BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

Triangles en position isogonale

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 31-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__31_0>

TRIANGLES EN POSITION ISOGONALE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Je vais développer quelques propriétés de la transformation quadratique birationnelle dite *isogonale*. Je les avais rencontrées à propos de la déformation des surfaces tétraédrales (*Journal de Math.*, 5, 1926, p. 227-295) et je me suis aperçu que, récemment, le professeur E. A. Weiss de Bonn les exposait de nouveau (*Deutsch. Math.*, 6, 1941, p. 135-147). Ce dernier les rattache à la théorie des formes binaires cubiques; je vais les rattacher à l'étude de la surface réglée de degré 4, signalée autrefois par Clebsch, dont la ligne multiple est une cubique gauche, lieu de points doubles, et la développable multiple une droite, enveloppe de plans tangents triples. En même temps la théorie des droites de Simson sera établie par des procédés extrêmement simples.

2. Un triangle $A_1A_2A_3$ fait correspondre à tout point M de son plan un point M′ tel que les droites A_iM, A_iM' soient symétriquement inclinées sur les bissectrices de l'angle $A_i (i = 1, 2, 3,)$. Il existe une conique, et une seule, tangente aux côtés de $A_1A_2A_3$ et admettant M pour foyer; les symétriques de M relativement aux côtés A_jA_k déterminent un cercle dont M′ est le centre; et alors les symétriques de M′ déterminent à leur tour un cercle, égal au précédent, de centre M; M et M′ sont les deux foyers associés de la conique en jeu. Cette correspondance (M, M′) est involutive, c'est la transformation quadratique birationnelle *isogonale* annoncée, relative au triangle $A_1A_2A_3$; les centres des cercles tangents aux côtés du triangle (A) sont les seuls points doubles de cette transformation; à chaque sommet A_i correspond un point indéterminé du côté A_jA_k; ou, plus exactement, à chaque élément de contact issu de A_i correspond le point de A_jA_k tel que le rayon le reliant à A_i soit symétrique de l'élément de contact par rapport

aux bissectrices de A_i. Toutes ces propriétés se démontrent aisément sans recours à la théorie des coniques en remarquant que si l'on projette un point M sur les côtés d'un angle Ox, Oy en m_1 et m_2, la droite OM et la perpendiculaire issue de O sur $m_1 m_2$ sont symétriques en direction par rapport aux bissectrices de Ox, Oy (dans le triangle $Om_1 m_2$ la hauteur issue de O et le diamètre OM sont symétriquement inclinés sur les bissectrices de l'angle O).

Définissons les points A_i par les coordonnées $(R\cos 2\alpha_i, R\sin 2\alpha_i)$: autrement dit, O est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle (A); l'angle $2\alpha_i$ est l'angle $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA_i}\right)$ de demi-droites, défini à 2π près; si ω est le point $(-R, o)$, où la partie négative de l'axe Ox coupe Γ, l'angle de droites *indéfinies* $(\omega x, \omega A_i)$ est α_i, défini à π près; $\tang \alpha_i$ est le paramètre unicursal qui peut servir à définir les points de Γ; sur Γ deux points B, C $(R\cos 2\beta, R\sin 2\beta)$ et $(R\cos 2\gamma, R\sin 2\gamma)$ donnent deux rayons orientés $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ dont la *vraie bissectrice* (droite non orientée) Ob est définie par $(Ox, Ob) = \beta + \gamma$; la droite BC (non orientée), perpendiculaire à Ob, a donc sa direction définie, à π près, par $(Ox, BC) = \beta + \gamma \pm \frac{\pi}{2}$.

A une droite Δ_1 du plan, la transformation fait correspondre une conique Γ_1 circonscrite à $A_1 A_2 A_3$; M décrivant Γ_1 et M', Δ_1 quatre rayons $(A_i M)$ et les quatre rayons $(A_i M')$ correspondants donnent le même birapport, puisque ces deux faisceaux sont superposables par symétrie autour de la bissectrice de l'angle A_i. Si Γ_1 coïncide avec Γ, Δ_1 devient la droite de l'infini; en effet soit le point M $(R\cos 2\varphi, R\sin 2\varphi)$; la parallèle à $A_j A_k$ issue de M recoupe Γ en $M_i(R\cos 2\varphi_i, R\sin\varphi_i)$ avec l'égalité définissant φ_i

$$\varphi + \varphi_i = \alpha_j + \alpha_k$$

et la droite $A_i M_i$ est définie par

$$(Ox, A_i M_i) = \alpha_i + \varphi_i - \frac{\pi}{2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \varphi - \frac{\pi}{2}$$

(on a appliqué les principes exposés un peu plus-haut).

