf[|g(x)|, x]$; dans l'ensemble $\Omega - M - N$, on a $x(\xi) - y(\xi) \geqq \frac{\lambda}{2}$; d'autre part, pour tout ξ tel que $x(\xi) \geqq \rho$, on a $y(\xi) = x(\xi)$, donc $x - y$ est une fonction *bornée* dans Ω (par le nombre ρ). Soit alors $f_1(t)$ la fonction de la variable réelle t, égale à $\frac{2}{\lambda} t$ pour $0 \leqq t \leqq \frac{\lambda}{2}$, à 1 pour $\frac{\lambda}{2} \leqq t \leqq \rho$; soit $g_1(t)$ un polynome sans terme constant, tel que, pour $0 \leqq t \leqq \rho$, on ait $0 \leqq g_1(t)$ et $0 \leqq f_1(t) - g_1(t) \leqq \varepsilon$; $z = g_1(x - y)$ appartient à E_+; pour tout $\xi \in \Omega$, on a $0 \leqq z(\xi) \leqq 1$, donc $z \in S$; lorsque ξ appartient à $\Omega - M - N$, on a

$$1 - \varepsilon \leqq z(\xi) \leqq 1;$$

d'où

$$\int_{\Omega - M - N} (x - zx)\, d\mu \leqq \varepsilon \int_{\Omega} x(\xi)\, d\mu,$$

et finalement

$$U(x - zx) = \int_{\Omega} (x - zx)\, d\mu \leqq [U(x) + 2]\, \varepsilon,$$

ce qui est arbitrairement petit avec ε. La condition (VII_a) est bien vérifiée ([32]).

Montrons enfin que la condition (VII_a) entraîne (VII), et lui est par suite équivalente. Soit donc X une forme linéaire sur E telle que $0 \leqq X \leqq \lambda U$; pour tout $x \in E$, on a $X(|x|) = X(x^+) + X(x^-)$.

([31]) Si $h_n(t)$ est la fonction continue égale à 1 pour $0 \leqq t \leqq \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{n}$, à 0 pour $\frac{\lambda}{2} \leqq t \leqq \lambda'$, et linéaire pour $\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{n} \leqq t \leqq \frac{\lambda}{2}$, on approchera $h_n(t)$ par un polynome $\varphi(t) \leqq h_n(t)$; le polynome $g(t) = \int_0^t \varphi(u)\, du$ répond à la question dès que n est assez grand et que $\varphi(t)$ est assez voisin de $h_n(t)$.

([32]) Il serait intéressant de trouver une démonstration de l'équivalence de (VII_a) et (VII_b), ne passant pas par l'intermédiaire du théorème 4. On aurait une telle démonstration si l'on savait démontrer directement que l'ensemble S est *dense* par rapport à l'ensemble T.

D'après la démonstration précédente, il existe deux éléments z_1, z_2 de S, tels que z_1 (resp. z_2) appartienne à la famille complète de x^+ (resp. x^-), et que $U(x^+ - z_1 x^+) \leqq \varepsilon$, $U(x^- - z_2 x^-) \leqq \varepsilon$; on a donc $X(x^+ - z_1 x^+) \leqq \lambda\varepsilon$, $X(x^- - z_2 x^-) \leqq \lambda\varepsilon$; si l'on pose $z = z_1 - z_2$, on a $|z| \in S$, puisque z_1 et z_2 sont disjoints, et $zx = z_1 x^+ + z_2 x^-$, d'où $X(|x|) - X(zx) \leqq 2\lambda\varepsilon$, ce qui établit (VII).

Les théorèmes 3 et 4 sont donc complètement démontrés.

20. Supposons que E soit un anneau de fonctions sommables sur un ensemble Ω, pour une mesure μ, et que $U(x) = \int_\Omega x(\xi)\, d\mu$. La construction de S. Kakutani, exposée au n° 18, permet d'identifier les éléments «abstraits» de l'espace de Riesz E_U avec des classes de fonctions sommables sur un nouvel ensemble Ω'; mais peut-on identifier ces éléments (ou tout au moins certains d'entre eux) à des fonctions *sur l'ensemble* Ω initial? C'est ce que nous allons examiner. Nous voulons naturellement que, dans une telle identification, toutes les propriétés de E_U relatives à sa structure algébrique et sa structure d'ordre soient conservées, c'est-à-dire qu'à la somme, au produit (lorsqu'il est défini), à la borne supérieure de deux éléments de E_U corresponde la somme, le produit, la borne supérieure (définis à un ensemble de mesure nulle près) des fonctions correspondant à ces éléments; nous voulons aussi qu'à la borne supérieure d'une *suite* croissante majorée d'éléments de E_U corresponde la borne supérieure (définie à un ensemble de mesure nulle près) de la suite croissante de fonctions correspondante.

Nous allons voir tout d'abord qu'on peut faire cette identification pour les éléments de l'espace de Hilbert H, complété de E pour la norme $\sqrt{U(x^2)}$ (n° 13). De façon précise, soit θ l'application identique de E, considéré comme sous-espace de l'espace de Hilbert « concret » $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable dans Ω, sur E, considéré comme sous-espace de l'espace de Hilbert « abstrait » H; il est clair que θ est une application linéaire biunivoque et bicontinue, et par suite se prolonge en une application (notée encore θ) linéaire, biunivoque et bicontinue, de l'adhérence $\bar{E}$ de E dans $L^2(\Omega)$, *sur* l'espace H. Il est immédiat que

$\theta(x^+) = [\theta(x)]^+$ dans $\overline{\mathrm{E}}$, puisque $x \to x^+$ est une fonction continue dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et dans H, et que la relation est vérifiée dans E; donc à la borne supérieure de deux éléments de $\overline{\mathrm{E}}$ correspond bien la borne supérieure des deux éléments correspondants de H. D'autre part, si (x_n) est une suite croissante d'éléments de $\overline{\mathrm{E}}$, majorée dans $\overline{\mathrm{E}}$, sa borne supérieure x dans $\overline{\mathrm{E}}$ est aussi sa limite [pour la topologie de $\mathrm{L}^2(\Omega)$] ([33]), donc $\theta(x)$ est la limite (pour la topologie de H) de la suite croissante des $\theta(x_n)$; *a fortiori*, $\theta(x)$ est limite de la suite des $\theta(x_n)$ pour la topologie moins fine de $\mathrm{E_U}$, donc $\theta(x)$ est bien la borne supérieure des $\theta(x_n)$.

Identifiant ainsi, par l'application θ, l'espace $\overline{\mathrm{E}}$ et l'espace H, on a en particulier identifié $\mathrm{A_U}$ à un sous-espace $\overline{\mathrm{A}}$ de $\overline{\mathrm{E}}$; cela tient à ce que, sur tout ensemble J_a dans E, les topologies induites par celle de H et celle de $\mathrm{E_U}$ sont identiques, en raison de l'inégalité $\mathrm{U}(x^2) \leqq \mathrm{U}_a(|x|)$ pour $|x| \leqq a$; donc tout ensemble I_a est contenu dans H.

