BULLETIN DE LA S. M. F.

GUSTAVE CHOQUET
JACQUES DENY

Sur quelques propriétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 118-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__118_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE MOYENNE CARACTÉRISTIQUES DES FONCTIONS HARMONIQUES ET POLYHARMONIQUES;

PAR MM. GUSTAVE CHOQUET et JACQUES DENY.

1. On sait que la propriété de moyenne des fonctions harmoniques sur une sphère, exprimée par le théorème de Gauss, est caractéristique de ces fonctions dans la classe des fonctions continues.

On peut se demander si cette propriété est un fait isolé, ou si elle s'étend à des ensembles plus généraux que la sphère ([1]).

On est conduit à cette question par l'étude des fonctions *préharmoniques* du plan ([2]). On appelle ainsi une fonction numérique F(M) définie aux sommets d'un quadrillage régulier formé de carrés, et égale en chacun de ces sommets à la moyenne de ses valeurs aux quatre sommets adjacents. Un calcul simple montre alors que si C est un carré formé avec un nombre quelconque de carrés élémentaires, on a la relation

$$S_A = 2 S_D,$$

en désignant par S_A (resp. S_D) la somme des valeurs prises par F(M) aux sommets situés sur les arêtes « ouvertes » ([3]) de C (resp. les diagonales « ouvertes » de C). Si l'on remarque alors que la moyenne des valeurs prises par une fonction harmonique quel-

([1]) On connaît d'autres propriétés de moyenne pour les fonctions harmoniques; par exemple la moyenne spatiale d'une telle fonction dans un ellipsoïde est la même pour tous les ellipsoïdes homocaux *cf.* L. ASGEIRSSON, *Ueber eine Mitelwertseigenschaft...* (*Math. Annalen*, t. 113, 1936, p. 321-346); E. MAKAI, *A property of mean of harmonic functions* (*Rend. Circ. Palermo*, 1941, p. 33-40)].

([2]) *Cf.* H. B. PHILIPPS et N. WIENER, *Nets and the Dirichlet's problem* (*Journal of Math. and Phys.*, t. 2, 1923, p. 105-124). La dénomination « fonction préharmonique » est due à G. BOULIGAND (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XI).

([3]) Le terme « ouvert » signifie que les extrémités de ces segments ne doivent pas être comptées comme sommets.

conque aux sommets d'un carré infiniment petit est égale, au troisième ordre près, à la valeur au centre, on en déduit aisément que lorsqu'une fonction est harmonique dans et sur un carré, sa moyenne prise sur le périmètre est égale à sa moyenne prise sur les diagonales (1).

Nous montrerons dans la première Partie par un calcul direct que cette propriété s'étend aux polygones réguliers quelconques (2).

En abandonnant une certaine précision, ce fait peut s'exprimer de la manière suivante : il existe sur les côtés et les rayons de tout polygone régulier P une distribution de masses telle que l'intégrale de Stieltjes de toute fonction harmonique prise sur tout ensemble chargé semblable à P soit nulle.

Nous préciserons ce qu'il faut entendre par là, et nous caractériserons, dans une deuxième Partie, les distributions sur un ensemble E telles que l'intégrale de Stieltjes de toute fonction harmonique de l'espace R_n prise sur un ensemble chargé semblable à E soit nulle. Nous montrerons que la classe de ces distributions est identique à celle des distributions que nous appellerons *normales*.

Un problème plus général se pose alors, et ce sera l'objet de la troisième Partie : convenons de dire qu'une fonction continue F(M) est *associée* à un ensemble chargé ou distribution (E, λ) si l'intégrale de Stieltjes de F(M) sur tout ensemble semblable à E est nulle. Il s'agit de déterminer tous les couples fonctions-distributions associées.

En nous bornant au cas de deux dimensions, nous montrerons que si une distribution n'est pas *normale*, les seules fonctions associées sont des polynomes dont nous déterminerons la forme générale. Si la distribution est normale, toute fonction associée est polyharmonique; et si de plus elle satisfait à une certaine condition, toute fonction associée est harmonique. C'est en particulier le cas des distributions très simples portées par des polygones réguliers, envisagées dans la première Partie. On obtient

(1) Dans l'espace cette méthode conduit au résultat suivant : si une fonction est harmonique dans et sur un cube, sa moyenne superficielle sur les faces est égale à sa moyenne sur les 12 triangles déterminés par le centre et les arêtes.

(2) La méthode des fonctions préharmoniques conduirait encore au résultat dans le cas d'un hexagone régulier.

ainsi des propriétés de moyenne caractéristiques pour les fonctions polyharmoniques d'une part, et pour les fonctions harmoniques d'autre part, généralisant la réciproque du théorème de Gauss.

Pour terminer, nous indiquerons dans la quatrième Partie une intéressante application de nos résultats que M. H. Cartan a eu l'obligeance de nous signaler, relativement à l'approximation uniforme de toute fonction continue, définie sur un compact fixe, par des combinaisons linéaires de fonctions déduites très simplement d'une fonction continue donnée; cette dernière fonction peut d'ailleurs être choisie arbitrairement sous la seule réserve qu'elle ne soit pas polyharmonique (cas de deux dimensions), que ce ne soit pas un polynome (cas d'une seule dimension).

PREMIÈRE PARTIE.

2. Soit P un polygone régulier de p côtés, convexe ou non, de centre O, de sommets $A_1 A_2 \ldots A_p$. Nous allons montrer que si P est intérieur à un cercle de centre O dans lequel la fonction $f(x, y)$ est harmonique, la moyenne linéaire de $f(x, y)$ sur l'ensemble des côtés de P est égale à celle sur l'ensemble des rayons OA_1, OA_2, ..., OA_p.

En observant que la moyenne linéaire d'une fonction analytique de 2 variables sur un segment de droite du plan (x, y) est une fonction analytique des extrémités de ce segment, le résultat ci-dessus s'étendra aussitôt à tout polygone régulier entièrement situé, intérieur compris, dans le domaine de définition d'une fonction harmonique.

Supposons donnée sur les côtés et les rayons de P une distribution de masses invariante par toute symétrie ou rotation laissant P invariable globalement.