Ce résultat prouve : *a*. que les droites $A_i M_i'$ pour $i = 1, 2, 3$ sont parallèles, donc que le point M' est à l'infini.

b. Que la correspondance (M, M′) entre Γ et Δ est projective, comme pour tout couple Γ_1, Δ_1 de conique et droite associées.

c. *La direction* ωM′ *définie par*

$$(Ox, \omega M') = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \varphi - \frac{\pi}{2}$$

reste la même si le triangle $A_1A_2A_3$ *est remplacé par un autre* $B_1B_2B_3$ *tel que* $\Sigma\alpha = \Sigma\beta$. Deux triangles (A), (B) satisfaisant à cette condition sont dits en *position isogonale*. *Un triangle donné sur* Γ *définit ainsi un ensemble* ∞^2 *de triangles tous en position isogonale les uns avec les autres.*

On peut remarquer que notre méthode est l'une des plus simples, et en même temps des plus rigoureuses, pour démontrer que les projections m_1, m_2, m_3 de M sur les côtés de (A) sont en ligne droite, car m_jm_k est perpendiculaire sur A_iM_i, de sorte que les trois segments m_2m_3, m_3m_1, m_1m_2, tous les trois perpendiculaires à une même direction, sont portés par une même droite, qui est la droite de Simson relative à M et (A). La parabole de foyer M tangente aux côtés de A admet $m_1m_2m_3$ pour tangente au sommet, et la direction de son axe est celle de A_iM_i. *La directrice de cette parabole passe par l'orthocentre* H *de* (A) et est déduite de la droite de Simson en la transformant par homothétie à partir de M dans le rapport 2. Cette proposition classique, dont les démonstrations proposées sont souvent artificielles et compliquées, se démontre très simplement par notre méthode. En effet, si nous considérons divers triangles tous en position isogonale entre eux et un point M déterminé de Γ, le point M′ est toujours le même, donc les diverses droites de Simson sont toutes parallèles entre elles; laissons A_1 fixe et remplaçons le côté A_2A_3 par un côté parallèle $\overline{A_2}\overline{A_3}$, de sorte que $A_1A_2A_3$ et $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$ sont en position isogonale; si $\overline{A_2}$ coïncide avec M, $\overline{A_3}$ coïncide avec M_1 et la droite de Simson de ce triangle particulier est la perpendiculaire $M\mu$ abaissée de M sur A_1M_1; étudions maintenant, à partir de ce triangle particulier A_1MM_1, le déplacement de l'orthocentre H de $A_1A_2A_3$ et de la droite de Simson correspondante (ou de la directrice de la parabole variable de foyer M, tangente au côté de $A_1A_2A_3$) quand A_2A_3 se déplace parallèlement à lui-même; la projection m_1 de M sur A_2A_3 subit une translation parallèle à A_1a_1, où a_1 est le pied de la hauteur issue de A_1 dans le triangle (A) mesurée précisément par la translation parallèle à A_1a_1, que subit A_2A_3 : la droite de Simson subit donc cette même translation, et la directrice la translation double; d'autre part A_1a_1 recoupant Γ en a'_1, le point H est tel que $\overrightarrow{a'_1 H} = 2\overrightarrow{a'_1 a_1}$; H subit une translation, double de celle de a_1, donc égale à la translation de la directrice; or, à l'instant initial, H est sur la directrice initiale (qui est $M\mu$, pendant que la parabole se réduit à la parallèle à A_1M_1 issue de M); donc à chaque moment H est sur la directrice et le résultat est établi.

On peut encore remarquer qu'il suffit d'une seule condition pour que deux triangles (A), (B) soient en position isogonale : or chaque sommet de (A) a pour homologue sur Δ le point à l'infini du côté opposé de (A); donc, on peut dire que deux triangles sont en situation isogonale si, dans la transformation définie par (A), le sommet B_1 a pour homologue le point à l'infini de B_2B_3.

3. On peut indiquer un cas spécial intéressant de deux triangles en situation isogonale : on prend pour B_i le point où la parallèle menée de A_i à A_jA_k recoupe Γ. On a alors

$$\alpha_i + \beta_i = \alpha_j + \alpha_k,$$

d'où

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta = 2\Sigma\alpha \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\beta = \Sigma\alpha,$$