Si x et y sont deux éléments de $\overline{\mathrm{A}}$, on a $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$; en effet, cette relation est évidente dans E; pour la prolonger par continuité, il suffit de remarquer que, d'après ce qui précède, l'application $(x, y) \to xy$ est continue dans $\mathrm{I}_a \times \mathrm{I}_a$ pour la topologie de H (n° 6), et on a la même propriété en remplaçant I_a par la partie correspondante de $\overline{\mathrm{A}}$.

Enfin, pour $x \in \mathrm{E}$, $y \in \overline{\mathrm{E}}$, on a

$$\int_\Omega xy\, d\mu = \mathrm{U}_{\theta(x)}[\theta(y)];$$

en effet, le premier membre est le produit scalaire de x et y dans $\overline{\mathrm{E}}$, le second le produit scalaire de $\theta(x)$ et $\theta(y)$ dans H (n° 13).

L'identification que nous venons de faire satisfaisant bien à toutes les conditions imposées, nous ne ferons plus désormais de distinction entre l'élément $x \in \overline{\mathrm{E}}$ et l'élément $\theta(x) \in \mathrm{H}$.

([33]) On peut se limiter au cas où les x_n sont $\geqq 0$; si $x_n \leqq y$, où $y \in \overline{\mathrm{E}}$, on a $x_n^2 \leqq y^2$, donc $x^2 \leqq y^2$ est sommable, et $\mathrm{U}(x^2 - x_n^2)$ tend vers zéro; il en est de même de $\mathrm{U}[(x - x_n)^2]$, puisque $(x - x_n)^2 \leqq x^2 - x_n^2$; donc x est bien la limite des x_n pour la topologie de $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

21. Pour aller plus loin, cherchons d'abord à préciser ce que sont les fonctions ainsi identifiées aux éléments de H.

En premier lieu, pour tout élément $x \geqq 0$ de E_U et tout $\alpha > 0$, désignons par $P_{x,\alpha}$ l'ensemble mesurable des points ξ où $x(\xi) \geqq \alpha$; nous allons voir que si $x \in A_U$ la fonction caractéristique de $P_{x,\alpha}$ appartient à A_U. Pour tout entier $n > \frac{1}{\alpha}$, soit $g_n(t)$ la fonction de la variable réelle t, définie pour $t \geqq 0$, égale à 0 pour $0 \leqq t \leqq \alpha - \frac{1}{n}$, à 1 pour $t \geqq \alpha$, linéaire pour $\alpha - \frac{1}{n} \leqq t \leqq \alpha$; nous prouverons que $g_n(x)$ appartient à A_U; comme la fonction caractéristique de $P_{x,\alpha}$ est limite de la suite décroissante des $g_n(x)$, la proposition sera ainsi établie.

Nous devons donc montrer que, pour tout $z \in E_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A_U$ tel que $\int_\Omega z\,|y - g_n(x)|\,d\mu \leqq \varepsilon$. Soit β un nombre > 0 tel que $g_n(t) < \beta t$ pour tout $t > 0$. Comme zx est sommable, il existe un nombre $\lambda > 1$ tel que, si M est l'ensemble des points ξ où $x(\xi) \geqq \lambda$, on ait $\beta \int_M zx\,d\mu \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors $f(t)$ un polynome sans terme constant, tel que, pour $0 \leqq t \leqq \lambda$, on ait $0 \leqq f(t) \leqq \beta t$, et

$$|f(t) - g_n(t)| \leqq \frac{\varepsilon}{2\,U(z)};$$

considérons l'élément $f(x)$ de A_U, et soit $y = \inf[\,|f(x)|, \beta x\,]$. Dans le complémentaire $\Omega - M$ de M, on a

$$|y(\xi) - g_n[x(\xi)]| \leqq \frac{\varepsilon}{2\,U(z)},$$

donc

$$\int_{\Omega - M} z\,|y - g_n(x)|\,d\mu \leqq \frac{\varepsilon}{2};$$

d'autre part, dans M, on a $|y(\xi) - g_n[x(\xi)]| \leqq \beta x(\xi)$, donc

$$\int_M z\,|y - g_n(x)|\,d\mu \leqq \beta \int_M zx\,d\mu \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui prouve que

$$\int_\Omega z\,|y - g_n(x)|\,d\mu \leqq \varepsilon.$$

Si, dans ce raisonnement, on remplace $g_n(t)$ par la fonction $g(t)$ égale à t pour $0 \leqq t \leqq \alpha$, à α pour $t \geqq \alpha$, on voit que la fonction

$\inf(x, \alpha)$ appartient aussi à A_U pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in A_U^+$. Par continuité [34], on en déduit que, pour tout élément $x \geqq 0$ de H, on a aussi $\inf(x, \alpha) \in H$.

Soit alors $\mathfrak{F}$ la famille de tous les ensembles $P_{x,\alpha}$, où x parcourt E_+, et α l'ensemble des nombres > 0; cette famille comprend en particulier tous les ensembles de mesure-μ nulle. Soit $\mathfrak{T}$ la tribu [35] engendrée par la famille $\mathfrak{F}$ (sous-tribu de celle où est définie la mesure μ). Nous allons voir que les fonctions auxquelles on a identifié les éléments de H ne sont autres que les fonctions *mesurables*-$\mathfrak{T}$ et de carré sommable.

Prouvons d'abord que, si N est un ensemble tel que sa fonction caractéristique φ_N appartienne à H, N appartient à $\mathfrak{T}$. En effet, par le raisonnement classique du théorème de Fischer-Riesz, on montre que φ_N est limite presque partout d'une suite (x_n) de fonctions de E_+, telle que la série des normes $\| x_{n+1} - x_n \|$ dans $L^2(\Omega)$ soit convergente; si l'on pose $y_n = \sup\limits_{p \geqq 0} x_{n+p}$, on en déduit que $y_n \in H$, et que φ_N est limite presque partout de la suite décroissante (y_n); d'où résulte que N est, à un ensemble de mesure nulle près, intersection dénombrable de réunions dénombrables d'ensembles de $\mathfrak{F}$, et par suite appartient à $\mathfrak{T}$.

Pour tout $x \geqq 0$ appartenant à A_U, la fonction caractéristique de tout ensemble $P_{x,\alpha}$ appartient à A_U, donc à H; par suite x est mesurable-$\mathfrak{T}$; comme tout $y \geqq 0$ appartenant à H est limite presque partout d'une suite croissante de fonctions appartenant à A_U [36] y est aussi mesurable-$\mathfrak{T}$.