On veut écrire que pour toute fonction harmonique dans et sur le cercle circonscrit à P, qu'on pourra supposer être le cercle-unité, on a

$$\int_{P\,(^1)} f(x, y)\, d\lambda = 0.$$

Or une telle fonction étant développable en série uniformément

(1) P désigne ici l'ensemble des côtés et des rayons du polygone.

convergente de polynomes harmoniques, il suffit de vérifier la relation précédente pour les fonctions $\rho^n \cos n\theta$, $\rho^n \sin n\theta$.

A cet effet prenons pour axe Ox la médiatrice du côté $A_1 A_2$; désignons par L la ligne brisée $OA_1 + A_1 A_2$. On a

$$\int_P \rho^n \cos n\theta \, d\lambda = \int_L \rho^n \cos n\theta \, d\lambda \left[1 + \cos\frac{2\pi}{p} n + \cos\frac{4\pi}{p} n + \ldots + \cos\frac{2(p-1)\pi}{p} n \right]$$
$$+ \int_L \rho^n \sin n\theta \, d\lambda \left[\sin\frac{2\pi}{p} n + \sin\frac{4\pi}{p} n + \ldots + \sin\frac{2(p-1)\pi}{p} n \right].$$

Or le second crochet est nul pour toute valeur de n; le premier est égal à zéro ou à p selon que $n \neq kp$ ou $n = kp$ (k entier $\geqq 0$).

D'autre part les hypothèses de symétrie entraînent que

$$\int_P \rho^n \sin n\theta \, d\lambda = 0.$$

Si donc

$$\int_L \rho^{kp} \cos kp\theta \, d\lambda = 0$$

pour tout k entier $\geqq 0$, l'intégrale de toute fonction harmonique sur tout polygone chargé semblable à P *sera nulle.*

3. Supposons que la distribution λ ait une densité déterminée $\alpha = 1$ sur OA_1 et β (constante) sur $A_1 A_2$. L'angle $A_1 O A_2$ valant $\frac{2\pi q}{p}$ $(q < p)$, on a, pour $n = kp$,

$$\int_{OA_1} \rho^n \cos n\theta \, d\lambda = \frac{(-1)^{kq}}{n+1}.$$

D'autre part, si $x_0 = \cos\frac{\pi q}{p}$ désigne l'abscisse de $A_1 A_2$,

$$\int_{A_1 A_2} \rho^n \cos n\theta \, d\lambda = 2\beta \mathcal{R} \int_0^{\sin\frac{\pi q}{r}} (x_0 + iy)^n \, dy = 2\beta \frac{(-1)^{kq}}{n+1} \sin\frac{\pi q}{p}.$$

Le rapport des deux intégrales est $\beta . A_1 A_2$; on en déduit aussitôt le théorème déjà énoncé :

Si une fonction $f(x, y)$ est harmonique à l'intérieur d'un polygone régulier quelconque P *et sur le périmètre de celui-ci, sa moyenne linéaire sur le périmètre de* P *et sa moyenne linéaire sur l'ensemble des rayons de* P *sont égales.*

4. Voici une généralisation du résultat précédent :

Supposons donnée sur OA_1 une distribution de masses dont la densité au point M s'exprime par un polynome de degré m en $u = OM$. Si I désigne le milieu de A_1A_2, un calcul élémentaire montre qu'il existe sur A_1A_2 une distribution symétrique par rapport à I, *dont la densité au point* N *s'exprime par un polynome de même degré m en* $|IN| = v$ et telle que

$$\int_L \rho^n \cos n\theta \, dy = 0,$$

pour $n = kp$ (k entier $\geqq 0$).

La distribution λ sur P, déduite de celle qu'on vient de définir sur $L = OA_1 + A_1A_2$ par des rotations successives d'amplitude $\frac{2\pi}{p}$, vérifie la relation de moyenne

$$\int_P f(x, y)\, d\lambda = 0$$

pour toute fonction $f(x, y)$ harmonique à l'intérieur et sur le périmètre du polygone P.

DEUXIÈME PARTIE.

5. Les distributions de masses sur polygones réguliers envisagées au paragraphe 3 ont été considérées par G. Bilger (1) du point de vue potentiel. Il a remarqué que le potentiel logarithmique engendré est nul à l'extérieur du polygone (le périmètre est « potentiellement équivalent » à l'ensemble des rayons, pour un choix convenable de la densité sur chacune de ces deux figures). De même la distribution qui intervient dans le théorème de Gauss est constituée par la masse $+1$ placée au centre et par la masse -1 uniformément répartie sur la surface de la sphère sur laquelle on prend la moyenne d'une fonction harmonique : le potentiel newtonnien correspondant est évidemment nul à l'extérieur de la sphère. Nous allons voir qu'il s'agit là d'un fait général.

---

(1) G. Bilger, *Des polygones potentiellement équivalents* (*C. R. Soc. phys. Genève*, t. 54, 1937, p. 41-43); *Potentiels de polygones et géométrie élémentaire* (*Id.*, p. 84-88).

Les résultats de cette Partie s'appliquent à tout espace cartésien à $n \geqq 2$ dimensions R_n. Le potentiel envisagé sera le potentiel logarithmique pour $n = 2$, le potentiel en $\frac{1}{r^{n-2}}$ pour $n \geqq 3$; dans ce dernier cas nous adopterons les notations correspondant à $n = 3$. Selon les notations de H. Cartan, $U^\lambda(M)$ désignera le potentiel engendré au point M par la distribution λ.

La distribution (E, λ) (distribution λ portée par l'ensemble fermé borné E) sera dite *homothétique* (resp. *semblable*) à la distribution (E_0, λ_0) si E est homothétique (resp. semblable) à E_0, deux sous-ensembles homologues de E et de E_0 ayant la même charge.

La distribution (E, λ) sera dite *complètement intérieure* à un domaine D lorsque le complémentaire E^* de la région infinie déterminée dans l'espace par E est contenu dans D. Il existe alors dans D une surface régulière fermée dont l'intérieur contient E^* et est contenu dans D.

La distribution (E, λ) sera dite *normale* si le potentiel U^λ est identiquement nul au voisinage de l'infini [1], ou, ce qui revient au même, sur $C(E^*)$.