---

[34] La continuité de $\inf(u, v)$ dans $H \times H$ résulte de celle de u^+ dans H, qui est elle-même une conséquence de l'inégalité $| u^+ - v^+ | \leqq | u - v |$.

[35] Pour la définition d'une tribu et les résultats essentiels de la théorie de l'Intégration dont nous faisons usage dans ce qui suit, *voir* A. Weil, *l'Intégration dans les groupes topologiques* (*Actual. Scient. Ind.*, n° 869, p. 30). Dans la mesure où les raisonnements qui suivent ne sont pas classiques, ou ne se trouvent pas dans les Mémoires de M. Daniell sur l'intégration abstraite, ils proviennent de travaux manuscrits de N. Bourbaki.

[36] En effet, y est borne supérieure des $x \in A_U$ tels que $0 \leqq x \leqq y$ et $U(y^2)$ est borne supérieure des $U(x^2)$; on peut donc déterminer par récurrence, une suite croissante (x_n) d'éléments $\leqq y$ dans A_U tels que $U(y^2 - x_n^2) \leqq \frac{1}{n}$; on en conclut [*voir* note [33]] que y est limite de la suite (x_n) dans H, et, par suite, limite presque partout de cette suite de fonctions.

Considérons maintenant, pour tout $y \geqq 0$ appartenant à H, l'ensemble P_y des points ξ où $y(\xi) > 0$; soit $\mathfrak{T}'$ la famille des ensembles P_y lorsque y parcourt H_+. On a évidemment $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$ d'après ce qui précède; nous allons montrer que $\mathfrak{T}'$ est une *tribu*; comme elle contient $\mathcal{F}$ (puisque, pour tout $x \in E_+$, $x - \inf(x, \alpha)$ appartient à H), elle est *identique* à $\mathfrak{T}$, d'après la définition de $\mathfrak{T}$. Pour voir que $\mathfrak{T}'$ est une tribu, il suffit de montrer que : 1° la réunion d'une suite (P_{y_n}) d'ensembles de $\mathfrak{T}'$ appartient à $\mathfrak{T}'$; 2° si P_y et P_z sont deux ensembles de $\mathfrak{T}'$, l'ensemble $P_y \cap (\Omega - P_z)$ appartient à $\mathfrak{T}'$. Pour établir le premier point, il suffit de remarquer qu'on peut trouver une suite (λ_n) de nombres > 0 tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n = y$ soit de carré sommable, et P_y est alors réunion des P_{y_n}. Pour le second, si l'on pose $u = \sup_n [\inf(nz, y)]$, cette fonction appartient à H, et l'ensemble $P_y \cap (\Omega - P_z)$ n'est autre que P_{y-u}.

Pour achever la démonstration, remarquons que, si P_y est de mesure finie, sa fonction caractéristique appartient à H, étant limite croissante des fonctions $\inf(ny, 1)$. Comme toute fonction mesurable-$\mathfrak{T}$ et de carré sommable est limite d'une suite croissante de fonctions caractéristiques d'ensembles de $\mathfrak{T}$ de mesure finie, elle appartient à H.

22. Tout élément de E_U^+ étant limite d'une suite croissante de combinaisons linéaires d'idempotents (n° **17**), cherchons à quelles fonctions caractéristiques d'ensemble dans Ω on peut faire correspondre un idempotent de E_U. Pour tout idempotent c, $\inf(c, c_1)$ est un idempotent modéré pour tout idempotent modéré c_1; si c correspond à une fonction caractéristique φ_N, l'intersection de N et de tout ensemble de $\mathcal{F}$ doit donc appartenir à $\mathfrak{T}$; on en déduit aussitôt que l'intersection de N et de tout ensemble de $\mathfrak{T}$ doit appartenir à $\mathfrak{T}$. Les ensembles N qui possèdent cette propriété forment *une nouvelle tribu* $\mathfrak{T}_0$, qui contient $\mathfrak{T}$, mais en est en général distincte; pour qu'elle soit identique à $\mathfrak{T}$, il faut et il suffit que l'ensemble Ω appartienne à $\mathfrak{T}$. Cela étant, on peut effectivement faire correspondre à toute fonction caractéristique d'un ensemble N de $\mathfrak{T}_0$ un idempotent de $\mathcal{J}$, savoir l'idempotent $c(N)$ *borne supérieure* de l'ensemble filtrant formé des idempotents qui correspondent aux fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{F}$ *contenus dans* N. Il est immédiat que, dans cette correspondance, $c(N_1 \cup N_2) = \sup[c(N_1), c(N_2)]$, et

$$c(N_1 \cap N_2) = \inf[c(N_1), c(N_2)];$$

plus généralement, à toute réunion (resp. intersection) *dénombrable* d'ensembles de $\mathfrak{T}_0$ correspond la borne supérieure (resp. inférieure des idempotents correspondants. Enfin, pour tout $x \in E_+$, on a $U_x[c(N)] = \int_\Omega x.\varphi_N \, d\mu$; en effet, soit c_1 l'idempotent partie de e appartenant à la famille complète de x; on a $x = c_1 x$, donc $U_x[c(N)] = U_{c(N)}(x) = U_{c(N)}(c_1 x) = U_x[c_1 c(N)]$ (n° 14); $c_1 c(N)$ correspond à $\varphi_{N \cap P_x}$, et $N \cap P_x$ est réunion d'une suite croissante d'ensembles de mesure finie $N \cap P_{x,\alpha}$; donc on a

$$U_x[c_1 c(N)] = \int_\Omega x.\varphi_{N \cap P_x} \, d\mu,$$

et

$$x.\varphi_{N \cap P_x} = x.\varphi_N.$$

Si maintenant on peut faire correspondre à toute fonction $y \geqq 0$ d'un certain ensemble de fonctions sur Ω, un élément $\theta(y)$ de E_U, les conditions du n° 20 devant être satisfaites, y est nécessairement *mesurable*-$\mathfrak{T}_0$. En effet, à la fonction $\inf(ny, \alpha)$ correspondra $\inf(n\theta(y), \alpha e)$, et à la fonction caractéristique de $P_{y,\alpha}$ correspondra l'idempotent $\frac{1}{\alpha} \sup\limits_n[\inf(n\theta(y), \alpha e)]$; donc $P_{y,\alpha}$ doit appartenir à $\mathfrak{T}_0$. En outre, xy doit être *sommable* pour tout $x \in E_+$; en effet, y est limite d'une suite croissante (y_n) de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles de $\mathfrak{T}_0$; donc $\theta(y)$ est limite de la suite croissante des $\theta(y_n)$, et $U_x[\theta(y)]$ est limite de la suite des $U_x[\theta(y_n)] = \int_\Omega xy_n \, d\mu$, qui est par suite majorée, ce qui prouve que xy est sommable et $U_x[\theta(y)] = \int_\Omega xy \, d\mu$.

Réciproquement, considérons l'espace de Riesz E′ formé des fonctions y *mesurables*-$\mathfrak{T}_0$ et telles que xy soit *sommable* pour tout $x \in E_+$; montrons qu'on peut définir une application linéaire $y \to \theta(y)$ de E′ sur un sous-espace E'_U de E_U, telle que

$$\theta(y^+) = [\theta(y)]^+ \quad \text{et} \quad U_x[\theta(y)] = \int_\Omega xy \, d\mu.$$

pour tout $x \in E_+$. En effet, nous avons défini ci-dessus une telle application dans le sous-espace D' de E' formé des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles de $\mathfrak{C}_0$. Si maintenant $y \geqq 0$ appartient à E', y est limite d'une suite croissante (y_n) d'éléments de D', et pour tout $x \in E_+$, la suite des intégrales $\int_\Omega xy_n\,d\mu$ converge; cela signifie que, dans E_U, la suite des $\theta(y_n)$ est une suite de Cauchy, donc convergente vers un élément qu'on peut désigner par $\theta(y)$ (car on vérifie aisément que cet élément ne dépend pas de la suite croissante (y_n) tendant vers y); par continuité, on voit alors que θ est linéaire et satisfait aux conditions posées ci-dessus, ainsi qu'à la relation

$$\theta(xy) = \theta(x)\,\theta(y)$$

lorsque $x \in E$, $y \in E'$. Toutefois, θ *n'est pas biunivoque* en général; il est clair en effet que la relation $\theta(y) = 0$ équivaut au fait que xy est nulle presque partout pour tout $x \in E_+$; et il est aisé de voir que cette condition peut encore s'exprimer en disant que l'ensemble des points où $y(\xi) \neq 0$ est tel que son intersection avec tout ensemble de $\mathcal{F}$ (et par suite avec tout ensemble de $\mathfrak{C}$) est de mesure nulle. L'ensemble $\mathfrak{N}$ des ensembles ayant cette propriété est une *sous-tribu* de $\mathfrak{C}_0$; si donc on range dans une même classe les fonctions de E' qui de diffèrent que sur un ensemble de $\mathfrak{N}$, l'ensemble E'_0 de ces classes sera un *espace de Riesz* qu'on pourra *identifier* au sous-espace E'_U de E_U de sorte que toutes les conditions du n° 20 soient vérifiées.

Le sous-espace E'_U de E_U ainsi obtenu est donc *le plus grand* sous-espace de E_U dont on puisse identifier les éléments à des classes de fonctions sur Ω; ce sous-espace est-il toujours identique à E_U, ou, ce qui revient au même, est-il *complet*? La propriété est vraie lorsque Ω et μ sont l'espace et la mesure construits par le procédé de S. Kakutani (n° 18), puisque cette construction avait précisément pour but de « réaliser » sous forme de fonctions les éléments « abstraits » de E_U. La propriété est vraie aussi lorsque les tribus $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_0$ sont identiques, c'est-à-dire lorsque l'ensemble Ω est de la forme P_y, où $y \in H_+$ [37]; alors l'idempotent e est limite

[37] Cette condition équivaut au fait que Ω est réunion *dénombrable* d'ensembles de mesure finie.

d'une suite croissante d'éléments de H, donc il en est de même de tout élément de E_U^+, chacun de ces éléments appartient par suite à E'_U.

Par contre, il est probable (bien que nous n'ayons pu démontrer ce fait rigoureusement) qu'il y a des cas où l'anneau E_U contient des éléments *non représentables par des fonctions* (tout au moins par des fonctions définies sur l'ensemble Ω d'où l'on est parti) [38].

23. Une question analogue à celle du n° 20 se pose lorsque l'anneau E est formé de *fonctions* (finies) sur un ensemble Ω, et que la forme linéaire U satisfait aux conditions (V_a) et (VII_a). Le théorème 4 prouve alors que E est isomorphe à un anneau de fonctions sur un autre ensemble Ω', et que U correspond à une intégrale sur ces nouvelles fonctions; mais U peut-elle être considérée comme une intégrale *sur les fonctions de l'anneau* E *initial*, autrement dit, existe-t-il une mesure μ définie sur Ω, et telle que $U(x) = \int_\Omega x\, d\mu$? La réponse est ici très facile; s'il existe une telle mesure, la condition $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(\xi) = 0$ en tout point $\xi \in \Omega$, pour une suite décroissante (x_n) de fonctions appartenant à E, doit entraîner $\lim\limits_{n \to \infty} U(x_n) = 0$. Inversement, si cette condition est remplie, la théorie de M. Daniell et les travaux (inédits) de N. Bourbaki prouvent que U est bien une intégrale sur les fonctions de E [39].

(38) Considérons, dans le plan, la mesure *linéaire* de Lebesgue, et l'ensemble Φ des segments $y = \alpha$, $0 \leq x \leq 1$, où α varie de 0 à 1. Si la borne supérieure de l'ensemble des fonctions caractéristiques de ces segments pouvait correspondre à la fonction caractéristique d'un ensemble N, N devrait rencontrer tout segment de Φ suivant un ensemble de mesure linéaire 1, et au contraire, tout ensemble mesurable (linéairement) dont l'intersection avec chaque segment de Φ est de mesure 0. devrait rencontrer N en un ensemble de mesure linéaire nulle; en particulier, toute droite non parallèle à Ox devrait rencontrer N en un ensemble de mesure nulle. Il est fort improbable qu'un tel ensemble puisse exister; il ne saurait en tout cas (d'après le théorème de Lebesgue-Fubini) être mesurable superficiellement.

(39) P. J. Daniell, *Annals of math.*, t. 19, 1917-1918, p. 279-294; t. 21, 1919-1920, p. 203-220. La théorie de M. Daniell permet tout d'abord de définir un ensemble E′ de fonctions « *sommables pour* U », et de prolonger U à cet ensemble de sorte que les propriétés classiques de passage à la limite dans l'intégrale de Lebesgue soient encore valables. On définit ensuite les fonctions de E′

II.

24. Dans cette deuxième partie, nous allons étudier ce qui se passe lorsqu'on suppose seulement que E et U satisfont à la condition (V_a), mais *non* à la condition (VII_a). Notre premier but va être la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Étant donnés un anneau de Riesz* E *et une forme linéaire positive* U *sur* E, *satisfaisant à* (V_a), *il existe un élément e de* E_U *et un seul, tel que* $ex = x$ *pour tout* $x \in E$.

L'existence de cet élément a été démontrée simplement aux n^{os} 12 et 13, comme conséquence de (VII_b) [et *a fortiori* de (VII_a)]. Pour l'obtenir sans supposer (VII_b) vérifiée, il nous faudra faire un tout autre raisonnement, beaucoup plus détourné.