6. Rappelons les résultats suivants, dont nous aurons besoin par la suite :

a. Si F(M) est une fonction *continue* dans un domaine D, la fonction $F_r(M)$, égale en chaque point M à la valeur moyenne de F(M) *dans* la sphère $S(M, r)$, admet des dérivées partielles du 1^er ordre continues dans son domaine d'existence D_r. En prenant des moyennes itérées, on obtiendra une fonction $F_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ définie dans $D_{r_1+r_2+\ldots+r_n}$ et y admettant des dérivées partielles d'ordre n continues.

b. Si F_r est harmonique quel que soit r, F est harmonique, car lorsque r tend vers zéro, F_r converge uniformément vers F dans

(1) On obtient un exemple très général de distribution normale en prenant des masses quelconques intérieures à un domaine borné D et en leur ajoutant l'opposé des masses obtenues par le balayage sur la frontière de D.

Il serait intéressant de caractériser la nature topologique et métrique du noyau de masse des distributions normales.

tout domaine complètement intérieur à D. Le résultat s'étend aux fonctions polyharmoniques d'ordre inférieur ou égal à un même nombre p, car la limite d'une suite uniformément convergente de telles fonctions est encore une fonction polyharmonique d'ordre $\leqq p$ [1]; enfin il est bien évident que ceci s'étend également aux polynomes d'ordre $\leqq p$.

c. Soient $F(M)$ une fonction continue dans un domaine D, et (A, λ), (B, μ) deux ensembles chargés situés dans D et tels que pour un point O fixe, le point $M(P, Q)$ défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ reste dans D quand P et Q décrivent respectivement A et B. Si $\varphi(P, Q)$ désigne la fonction définie par $\varphi(P, Q) = F[M(P, Q)]$, le théorème de Fubini sur les intégrales doubles de Stieltjes donne

$$\int_B d\mu_Q \int_A \varphi(P, Q)\, d\lambda_P = \int_A d\lambda_P \int_B \varphi(P, Q)\, d\mu_Q.$$

7. Théorème A. — *Si* F *est harmonique dans un domaine* D, *et si* (E, λ) *est une distribution normale complètement intérieure à* D, *on a*

$$\int_E F\, d\lambda = 0.$$

Soit en effet S une surface régulière dont l'intérieur contient E^* et est contenu dans D. On sait qu'à l'intérieur de S, F est le potentiel U^μ d'une distribution μ répartie sur S, lorsque le nombre de dimensions de l'espace est $n > 2$. Pour $n = 2$, on a seulement $F = U^\mu + \text{const.}$ [2]. Mais la masse totale $\lambda(E)$ est nulle, car le potentiel U^λ est nul à l'infini, et l'on a dans tous les cas

$$\int_E F\, d\lambda = \int_E U^\mu\, d\lambda.$$

---

(1) *Cf* M. Nicolesco. *Recherches sur les fonctions polyharmoniques* (*Annales de l'E. N. S.*, t. 71, 1935, p. 183-220) et *Les fonctions polyharmoniques* (*Act. scient. et ind.*, t. 331, p. 23); on trouvera dans ce dernier fascicule une abondante bibliographie concernant ces fonctions.

(2) Cela résulte de l'étude faite par De La Vallée Poussin dans son célèbre Mémoire sur l'*Extension de la méthode du balayage* (*Ann. de l'Inst. H. Poincaré*, 1932).

Le principe de réciprocité donne alors

$$\int_E U^{\mu}\, d\lambda = \int_S U^{\lambda}\, d\mu = 0,$$

car U^{λ} est nul sur $C(E^*)$, donc sur S ; le théorème est donc établi (1).

8. Théorème B (réciproque du précédent). — *Soit* (E_0, λ_0) *une distribution normale, et telle, de plus, que la moyenne spatiale de* U^{λ_0} *sur* E_0^* *ne soit pas nulle, c'est-à-dire que* $\int_{E_0^*} U^{\lambda_0}\, dv \neq 0$, *où* dv *est l'élément de volume; alors si* F, *continue dans un domaine* D, *est telle que* $\int_E F\, d\lambda = 0$ *pour toute distribution* (E, λ) *homothétique de* (E_0, λ_0) *et complètement intérieure à* D, F *est harmonique dans* D.

Démonstration. — D'après (6, *c*), la relation $\int_E F\, d\lambda = 0$ entraîne pour la fonction F_{r_1,r_2,r_3} qui a ses dérivées du troisième ordre continues d'après (6, *a*), la relation $\int_E F_{r_1,r_2,r_3}\, d\lambda = 0$ lorsque (E, λ) est complètement intérieure au domaine $D_{r_1+r_2+r_3}$. Si l'on montre que F_{r_1,r_2,r_3} est harmonique quels que soient r_1, r_2, et r_3, F sera harmonique d'après (6, *b*).

On peut donc se limiter au cas où F admet des dérivées du troisième ordre continues dans D.

Soit D′ un domaine complètement intérieur à D. Soit μ la distribution dans D′ de densité spatiale $-\dfrac{\Delta F}{(n-2)s_n}$ si $n > 2$ (s_n = surface de la sphère-unité), $-\dfrac{\Delta F}{2\pi}$ si $n = 2$. La formule de Poisson montre que $F - U^{\mu}$ est harmonique dans D′ (2). Posons $F - U^{\mu} = H$.

(1) M. M. Brelot a bien voulu nous signaler qu'il est inutile de faire appel à la représentation des fonctions harmoniques par des potentiels. La formule classique de Green conduit au résultat, à l'aide d'une interversion des intégrations.

(2) La démonstration classique de la formule de Poisson suppose la densité à dérivées du premier ordre bornées, c'est pourquoi nous avons supposé continues les dérivées du troisième ordre de F. En fait, toute fonction à dérivées secondes continues est représentable par potentiels (*cf.* de la Vallée Poussin, *loc. cit.*). L'hypothèse faite ne diminue en rien la généralité.

Si (E, λ) est homothétique de (E_0, λ_0) et intérieur à la petite sphère $S(M, r)$, on a

$$0 = \int_E F\, d\lambda = \int_E (H + U^\mu)\, d\lambda = \int_E U^\mu\, d\lambda = \int_{\mu'} U^\lambda\, d\mu,$$

en tenant compte de ce que $\int_E H\, d\lambda = 0$ (théorème A), car U est nul sur $C(E^*)$. D'où, finalement,

$$\int_{E^*} U^\lambda\, \Delta F\, dv = 0.$$

Prenons r assez petit pour que $\Delta F(P) = \Delta F(M) + \varepsilon(P)$, avec $|\varepsilon(P)| < \varepsilon$ pour $P \in S(M, r)$. Il vient

$$\Delta F(M) \int_{E^*} U^\lambda\, dv + \theta\varepsilon \int_{E^*} |U^\lambda|\, dv = 0, \qquad |\theta| \leqq 1.$$

Comme ε est arbitrairement petit, et que le rapport des deux intégrales $\int_{E^*} U^\lambda dv$ et $\int_{E^*} |U^\lambda|\, dv$ (non nulles par hypothèse, et finies, car tout potentiel est sommable) est indépendant de E, on en déduit que $\Delta F(M) = 0$, donc que F est harmonique.