25. Une première étape va consister à prouver que, *dans* A_U, *la relation* $x^2 = 0$ *entraîne* $x = 0$ [propriété démontrée au n° 14

---

négligeables pour U, par la condition $U(|x|) = 0$; un ensemble *négligeable pour* U est une partie de Ω dont la fonction caractéristique est négligeable; on range en une même classe les fonctions sommables qui ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble négligeable, et l'on montre que l'ensemble de ces classes est un espace normé *isomorphe* à E_U^1.

Pour définir la mesure dans Ω et montrer que U est l'intégrale correspondant à cette mesure, il faut d'abord montrer, avec les notations du n° 21, que l'ensemble $P_{x,\alpha}$ a sa fonction caractéristique sommable pour tout $\alpha > 0$ et toute fonction positive $x \in E'$. En vertu de la manière dont s'obtiennent les fonctions de E' à partir de celle de E (par double passage à la limite), on peut se borner au cas où $x \in E$; par le raisonnement du n° 21, on se ramène à montrer que la fonction $g_n(x)$ est sommable. Or, pour tout entier $m > 0$, soit $f_m(t)$ un polynome tel que, pour $0 \leqq t \leqq m$, on ait $0 \leqq f_m(t) \leqq g_n(t)$ et $|g_n(t) - f_m(t)| \leqq \frac{1}{m}$; si β est un nombre > 0 (ne dépendant que de α) tel que $g_n(t) < \beta t$, et si l'on pose $y_m = \inf[|f_m(x)|, \beta x]$, on a $0 \leqq y_m \leqq \beta x$ pour tout m, et la suite des fonctions y_m (qui appartiennent à E) converge simplement vers $g_n(x)$ dans Ω; l'application du théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe somme montre que $g_n(x)$ est sommable.

Ayant prouvé que les fonctions caractéristiques des $P_{x,\alpha}$ sont sommables, on définit la mesure d'un tel ensemble comme la valeur de U pour sa fonction caractéristique. Comme au n° 21, on prouve alors que la tribu engendrée par cette famille d'ensembles est identique à l'ensemble des P_x pour $x \in E'$, et il est immédiat que U est l'intégrale attachée à la mesure ainsi définie.

en utilisant (VII_b)]. Cette démonstration se fera elle-même en trois stades :

1° Nous montrerons d'abord que, si x et y sont deux éléments de E_+, *xy appartient à la famille complète de x* (et aussi, par suite, à celle de y). Il faut prouver que, lorsque n croît indéfiniment, l'élément $z = (xy - nx)^+$ de E tend vers o. Or, on a $z(xy - nx) = (xy - nx)(xy - nx)^+ = [(xy - nx)^+]^2 \geqq 0$, donc $xz \leqq \frac{1}{n} xyz \leqq \frac{1}{n} x^2y^2$, puisque $z \leqq xy$; on en déduit $xyz \leqq \frac{1}{n} x^2 y^3$ et comme $z \leqq xy$, $z^2 \leqq \frac{1}{n} x^2y^3$; par suite $U(z^2) \leqq \frac{1}{n} U(x^2y^3)$, et lorsque n tend vers $+\infty$, $U(z^2)$ tend vers o ; d'après l'inégalité de Schwarz, $U_t(z)$ tend aussi vers o pour tout $t \in E_+$, donc z tend vers o dans E_U.

2° En second lieu, prouvons que, pour tout $x \in E_+$, *x appartient à la famille complète de x^2*. Il faut établir que, lorsque n tend vers $+\infty$, $y = (x - nx^2)^+$ tend vers zéro. On a ici

$$x(y - nxy) = y(x - nx^2) = (x - nx^2)(x - nx^2)^+ = [(x - nx^2)^+]^2 \geqq 0 ;$$

d'après le 1°, $x(y - nxy)^+$ est disjoint de $x(y - nxy)^-$, donc on a $x(y - nxy)^- = 0$; on en déduit aussitôt [formule (2)] que, pour tout $z \in E_U$ appartenant à la famille complète de x, on a aussi $z(y - nxy)^- = 0$. Mais d'après le 1°, $(y - nxy)^-$ appartient à la famille complète de x, donc $[(y - nxy)^-]^2 = 0$ et par suite $(y - nxy)^- = 0$; autrement dit $nxy \leqq y$; comme $y \leqq x$, on en déduit $y^2 \leqq \frac{1}{n} y \leqq \frac{1}{n} x$, d'où $U(y^2) \leqq \frac{1}{n} U(x)$, ce qui prouve, comme ci-dessus, que y tend vers o lorsque n tend vers $+\infty$.

3° Pour montrer que $x^2 = 0$ entraîne $x = 0$ pour tout élément $x \geqq 0$ de A_U, il nous suffira d'établir que, pour tout $z \in E_+$, $U_z(y)$ est arbitrairement petit pour tout $y \in E_+$ suffisamment voisin de x ; si $x \leqq a \in E_+$, on peut d'ailleurs se limiter à considérer des y tels que $y \leqq a$ (n° 6). Donnons-nous donc un $\varepsilon > 0$ arbitraire ; pour tout $n > 0$, on a $z \leqq \sup(z, nz^2) = nz^2 + t$, où $t = (z - nz^2)^+$; d'après le 2°, on peut supposer n pris de sorte que $U(at) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, pour tout $y \in E_+$ tel que $y \leqq a$,

$$zy \leqq nz^2y + ty \leqq nz^2y + at,$$

d'où

$$U_z(y) = U(zy) \leqq n\,U(z^2y) + U(at) \leqq n\,U(z^2y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, on a, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$U(z^2y) \leqq \sqrt{U(z^2)}\cdot\sqrt{U(z^2y^2)};$$

par hypothèse, lorsque y tend vers x dans J_a, y^2 tend vers $x^2 = 0$ (n° 6), donc $U(z^2y^2) = U_{z^2}(y^2)$ tend vers 0; donc, dès que y sera assez voisin de x dans J_a, on aura $n\,U(z^2y) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, et par suite $U_z(y) \leqq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

26. Il est facile maintenant de généraliser *dans l'anneau cohérent* A_U, la propriété 1° du n° **25**; en effet, si x et y sont deux éléments $\geqq 0$ de A_U, pour tout $z \in A_U^+$ disjoint de x, on a $xz = 0$, donc $xyz = 0$, ce qui prouve (n° **4**) que xy et z sont disjoints; xy appartient donc à la famille complète de x.