9. *Remarques*. — *a*. La restriction $\int_{E_0^*} U^{\lambda_0} dv \neq 0$ est essentielle pour assurer la validité du théorème B; en effet si elle n'est pas vérifiée, toute solution de $\Delta U =$ const., c'est-à-dire toute fonction harmonique augmentée d'un polynome du second ordre, satisfait à la propriété de moyenne $\int_E F\, d\lambda = 0$ (1). Ce cas sera étudié en détail dans la troisième Partie.

b. Si ρ désigne la distance d'une origine fixe arbitraire O à un point P parcourant E, les relations

$$\int_{E^*} U^\lambda\, dv = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_E \rho^2\, d\lambda = 0$$

sont équivalentes pour toute distribution normale (E, λ).

---

(1) Exemple simple de distribution normale (E, λ) telle que $\int_E U^\lambda\, dv = 0$: deux masses opposées placées en deux points A et B intérieurs à un cercle et symétriques par rapport au centre, auxquelles on ajoute la distribution opposée à celle qui résulte du balayage sur la circonférence.

En effet, plaçons-nous par exemple dans R_3; soit $S(C, R)$ une sphère de centre O assez grande pour contenir E^* dans son intérieur; soit U^ν le « potentiel-mesure » engendré par la distribution ν de densité spatiale 1 dans $S(O, R)$; un calcul immédiat montre que $U^\nu(P) = 2\pi R^2 - \frac{2\pi\rho^2}{3}$ aux points P tels que $OP = \rho \leq R$; il en résulte aussitôt, en tenant compte de ce que U^λ est nul sur $C(E^*)$, et de ce que $\lambda(E) = 0$

$$\int_{E^*} U^\lambda \, d\nu = \int_S U^\lambda \, d\nu = \int_E U^\nu \, d\lambda = -\frac{2\pi}{3}\int_E \rho^2 \, d\lambda,$$

ce qui démontre l'équivalence annoncée; même calcul dans $R_n (n > 3)$, avec des coefficients plus compliqués; pour R_2, le terme logarithmique qui intervient dans le calcul du « potentiel-mesure » disparaît, et l'on a, pour la distribution normale (E, λ),

$$\int_{E^*} U^\lambda \, d\nu = -\frac{\pi}{2}\int_E \rho^2 \, d\lambda;$$

le cas où cette expression s'annule sera étudié en détail dans la troisième Partie.

c. Si une distribution (E_0, λ_0) est telle que la propriété de moyenne exprimée par le théorème B soit possédée par toute fonction harmonique, cette distribution est normale.

En effet, si U^λ n'est pas nul en un point A de $C(E^*)$, prenons pour fonction harmonique F le potentiel engendré par la masse $+1$ placée en A. Le principe de réciprocité donne

$$U^\lambda(A) = \int_E F \, d\lambda = 0,$$

d'où contradiction.

Cette remarque montre que les distributions simples sur polygones réguliers envisagées dans la première Partie sont normales; d'où en particulier les résultats de G. Bilger (*cf.* § 5). De même : la masse $+1$ répartie uniformément sur les six faces d'un cube, et la même masse $+1$ répartie uniformément sur les douze triangles déterminés par le centre et les arêtes, créent le même potentiel newtonien à l'extérieur du cube.

d. Les propriétés de moyenne énoncées au paragraphe 3 sont caractéristiques des fonctions harmoniques dans la classe des fonctions continues.

En effet, nous venons de voir que les distributions correspondantes sont normales; il reste à vérifier que la moyenne de U sur E_0^* n'est pas nulle; ce qui est aisé.

De même la propriété de moyenne relative au cube est caractéristique des fonctions harmoniques de trois variables.

TROISIÈME PARTIE.

10. Nous dirons qu'une fonction F, continue dans un domaine D, et une distribution (E_0, λ_0) sont *associées* si $\int_E F\,d\lambda = 0$ pour toute distribution (E, λ) complètement intérieure à D, et *semblable* à (E_0, λ_0). Dans cette Partie nous nous proposons de résoudre le problème : *déterminer tous les couples associés : fonctions continues-distributions* (¹).

Nous nous bornerons au cas de deux variables. Nous verrons que la propriété d'admettre une distribution associée n'est pas caractéristique des fonctions harmoniques, mais des fonctions polyharmoniques.

En vertu de (6, *c*), si F, continue, est associée à (E_0, λ_0), il en est de même pour $F_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$, qui admet des dérivées d'ordre k continues. En prenant k suffisamment grand (selon λ_0), nous verrons que cette dernière fonction est, soit harmonique, soit polyharmonique d'ordre $\leqq p(\lambda_0)$, soit un polynome d'ordre $\leqq p(\lambda_0)$; d'après (6, *b*), F sera de même nature. Nous pouvons donc supposer que F possède des dérivées d'ordre aussi élevé qu'il sera nécessaire.

11. Si l'on attache à E_0 deux axes rectangulaires (Ox, Oy), la distribution λ_0 est déterminée par ses différents *moments*, c'est-

(¹) On considère des distributions (E, λ) *semblables* à l'une d'elles, et non pas seulement homothétiques; ce dernier cas conduirait à des fonctions pas forcément analytiques, comme le montre l'exemple suivant : (E_0, λ_0) est constituée par deux masses opposées, dont le support est parallèle à Oy (cas de deux variables); alors toute fonction de la forme $F = f(x)$ est associée à (E_0, λ_0).

à-dire par les nombres $m_{p,q}=\int x^p y^q \, d\lambda_0$, p et q étant deux entiers quelconques $\geqq 0$, car il est bien connu que si tous les moments d'une distribution portée par un ensemble borné sont nuls, celle-ci s'évanouit.