Quant à la propriété 2° du n° **25**, nous sommes en mesure de la préciser considérablement dans l'anneau A_U^+. Pour tout $x \geqq 0$ dans A_U, x^2 appartient à la famille complète de x; pour tout $\lambda > 0$, désignons par x_λ la partie de x appartenant à la famille complète de $(\lambda x - x^2)^+$, et posons $x'_\lambda = x - x_\lambda$; x_λ et x'_λ étant disjoints, on a $x^2 = x_\lambda^2 + x_\lambda'^2$, x_λ^2 et $x_\lambda'^2$ appartenant respectivement aux familles complètes de x_λ et x'_λ; donc $\lambda x - x^2 = (\lambda x_\lambda - x_\lambda^2) + (\lambda x'_\lambda - x_\lambda'^2)$; les deux éléments du second membre étant disjoints, on a aussi

$$(\lambda x - x^2)^+ = (\lambda x_\lambda - x_\lambda^2)^+ + (\lambda x'_\lambda - x_\lambda'^2)^+,$$

et

$$(\lambda x - x^2)^- = (\lambda x_\lambda - x_\lambda^2)^- + (\lambda x'_\lambda - x_\lambda'^2)^-;$$

on déduit de là $(\lambda x'_\lambda - x_\lambda'^2)^+ \leqq (\lambda x - x^2)^+$, et comme $(\lambda x'_\lambda - x_\lambda'^2)^+$ est disjoint de $(\lambda x - x^2)^+$, on a $(\lambda x'_\lambda - x_\lambda'^2)^+ = 0$; on voit de même que $(\lambda x_\lambda - x_\lambda^2)^- = 0$; donc on a $\lambda x_\lambda \geqq x_\lambda^2$ et $\lambda x'_\lambda \leqq x_\lambda'^2$.

Nous pouvons aller plus loin; soit d'abord $x_\lambda = u + v$ une décomposition de x_λ en deux parties disjointes u et v; on a $x_\lambda^2 = u^2 + v^2$, donc $\lambda x_\lambda - x_\lambda^2 = (\lambda u - u^2) + (\lambda v - v^2)$; les deux éléments du second membre étant disjoints en valeur absolue, la relation $\lambda x_\lambda - x_\lambda^2 \geqq 0$ entraîne $\lambda u - u^2 \geqq 0$ et $\lambda v - v^2 \geqq 0$. Prouvons maintenant que, pour tout $y \geqq 0$ dans A_U, on a $\lambda y \geqq uy$; si y' est la partie de y appartenant à la famille complète de u, on a $uy = uy'$, et $y' \leqq y$; on peut donc se borner au cas où y appartient à la famille complète de u. Alors, on a $u(\lambda y - uy) = y(\lambda u - u^2) \geqq 0$; comme $u(\lambda y - uy)^+$ et $u(\lambda y - uy)^-$ sont disjoints, on a $u(\lambda y - uy)^- = 0$; *a fortiori*, pour tout z appartenant à la famille complète de u, $z(\lambda y - uy)^- = 0$; en particulier, comme $(\lambda y - uy)^-$ appartient à la famille complète de u, par hypothèse, on a $[(\lambda y - uy)^-]^2 = 0$, donc $(\lambda y - uy)^- = 0$, ce qui signifie que $\lambda y \geqq uy$.

On démontrerait de même que, pour toute décomposition $x'_\lambda = u' + v'$ en deux éléments disjoints, on a $\lambda y \leqq u' y$ pour tout y appartenant à la famille complète de u'.

Notons en particulier que la relation $x_\lambda^2 \leqq \lambda x_\lambda \leqq \lambda x$, on déduit pour tout $y \in E_+$, $U_y(x_\lambda^2) \leqq \lambda U_y(x)$; lorsque λ tend vers 0, $U_y(x_\lambda^2)$ tend donc vers 0; si x_0 est la limite de x_λ, on a par suite (n° 6) $U_y(x_0^2) = 0$ pour tout $y \in E_+$, donc $x_0^2 = 0$, et par suite $x_0 = 0$. De même, de la relation $\lambda x'_\lambda \leqq x'^2_\lambda \leqq x^2$, on tire $\lambda U_y(x'_\lambda) \leqq U_y(x^2)$, donc lorsque λ tend vers $+\infty$, x'_λ tend vers 0.

27. Fixons-nous, dans ce qui suit, un élément $x > 0$ arbitraire de E_+, et considérons la forme linéaire positive $V = U_x$ définie et continue dans E_U. Dans la deuxième étape de notre raisonnement, nous allons voir que V *satisfait à l'axiome* (VII_b), ou, de façon plus précise, que l'on a pour tout $y \in E_+$, $V(y) = \sup_{z \in T} V(zy)$.

Avec les notations du n° 26, on a $y_\lambda \leqq y_\mu$ pour $0 < \lambda \leqq \mu$; on en déduit que y_λ est aussi la partie de y_μ appartenant à la famille complète de $(\lambda y - y^2)^+$, et par suite que $(y_\mu - y_\lambda)$ est disjoint de y_λ.

Donnons-nous arbitrairement un nombre ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, et posons, pour tout entier p (positif ou négatif),

$$u_p = y_{(1-\varepsilon)^p} - y_{(1-\varepsilon)^{p+1}}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on peut écrire

$$y = \sum_{p=-n}^{n-1} u_p + y_{(1-\varepsilon)^n} + y'_{(1-\varepsilon)^{-n}},$$

tous les termes de cette somme étant deux à deux disjoints; en outre, lorsque n tend vers $+\infty$, $v_n = \sum_{p=-n}^{n-1} u_p$ tend vers y. Considérons maintenant l'élément $z_n = \sum_{p=-n}^{n-1} \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} u_p$; pour tout élément $t \in E_+$, on peut écrire $t = \sum_{p=-n}^{n-1} t_p + t'$, où t_p appartient à la famille complète de u_p et t' est disjoint de tous les u_p; on a donc

$$z_n t = \sum_{p=-n}^{n-1} \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} u_p t_p$$

et comme $u_p \leqq y_{(1-\varepsilon)^p}$, $u_p t_p \leqq (1-\varepsilon)^p t_p$, donc $z_n t \leqq \sum_{p=-n}^{n-1} t_p \leqq t$. z_n appartient à T. Par ailleurs, $z_n y = \sum_{p=-n}^{n-1} \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} u_p^2$, et comme $u_p \leqq y'_{(1-\varepsilon)^{p+1}}$, $u_p^2 \geqq (1-\varepsilon)^{p+1} u_p$, donc

$$z_n y \geqq (1-\varepsilon) \sum_{p=-n}^{n-1} u_p = (1-\varepsilon) v_n;$$

on a par suite

$$V(y - z_n y) \leqq V(y - v_n) + \varepsilon V(v_n) \leqq V(y - v_n) + \varepsilon V(y);$$

d'après la continuité de V, $V(y - v_n)$ peut être rendu arbitrairement petit pour n assez grand, d'où la proposition.

28. L'étape suivante va consister à montrer que V *satisfait aussi à l'axiome* (VII_a) [40], c'est-à-dire que, pour tout $y \in E_+$, on a $V(y) = \sup_{z \in S} V(zy)$. Nous ne pouvons utiliser directement l'équivalence de (VII_a) et (VII_b) démontrée dans la première partie, car pour démontrer cette équivalence, on s'est appuyé sur l'axiome (V_a), et en général, cet axiome *n'est pas vérifié* par V; il nous faudra donc procéder d'une autre manière.