Nous appellerons $(p+q)$ l'*ordre* du moment $m_{p,q}$; enfin nous appellerons *moments harmoniques d'ordre n* de la distribution (E_0, λ_0), les deux nombres

$$\alpha_n=\int \rho^n \cos n\theta \, d\lambda_0, \qquad \beta_n=\int \rho^n \sin n\theta \, d\lambda_0.$$

Remarquons ici que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution soit normale est que ses moments harmoniques soient tous nuls.

12. *Distributions associées à une fonction harmonique particulière.* — Le théorème A (§ 7) montre qu'une distribution normale est associée à toute fonction harmonique; inversement cherchons toutes les distributions associées à une fonction harmonique particulière donnée F.

Soit n l'ordre du premier moment harmonique non nul de (E_0, λ_0); soit

$$F = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)\rho^k$$

le développement de F autour de M pris comme origine; en écrivant que l'intégrale de Stieltjes de F par rapport à la distribution (E, λ) infiniment petite, déduite de (E_0, λ_0) par une homothétie dans laquelle M et l'origine O de E_0 sont homologues, et par une rotation d'angle θ_0 autour de ce point, il vient

$$a_n \int_E \rho^n \cos n(\theta+\theta_0)\, d\lambda + b_n \int_E \rho^n \sin n(\theta+\theta_0)\, d\lambda = 0,$$

quel que soit θ_0, ce qui entraîne

$$a_n = b_n = 0.$$

Ceci ayant lieu en tout point M du domaine d'existence de F, il en résulte que F est un polynome harmonique d'ordre inférieur à n.

Mais si l'on observe que le développement au voisinage de l'infini du potentiel logarithmique engendré par la distribution (E_0, λ_0) est

$$U^{\lambda_0}(r, \varphi) = \alpha_0 \log \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nr^n}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

où α_n et β_n sont les moments harmoniques d'ordre n de la distribution, on voit qu'on peut énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante :

Si F *est un polynome harmonique de degré n, les distributions associées sont celles dont le potentiel logarithmique est, au voisinage de l'infini, un infiniment petit d'ordre* $n+1$ *au moins, et celles-là seulement.*

Si F *est une fonction harmonique ne se réduisant pas à un polynome, les distributions associées sont celles dont le potentiel logarithmique est identiquement nul au voisinage de l'infini, c'est-à-dire les distributions normales, et celles-là seulement.*

13. *Fonctions associées à une distribution non normale; polynomes exceptionnels.* — Soit n l'ordre du premier moment harmonique non nul de la distribution donnée (E_0, λ_0); à celle-ci est associé tout polynome harmonique de degré $n-1$ au plus; d'autre part il est bien évident qu'il en est de même de tout polynome de degré inférieur à l'ordre du premier moment (ordinaire) non nul. Nous allons voir qu'il peut y avoir d'autres fonctions associées : ce sont encore des polynomes, d'un type très particulier, que nous appellerons *polynomes exceptionnels* (*ou polynomes* $\mathfrak{T}$).

Posons

$$x + iy = \rho\, e^{i\theta} = u, \qquad x - iy = \rho\, e^{-i\theta} = v.$$

En supposant que F admet des dérivées partielles d'ordre $n+1$, cette fonction s'écrit, au voisinage de M,

$$\begin{aligned} F(P) = {} & A_0 + \rho(A_1 e^{i\theta} + B_1 e^{-i\theta}) + \rho^2(A_2 e^{+2i\theta} + B_2 e^{-2i\theta} + A'_2) + \ldots \\ & + \rho^n(A_n e^{ni\theta} + B_n e^{-ni\theta} + A'_n e^{(n-2)i\theta} + B'_n e^{-(n-2)i\theta} + \ldots) + \rho^{n+1} G(P), \end{aligned}$$

G(P) étant borné au voisinage de M. La méthode du paragraphe précédent (intégration de F sur des ensembles chargés infiniment petits) donne ici, compte tenu des hypothèses sur les moments harmoniques d'ordre n : $A_n = B_n = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^n F}{\partial u^n} = \frac{\partial^n F}{\partial v^n} = 0,$$

F est donc de la forme

$$F = (uv)^{n-1}\varphi_0 + (uv)^{n-2}\varphi_1 + \ldots + (uv)\varphi_{n-2} + \Phi_{n-1},$$

où φ_k est un polynome homogène de degré k en u et v et Φ_{n-1} un polynome quelconque de degré $n - 1$ en u et v; en revenant aux variables x et y, on a

$$(\mathfrak{T})\quad F = (x^2+y^2)^{n-1}\psi_0 + (x^2+y^2)^{n-2}\psi_1 + \ldots + (x^2+y^2)\psi_{n-2} + \Psi_{n-1},$$

où les polynomes ψ_k, Ψ_{n-1} en x et y ont les mêmes propriétés que les polynomes φ_k, Φ_{n-1} respectivement.

$F = 0$ est l'équation générale des courbes algébriques de degré $2n - 2$ passant $n - 1$ fois par chacun des points cycliques.

Inversement, il est facile de voir qu'à un tel polynome on peut associer une distribution à moments harmoniques d'ordre n non tous nuls. Par exemple, pour $F = A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D$, il suffira que les moments du premier ordre s'annulent et que, de plus, $\int_{E_0} \rho^2\, d\lambda = 0$. Ce résultat peut se rattacher aux propriétés bien connues du paraboloïde de révolution.

Les polynomes signalés au début de ce paragraphe rentrent dans la forme générale ($\mathfrak{T}$). En résumé :

Si n est l'ordre du premier moment harmonique non nul d'une distribution qui n'est pas normale, les seules fonctions continues associées sont des polynomes de degré $2n - 2$ au plus de la forme ($\mathfrak{T}$) (polynomes exceptionnels); inversement à un tel polynome on peut associer une distribution à moments harmoniques d'ordre n non tous nuls.

En particulier si $\lambda_0(E_0) \neq 0$, F est identiquement nulle; si les moments du premier ordre sont non tous nuls, les seules fonctions associées sont les constantes.

14. *Fonctions associées à une distribution normale; distributions itérées.* — Reprenons les notations du paragraphe **8**.

Nous avons vu que si F, continue, dans D, est associée à la distribution normale (E_0, λ_0), on a, pour toute (E, λ) semblable à (E_0, λ_0) et complètement intérieure à D

$$\int_{E^*} \Delta F(P)\, U^{\lambda}(P)\, ds_P = 0,$$

en remplaçant dv par l'élément d'aire ds :

Or ceci montre que la fonction ΔF *et la distribution* (E_0^*, λ'_0) *de densité superficielle* U^{λ_0} *sur* E_0^* *sont associées.* Les résultats du paragraphe précédent permettent d'énoncer :

Si cette nouvelle distribution est non normale, ΔF est un polynome exceptionnel. F est donc égale à une fonction harmonique augmentée d'un polynome. En particulier si $\lambda'_0(E_0^*) \neq 0$, c'est-à dire si $\int_{E_0^*} U^{\lambda_0} ds \neq 0$, F est harmonique, résultat déjà établi (§ 8, théor. B).

Si λ'_0 est, elle aussi, normale, il en résultera

$$\int_{E^*} \Delta(\Delta F)\, U^{\lambda'} ds = 0,$$

ce qui conduira à considérer la nouvelle distribution λ''_0, de densité superficielle $U^{\lambda'_0}$ sur E_0^*; si elle n'est pas normale, on devra avoir $\Delta^2 F =$ polynome; F sera une fonction *biharmonïque* augmentée d'un polynome.

On peut recommencer indéfiniment, et considérer les *distributions itérées* successives $\lambda'_0, \lambda''_0, \ldots, \lambda_0^{(p)}, \ldots$, dont la loi de formation est évidente. Si la distribution itérée $\lambda_0^{(p)}$ d'ordre p n'est pas normale, toutes les précédentes l'étant, F sera une fonction polyharmonique d'ordre p augmentée d'un polynome.

Nous allons voir que ces distributions successives ne peuvent être toutes normales; ce résultat, important pour notre objet, montrera que F est certainement de la forme : fonction polyharmonique + polynome, c'est-à-dire encore une fonction polyharmonique.

15. Il est facile d'exprimer, à l'aide des seuls moments de la distribution (E_0, λ_0), le fait que les distributions itérées successives sont normales ou non.

Soit en effet à calculer l'expression

$$\int_{E_0^*} \rho^n \cos n\theta \, d\lambda'_0 = \int_{E^*} \rho^n \cos n\theta \, U^{\lambda_0} \, ds\,;$$

pour cela considérons le potentiel engendré par la distribution μ de densité superficielle $\rho^n \cos n\theta$ dans le cercle $c(O, R)$, de centre O, origine des axes auxquels on a rapporté E_0, et de rayon R assez grand pour contenir E_0

$$U^\mu(P) = \int_C \log \frac{1}{PQ} \rho^n \cos n\theta \, ds_Q = \int_0^R \rho^{n+1} \, d\rho \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{PQ} \cos n\theta \, d\theta.$$

Mais si l'on désigne par (r, φ) les coordonnées polaires de P, on a les intégrales classiques

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{PQ} \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{n} \left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n \cos n\varphi & \text{si } r < \rho, \\ \dfrac{\pi}{n} \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n \cos n\varphi & \text{si } \rho < r, \end{cases}$$

d'où

$$U^\mu(P) = \frac{\pi}{2n} \cos n\varphi \left[R^2 r^n - \frac{n}{n+1} r^{n+2} \right],$$

$$\begin{aligned} &\int_{E_0^*} \rho^n \cos n\theta \, d\lambda'_0 \\ &= \int_{E_0^*} \rho^n \cos n\theta \, U^{\lambda_0} \, ds = \int_{E_0^*} U^{\lambda_0} \, d\mu = \int_C U^{\lambda_0} \, d\mu = \int_{E_0} U^\mu \, d\lambda_0 \quad (^1) \\ &= \frac{\pi}{2n} R^2 \int_{E_0} r^n \cos n\varphi \, d\lambda_0 - \frac{\pi}{2n+2} \int_{E_0} r^{n+2} \cos n\varphi \, d\lambda_0. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle, car (E_0, λ_0) est normale; le moment harmonique d'ordre n relatif à λ'_0 : $\int_{E_0^*} \rho^n \cos n\theta \, d\lambda'_0$, est donc égal, à un facteur numérique près, à

$$\int_{E_0} \rho^{n+2} \cos n\theta \, d\lambda_0$$

et l'on voit que :

Si (E_0, λ_0) est normale, la condition nécessaire et suffisante

---

(1) Car U^{λ_0} est nul sur $C(E_0^*)$.

pour que (E_0^*, λ'_0) le soit également est que les quantités

$$\int_{E_0} \rho^{n+2} \cos n\theta \, d\lambda_0, \quad \int_{E_0} \rho^{n+2} \sin n\theta \, d\lambda_0$$

soient nulles quel que soit l'entier $n \geqq 0$.

Plus généralement, on montrerait d'une façon toute pareille que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (E_0, λ_0) *et les* p *premières distributions itérées soient normales est que les quantités*

$$\int_{E_0} \rho^{n+2q} \cos n\theta \, d\lambda_0, \quad \int_{E_0} \rho^{n+2q} \sin n\theta \, d\lambda_0$$

soient toutes nulles, quel que soit l'entier $n \geqq 0$, *et pour* $q = 0, 1, 2, \ldots, p$.

Or, il est facile de voir que tous les moments $m_{p,q}$ ordinaires de (E_0, λ_0) s'expriment en fonction linéaire des intégrales précédentes. Si ces dernières sont toutes nulles, c'est-à-dire si toutes les distributions itérées sont normales, les moments de (E_0, λ_0) sont tous nuls, et cette distribution s'évanouit. Il existe donc une distribution itérée qui n'est pas normale, et ceci démontre la propriété énoncée à la fin du paragraphe **14**.

16. *Existence d'une distribution associée à une fonction polyharmonique.* — L'étude faite montre que si l'on peut associer à une distribution quelconque une fonction continue F, celle-ci est polyharmonique. Inversement il résulte du paragraphe **14** que si F est polyharmonique d'ordre p, elle est associée à toute distribution qui est normale ainsi que ses $p - 1$ premières itérées, car on a alors (*cf.* § 8)

$$\int_E F \, d\lambda = -\frac{1}{2\pi} \int_{E^*} \Delta F \, d\lambda' = \frac{1}{4\pi^2} \int_{E^*} \Delta^2 F \, d\lambda'' = \ldots$$
$$= \frac{1}{(-2\pi)^p} \int_{E^*} \Delta^p F \, d\lambda^{(p)}$$

et la dernière intégrale est nulle en vertu de $\Delta^p F = 0$.