---

[40]. Nous devons faire ce détour, faute d'avoir pu démontrer directement que l'ensemble T admet une borne supérieure dans E_U, ou ce qui revient au même d'après le théorème 1, que pour tout $x \in E_+$, $U_x(z)$ est borné pour $z \in T$; la relation $U_x(z) \leqq U(x)$ n'est en effet nullement évidente *a priori*, tant qu'on ne sait pas que S est partout dense dans T [*voir* Note [32]].

Pour tout élément $y \geqq 0$ de E_U, nous désignerons par y_x la partie de y appartenant à la famille complète de x; nous étendrons cette définition à tout $y \in E_U$ en posant $y_x = (y^+)_x - (y^-)_x$; comme y^+ et y^- sont disjoints, il en est de même de $(y^+)_x$ et de $(y^-)_x$, donc $(y_x)^+ = (y^+)_x$, $(y_x)^- = (y^-)_x$; les y_x forment un sous-espace vectoriel de E_U que nous noterons $E_{x,U}$; lorsque y et z appartiennent à A_U, on a $(yz)_x = y_x z_x$; les éléments modérés de $E_{x,U}$ forment donc un anneau de Riesz cohérent que nous noterons $A_{x,U}$; les éléments y_x, où y parcourt E, forment un sous-anneau de Riesz E_x de $A_{x,U}$.

Montrons d'abord que, pour tout $y \in E_U$, on a $V(y) = V(y_x)$; cela revient à prouver que, si z est disjoint de x dans E_U^+, on a $U_x(z) = 0$; en vertu de la continuité de U_x dans E_U, et du fait que z est borne supérieure des $z' \in A_U$ tels que $0 \leqq z' \leqq z$, il suffit de faire la démonstration lorsque $z \in A_U^+$. Supposons que $z \leqq a \in E_+$; il faut prouver que, lorsque y tend vers z en restant dans J_a, on a $\lim U_x(y) = \lim U(xy) = 0$. Nous raisonnerons comme dans le théorème 2; on a $xy \leqq (x+y)\inf(x, y) \leqq (x+a)\inf(x, y)$, donc $U(xy) \leqq U_{x+a}[\inf(x, y)]$; comme $\inf(x, y)$ tend vers $\inf(x, z) = 0$, et que U_{x+a} est continue, on a bien $\lim U(xy) = 0$.

En second lieu, montrons que la forme linéaire positive $y_x \to V(y_x)$ sur A_x, satisfait à l'axiome (V_a); d'après ce qui précède, cela revient à prouver que la relation $U_x(y^2) = 0$ pour $y \in A_U^+$, entraîne que y est disjoint de x. Or, l'inégalité de Schwarz, appliquée à U_x, montre que $U_x(yz) = 0$ pour tout $z \in E_+$; cette relation s'écrit aussi [formule (6)] $U_z(xy) = 0$. On a donc $xy = 0$, ce qui montre (n° 4) que y est disjoint de x.

Pour tout $z_x \in E_x^+$, les applications

$$y_x \to V(z_x|y_x|) = V(z|y|) = U_x(z|y|) = U_{xz}(|y|) = U_{xz}(|y_x|)$$

forment une partie des semi-normes qui définissent la topologie du sous-espace $E_{x,U}$ de E_U; elles définissent donc sur $E_{x,U}$ une topologie séparée [d'après (V_a)] *moins fine* que celle induite par E_U. Pour cette topologie, il se peut que $E_{x,U}$ ne soit pas complet; son complété $E_{x,V}$ sera aussi le complété de E_x, muni des mêmes semi-normes $y_x \to V(z_x|y_x|)$, car avec cette topologie, E_x est partout dense dans $E_{x,U}$. L'espace $E_{x,V}$ est d'ailleurs, relativement à l'anneau E_x et à la forme linéaire $y_x \rightarrow V(y_x)$ sur cet anneau, obtenu par le même procédé que E_U à partir de E et de U; la forme linéaire V_{z_x}, pour tout $z_x \in E_x$, est donc continue dans $E_{x,V}$, et *a fortiori* dans $E_{x,U}$, pour la topologie de $E_{x,V}$; elle est aussi continue pour la topologie plus fine induite par E_U, donc elle coïncide sur $E_{x,U}$ avec l'application $y_x \rightarrow V(z_x y_x)$, puisque ces deux applications sont identiques dans E_x.

Cela étant, le raisonnement du n° 27 prouve que, *relativement à l'anneau* E_x, la forme linéaire V satisfait à l'axiome (VII_b). Comme elle satisfait aussi à (V_a) sur E_x, nous pouvons cette fois appliquer l'équivalence de (VII_a) et (VII_b) démontrée dans la première partie. Autrement dit, si S_x désigne l'ensemble des éléments $z_x \in E_x^+$ tels que $z_x u_x \leqq u_x$ pour tout $u_x \in E_x^+$, pour tout $y_x \in E_x^+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $z_x \in S_x$ tel que $V(y_x - z_x y_x) \leqq \varepsilon$. Or, z_x provient d'un élément $z \in E_+$, qui n'appartient peut-être pas à l'ensemble S; mais on peut écrire $z_x = \lim\limits_n z_n$, où $z_n = \inf(nx, z) \leqq z_x$. Pour tout $u \in E_+$, on a (puisque z_n appartient à la famille complète de x), $z_n u = z_n u_x \leqq z_x u_x \leqq u_x \leqq u$ donc $z_n \in S$; comme $V(z_n y_x)$ est arbitrairement voisin de $V(z_x y_x)$ pour n assez grand, on peut trouver n tel que $V(y_x - z_n y_x) \leqq 2\varepsilon$; comme d'ailleurs $V(y - z_n y) = V(y_x - z_n y_x)$, il est bien prouvé que V satisfait, dans E, à l'axiome (VII_a).

29. La démonstration de l'existence de l'élément e est maintenant facile; il suffit de prendre pour e la borne supérieure de S, qui existe dans E_U, d'après le théorème 1 et les relations $U_x(z) = U(zx) \leqq U(x)$ pour tout $x \in E_+$. Pour tout $y \in E_+$, on a $V(y) = \sup\limits_{z \in S} V(yz) = V(ey)$ d'après la continuité de V; cette relation s'écrit $U_x(y - ey) = 0$; comme l'élément x est arbitraire dans E_+, on a $y - ey = 0$ pour tout $y \in E$.

Reste à prouver l'unicité de l'élément e. Si l'on avait aussi $e'x = x$ pour tout $x \in E$, on en déduirait $(e - e')x = 0$, d'où $[\inf(|e - e'|, x)]^2 = 0$, donc (n° 25) $\inf(|e - e'|, x) = 0$ pour tout $x \in E_+$; *a fortiori*, $|e - e'|$ serait disjoint de tout élément modéré, et comme il est borne supérieure des éléments modérés z tels que $0 \leqq z \leqq |e - e'|$, on a nécessairement $|e - e'| = 0$. Le théorème 5 est ainsi complètement démontré.

30. Théorème 6. — *Étant donnés un anneau de Riesz* E *et une forme linéaire positive* U *sur* E, *satisfaisant à* (V_a), U_e *est une forme linéaire positive sur* E, *satisfaisant à* (V_a) *et à* (VII_a), *et* $V = U - U_e$ *est une forme linéaire positive sur* E, *telle que* $V(x^2) = 0$ *pour tout* $x \in E$.

En effet, pour tout $x \in E_+$, on a

$$U_e(x) = U_x(e) = \sup_{z \in S} U_x(z) = \sup_{z \in S} U(zx) \leqq U(x),$$

donc $U_e \leqq U$. D'après la formule (6), on a

$$U_e(x^2) = U_{ex}(x) = U_x(x) = U(x^2),$$

donc U_e satisfait à (V_a), et $V(x^2) = 0$ pour tout $x \in E$. Enfin, pour $z \in S$, on a

$$U_e(zx) = U_{ex}(z) = U_x(z),$$

donc U_e satisfait à (VII_a).

Comme $U_e(xy) = U(xy)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in E$, la topologie définie sur E à partir de U_e est identique à celle définie à partir de U. D'après le théorème 4, E est isomorphe à un anneau de Riesz formé de classes de fonctions sommables sur un ensemble Ω, U_e correspondant à l'*intégrale* sur ces fonctions; et l'on peut toujours (par la construction de S. Kakutani) supposer Ω formé de telle sorte que l'espace de Riesz E_U soit tout entier « réalisé » comme un espace de classes de fonctions sommables sur Ω.

On notera que, lorsque tout élément $x \in E_+$ est un carré, on a $V(x) = 0$ pour tout $x \in E_+$, donc $U = U_e$; dans le cas particulier où les éléments de E sont des fonctions bornées, on retrouve ainsi un résultat démontré d'une tout autre manière par N. Bourbaki (*cf.* L, n° 8).

31. Le théorème 5 permet aussi de voir ce qui correspond à l'énoncé du théorème de Lebesgue-Nikodym lorsque la condition (VII_a) n'est plus vérifiée. Considérons en effet une forme linéaire X sur E telle que $0 \leqq X \leqq \lambda U$; comme dans la démonstration du théorème 6, on montre que $X_e \leqq X$ et que $X(x^2) = X_e(x^2)$ pour tout $x \in E$. En outre, on a pour tout $x \in E_+$,

$$X_e(x) = X_x(e) \leqq \lambda U_x(e) = \lambda U_e(x),$$

autrement dit $X_e \leqq \lambda U_e$. Comme U_e vérifie l'axiome (VII_a), on peut appliquer le théorème de Lebesgue-Nikodym, et il existe donc $y \in E_U$ tel que $X_e = (U_e)_y = U_y$.

Ceci prouve que l'image par l'application $y \rightarrow U_y$ de E_U^+ est ici la famille complète engendrée par U_e. En outre, $V = U - U_e$ est *disjoint* de U_e dans l'espace F; il suffit pour le voir de montrer que, pour $y \in E_U^+$, la relation $U_y(x^2) = 0$ pour tout $x \in E_+$ entraîne $y = 0$; comme y est borne supérieure des z modérés tels que $0 \leqq z \leqq y$, on peut se borner au cas où y est modéré. Alors, d'après l'inégalité de Schwarz, la relation $U_y(x^2) = 0$ entraîne $U_y(xz) = U_x(yz) = 0$ pour tout $z \in A_U$ et tout $x \in E_+$, et en particulier $U_x(y^2) = 0$ pour tout $x \in E_+$; on a donc $y^2 = 0$, d'où $y = 0$.

Dans la décomposition $X = X_e + (X - X_e)$ d'une forme linéaire positive $X \leqq \lambda U$ sur E, X_e est donc la partie de X appartenant à la famille complète de U_e, $X - X_e$ la partie de X appartenant à la famille complète de V; on a d'ailleurs $X - X_e \leqq \lambda V$.

Finalement, l'énoncé qui remplace le théorème de Lebesgue-Nikodym est le suivant : toute forme linéaire positive X sur E se met d'une seule manière sous la forme $X = U_y + Y + Z$, où $y \in E_U^+$, Y appartient à la famille complète de V, et est donc tel que $Y(x^2) = 0$ pour tout $x \in E$, et où enfin Z est disjoint de U.

32. On peut encore interpréter le théorème 6 en disant qu'une condition ***nécessaire et suffisante***, pour qu'un anneau de Riesz soit isomorphe à un anneau de classes de fonctions sommables, est qu'il existe sur E *une* forme positive U satisfaisant à (V_a).

Lorsque cette condition est remplie, les remarques du n° 31 permettent d'étendre le théorème 6 à *toute* forme linéaire positive X définie sur E [satisfaisant ou non à (V_a)]. En effet, la forme linéaire positive $W = U + X$ satisfait à (V_a) et l'on a $X \leqq W$; il existe donc, dans l'espace E_W, un élément e tel que $ex = x$ pour tout $x \in E$, et un élément $y \geqq 0$ tel que $X_e = W_y$, et $X(x^2) = X_e(x^2)$ pour tout $x \in E$. Comme X_e est continue dans tout ensemble I_a, X_e vérifie l'axiome (VII_a), puisque e est borne supérieure de l'ensemble S dans E_W.

En outre, si, pour tout $x \in E_+$, on désigne par x_y la partie de x appartenant à la famille complète de y dans E_W, et si l'on pose

$x_y = (x^+)_y - (x^-)_y$ pour tout $x \in E$, les x_y forment un anneau de Riesz E_y; on montre, comme au n° 28, qu'on a

$$X_e(x) = W_y(x) = W_y(x_y)$$

pour tout $x \in E$ [on se ramène à prouver que $W_y(x) = 0$ si $x \in A_W$ est disjoint de y; il suffit de faire la démonstration lorsque $y \in A_W$, et alors le raisonnement du n° 28 s'applique, en remarquant que $W_y(x) = W_e(yx)$]. Si alors on considère X_e comme une forme linéaire positive *sur l'anneau* E_y, elle satisfait non seulement à (VII_a), mais aussi à (V_a); ici encore, la démonstration se fait comme au n° 28 [on doit montrer que $W_y(x^2) = 0$, pour $x \in E_+$, entraîne que x est disjoint de y; il suffit de faire la démonstration lorsque $y \in A_W$, et alors on a $W_y(xz) = W_z(xy) = 0$ pour tout $z \in E_+$, donc $xy = 0$].

(Manuscrit reçu le 29 octobre 1944.)