Il nous reste donc à donner un exemple de distribution qui soit normale ainsi que ses $p - 1$ premières itérées. Pour cela il suffit de prendre p cercles concentriques, de rayons $R_1, R_2, \ldots, R_p$, et de répartir uniformément sur les circonférences des masses respectives m_1, m_2, $\ldots$, m_p, telles que

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{p} m_i R_i^{2k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1).$$

La distribution constituée par la masse -1 placée au centre commun O de ces cercles, et les masses m_1, m_2, $\ldots$, m_p, vérifie les conditions du paragraphe 15; elle peut donc être associée à toute fonction polyharmonique d'ordre p.

Remarquons que le système se résout facilement; on en déduit la formule ([1])

$$F(M) = \frac{R_2^2 R_3^2 \ldots R_p^2}{(R_2^2 - R_1^2)\ldots(R_p^2 - R_1^2)}\mu_1 + \ldots + \frac{R_1^2 R_2^2 \ldots R_{p-1}^2}{(R_1^2 - R_p^2)\ldots(R_{p-1}^2 - R_p^2)}\mu_p,$$

où μ_k est la moyenne de F sur la circonférence $c(O, R_k)$.

Cette formule, qui généralise celle de Gauss, à laquelle elle se réduit pour $p = 1$, est caractéristique des fonctions polyharmoniques d'ordre p ([2]).

En résumé nous pouvons énoncer le

17. Théorème. — *Si une fonction de deux variables* $F(x, y)$, *continue dans un domaine* D, *est associée à une distribution* (E_0, λ_0), *elle est polyharmonique dans* D; *d'une manière plus précise, c'est la somme d'un polynome et d'une fonction polyharmonique d'ordre* p, *où* p *est l'ordre de la première distribution itérée qui n'est pas normale; c'est exactement une*

([1]) Cette formule est valable dans l'espace R_n. C'est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème d'Almansi-Nicolesco : si F est polyharmonique d'ordre p dans D, et si $M \in D$, il existe un système et un seul de p fonctions harmoniques dans D, U_0, U_1, $\ldots$, U_{p-1}, telles que l'on ait

$$F(P) \equiv U_0(P) + \overline{MP}^2 U_1(P) + \ldots + \overline{MP}^{2p-2} U_{p-1}(P)$$

lorsque P est dans le plus grand domaine étoilé de centre M inscrit dans D [Almansi, *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^p = 0$ (*Annali di matematica*, 1899, p. 1-59); Nicolesco, *loc. cit.*].

([2]) Car $\int_{E_0} \rho^{2p} d\lambda_0 \neq 0$, ce qui entraîne que la masse totale de la distribution itérée d'ordre p est nulle, donc que $\Delta^p F = 0$ (*cf.* § 14).

fonction polyharmonique d'ordre p lorsque, de plus, la masse totale de cette dernière distribution n'est pas nulle.

Inversement, à toute fonction polyharmonique d'ordre $\leqq p$, *on peut associer une infinité de distributions* (E_0, λ_0), *qui ne dépendent que de p.*

Le résultat précédent est valable dans l'espace R_1 [1]. L'étude de ce cas est immédiate, et l'on obtient le théorème :

Si la fonction $F(x)$, *continue dans un intervalle* (a, b), *est associée à une distribution* (E_0, λ_0), *c'est un polynome d'ordre inférieur à celui du premier moment non nul.*

La réciproque est évidente.

QUATRIÈME PARTIE.

18. Nous allons faire l'application annoncée relative aux fonctions continues définies sur un compact de l'espace à une ou deux dimensions. Dans ce but donnons quelques définitions :

Si $F(M)$ est une fonction continue définie dans un domaine D de R_n, nous appellerons fonction *isomorphe* à F toute fonction $F'(M')$ définie dans un domaine D' déduit de D par une similitude S, et telle que $F'(M') = F(M)$ pour $M' = S(M)$. Si E_0 est un ensemble fermé borné de R_n, $(\mathcal{F})$ désignera la famille des fonctions isomorphes à $F(M)$ et attachées à des domaines D' tels que $E_0^* \subset D'$.

Dire que F est associée à une distribution (E_0, λ_0) revient évidemment à dire que pour toute fonction $F' \in (\mathcal{F})$, on a la relation $\int_{E_0} F'\,d\lambda_0 = 0$. Or nous avons vu que si F n'est pas polyharmonique dans D, il n'existe sur E_0 aucune distribution λ_0 telle que $\int_{E_0} F'\,d\lambda_0 = 0$ pour toutes les fonctions $F' \in (\mathcal{F})$. Dès lors un

---

(1) Le théorème précédent est vraisemblablement vérifié aussi dans tout espace cartésien R_n. La seule difficulté de son extension réside dans le maniement mal commode des fonctions harmoniques sphériques et hypersphériques.

théorème dû à Banach [1] montre que l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions de ($\mathcal{F}$) est partout dense dans l'espace des fonctions continues sur E_0. On peut donc énoncer le

THÉORÈME. — *Si la fonction continue* F *n'est pas polyharmonique dans* D, *toute fonction* Φ *définie et continue sur* E_0 *peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires finies de fonctions de* ($\mathcal{F}$).

Ce théorème serait évidemment faux si F était polyharmonique, car la limite uniforme de toute suite de fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqq p$ est une fonction de même nature (*cf.* 6, *b*).

19. *Remarque.* — Si les résultats de la troisième partie restent valables lorsqu'on remplace la totalité des distributions (E, λ) intérieures à D et semblables à (E_0, λ_0) par une famille moins générale, c'est-à-dire si l'on obtient une caractérisation des fonctions polyharmoniques sous des hypothèses moins strictes, il en résultera une amélioration du théorème précédent.

Or d'après les hypothèses de continuité il n'est pas nécessaire que les origines M des distributions (E, λ) considérées parcourent la totalité du domaine de définition de F : il suffit qu'elles constituent un ensemble partout dense sur ce domaine.

D'autre part on n'a pas besoin de considérer tous les rapports d'homothétie; il suffit d'associer à tout point M de l'ensemble précédent une suite discrète de rapports d'homothétie tendant vers zéro.

---

(1) BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932, Chap. IV. Il y est établi que si un ensemble G d'éléments f d'un espace vectoriel normé Ω n'est pas *fondamental*, c'est-à-dire si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des f est non dense dans Ω, il existe une fonctionnelle linéaire $U(f)$ non identiquement nulle dans Ω, et telle que $U(f) = 0$ pour $f \in G$.

Or si Ω est l'espace des fonctions $f(M)$ continues sur E_0, la fonctionnelle linéaire la plus générale est de la forme $U(f) \equiv \int_{E_0} f(M)\, d\lambda_0$. S'il n'existe pas de distribution λ_0 telle que $U(f) = 0$ pour tous les f d'une même famille ($\mathcal{F}$), c'est que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions de ($\mathcal{F}$) est partout dense dans Ω. Cette application a été utilisée par H. Cartan [*Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, 1941, p. 1-26)].

Enfin, dans le cas de R_2, il est inutile de considérer toutes les rotations possibles de (E, λ) autour de M. Il suffit que l'hypothèse soit vérifiée pour une infinité de directions issues de M (1).

On voit aisément comment ces remarques permettent d'améliorer le théorème du paragraphe 18. Notons en particulier qu'on peut prendre pour rapports des similitudes S une suite k_i de nombres augmentant indéfiniment (aussi rapidement qu'on voudra).

20. *Exemples.* — Nous nous bornerons au cas de R_1. $\{k_i\}$ désignera une suite quelconque de nombres réels positifs augmentant indéfiniment avec i.

a. Prenons $F(x) \equiv \sin x$. On arrive au résultat suivant : *Toute fonction continue sur* (0-1) *peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires de* $\sin \frac{x}{k_i}$, $\cos \frac{x}{k_i}$. L'ensemble des fonctions $\sin \frac{x}{k_i}$, $\cos \frac{x}{k_i}$ est donc *fondamental* (2) dans l'espace des fonctions continues sur (0-1).

Observons qu'à l'opposé du théorème de Fejer (approximation par des combinaisons linéaires de $\sin kx$, $\cos kx$), l'ensemble fondamental est constitué par des fonctions variant très peu dans (0-1).

b. $F(x) \equiv e^x$. Même énoncé, l'ensemble fondamental étant constitué par les fonctions $e^{\frac{x}{k_i}}$.

c. $F(x) \equiv x^\alpha$, avec $\alpha > 0$ non entier. On montre aisément que : *l'ensemble des fonctions* $(x + c)^\alpha$, *où* c *parcourt un ensemble de nombres réels positifs tout à fait arbitraire admettant* $+\infty$ *comme point limite, est fondamental.* On peut donc prendre pour ensemble des c une suite croissant aussi rapidement qu'on voudra.

---

(1) En effet, en reprenant la démonstration du paragraphe 13, on constate que si n est l'ordre du premier moment harmonique non nul de $\lambda^{(p)}$, $\Delta^p F$ est un polynome exceptionnel sous la seule hypothèse (relative aux rotations) que $\int_E F\, d\lambda = 0$ pour $2n+1$ orientations différentes de (E, λ).

(2) *Cf.* la note du paragraphe 18.

d. $F(x) \equiv (|x|)^p$, où p est un nombre positif différent d'un entier pair. Même énoncé, les c étant cette fois de signe quelconque, et admettant les deux points limites $+\infty$ et $-\infty$.

Lorsque $p = 1$ et que c parcourt l'ensemble des nombres réels on retrouve la remarque élémentaire qui est à la base de la démonstration de Lebesgue du théorème de Weierstrass sur le développement d'une fonction continue en série de polynomes.

Remarque. — Dans ces deux derniers exemples, la forme de F entraîne qu'on peut remplacer la famille $(\mathcal{F})$ par l'ensemble des fonctions déduites de F par des translations.

Plus généralement, soient $F(x)$ une fonction continue sur un segment de longueur $l > 1$, et $(\mathcal{F}')$ la famille des fonctions définies sur $(0\text{-}1)$ et déduites de (F) par translations. La question se pose de savoir si les fonctions de $(\mathcal{F}')$ constituent un ensemble fondamental dans l'espace des fonctions continues sur $(0\text{-}1)$.

On peut montrer que, pour tout $l > 1$, il existe des fonctions F pour lesquelles la réponse est positive.

Dans cet ordre d'idées de nombreux problèmes se posent, notamment dans les espaces euclidiens à plusieurs dimensions.

21. *Rapprochement avec la théorie des équations aux dérivées partielles.* — *A posteriori* nous allons voir que l'intervention des fonctions polyharmoniques dans notre étude pouvait être prévue par analogie, en considérant une question relative aux équations aux dérivées partielles.

Soit $F(x, y, \ldots, t)$ une fonction continue dans un domaine D de $\mathcal{E}_n$ et vérifiant dans D une équation aux dérivées partielles linéaire et homogène par rapport à l'ensemble des fonctions F et ses dérivées partielles; soit $\mathcal{H} = 0$ cette équation.

Si l'équation $\mathcal{H} = 0$ est invariante par toute homothétie de centre O, $\mathcal{H}$ ne contient que des dérivées partielles de même ordre; si, de plus, $\mathcal{H} = 0$ est invariante par translation, tous les coefficients de $\mathcal{H}$ sont des constantes (à un facteur commun près).

Si maintenant on veut exprimer que $\mathcal{H} = 0$ est en outre invariante par toute rotation de centre O, on est ramené à la question suivante : Remplaçons formellement dans $\mathcal{H}$ chaque dérivée partielle $\frac{\partial^p F}{\partial x^i \partial y^j \ldots \partial t^l}$ par le monome $x^i y^j \ldots t^l$; il faut que le polynome homogène H ainsi obtenu se reproduise, à une constante près, par toute rotation autour de O. Le cône $H = o$ est donc de révolution autour de toute direction, d'où

$$H \equiv (x^2 + y^2 + \ldots + t^2)^n.$$

On en tire

$$\mathcal{H} \equiv \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)^{(n)} \equiv \Delta^n F.$$

On retrouve l'équation des fonctions polyharmoniques.

(Manuscrit reçu le 4 juillet 1944.)

Addendum : M. Laurent Schwartz auquel nous avons fait part de notre travail a pu compléter le théorème du paragraphe 18, valable dans l'espace à une ou deux dimensions, en l'étendant à l'espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions.

Sa méthode très élégante s'inspire d'une idée analogue à celle que nous signalons au paragraphe 21.

Il a eu l'obligeance de vouloir bien nous permettre de donner ci-dessous sa démonstration.