ce qui établit la propriété. La figure, que le lecteur fera sans peine, montre que A_1B_2 et A_1B_3 sont des longueurs égales, car $A_1A_2B_2A_3$ est un trapèze isocèle, $A_1B_2 = A_2A_3$ et par échange des indices 2 et 3, $A_1B_3 = A_2A_3 = A_1B_2$. Par suite le rayon A_1O est la médiatrice de B_2B_3; *les perpendiculaires issues des points* A_i *sur les côtés correspondants* B_jB_k *concourent en* O; d'autre part les 3 droites A_iB_i déterminent un triangle $C_1C_2C_3$ dont les côtés sont parallèles à ceux de $A_1A_2A_3$, de sorte que A_i est le milieu de C_jC_k et Γ le cercle des 9 points du triangle (C); par suite B_i est le pied sur C_jC_k de la hauteur de (C) issue de C_i; l'orthocentre H de (C) est le centre de l'un des cercles tangents aux 3 côtés de (B); or la droite B_iH est perpendiculaire sur C_jC_k ou A_jA_k; *donc les per-*

pendiculaires issues des points B_i *sur les côtés correspondants* $A_j A_k$ *concourent en* H; par suite les deux triangles (A), (B) de ce cas particulier forment un couple *orthologique* dont les centres d'orthologie O et H ont été déterminés (une erreur à éviter est de dire que H est le centre du cercle inscrit au triangle $B_1B_2B_3$; ce n'est vrai que si $A_1A_2A_3$ a ses angles tous aigus; si A_1 est obtus, H est le centre du cercle exinscrit à $B_1B_2B_3$ dans l'angle B_1).

4. Revenons maintenant au cas général de deux triangles en situation isogonale; la droite de Simson de B_1 relativement au triangle (A) est perpendiculaire au rayon $B_1B'_1$; mais B'_1 est le point à l'infini de B_2B_3, *donc la droite de Simson de* B_1 *est perpendiculaire au côté* B_2B_3; soient H, K les orthocentres de (A) et (B); la droite de Simson de B_1 est donc parallèle à B_1K; l'homothétie de pôle B_1 et rapport 2 remplace cette droite de Simson par une droite parallèle, passant par H : on en déduit que le milieu du segment HK est un point b situé sur la droite de Simson de B_1 ; *donc les* 6 *droites de Simson des sommets* B_i *par rapport à* (A) *et de sommets* A_i *par rapport à* (B) *sont perpendiculaires aux côtés opposés de* (B) *ou* (A) *et concourent toutes au milieu du segment réunissant les deux orthocentres.*

En même temps nous établissons une *correspondance biunivoque entre les* ∞^2 *triangles* (B) *situés en position isogonale avec* (A), *et les* ∞^2 *points b du plan* et prouvons que *l'enveloppe des droites de Simson des divers points de* Γ *par rapport à* (A) *est une courbe de classe* 3; en effet un triangle (B) fournit un orthocentre K et le point b, tel que $\overrightarrow{Hb} = \frac{\overrightarrow{HK}}{2}$; *inversement* b étant donné, on en déduit K; mais alors le point B_1 est déterminé par ce fait que son homologue B'_1 sur Δ est à l'infini sur B_2B_3 ou dans la direction perpendiculaire à B_1K; or nous avons vu que B_1 ayant pour coordonnées ($R\cos 2\beta$, $R\sin 2\beta$) le point B'_1 est dans la direction définie par

$$(Ox;\, OB'_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta - \frac{\pi}{2};$$

donc B_1K est telle que

$$(Ox,\ B_1K) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta$$

et si x_0, y_0 sont les coordonnées de K, on a

$$\frac{y_0 - R\sin 2\beta}{x_0 - R\cos 2\beta} = \operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_3 - \beta),$$

on a ainsi une équation de degré 3 en $\operatorname{tang}\beta$, ce qui fournit B_1, B_2, B_3; le résultat est donc démontré. On peut simplifier cette résolution en supposant $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, ce à quoi on arrive par une rotation convenable des axes, et alors si $m = \operatorname{tang}\beta$, on a à résoudre l'équation

$$y_0(1 + m^2) - 2Rm + m[x_0(1 + m^2) - R(1 - m^2)] = 0.$$

Comme H est fixe, l'équation

$$(1) \qquad y(1 + m^2) - 2Rm + m[x(1 + m^2) - R(1 - m^2)] = 0$$

représente, non pas la tangente générale de la courbe enveloppe, mais la tangente générale de l'homothétique de cette courbe à partir de H dans le rapport 2 ; on a ainsi une courbe unicursale de classe 3, bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques, c'est-à-dire une *hypocycloïde à* 3 *rebroussements*. On a en même temps découvert que *l'enveloppe des droites de Simson relatives à un triangle* $A_1A_2A_3$ *est une hypocycloïde à* 3 *rebroussements, dont la grandeur est indépendante du choix précis du triangle* $A_1A_2A_3$: la courbe enveloppe de la droite (1) a ses points de rebroussement en

$$(3R, 0), \quad \left(\frac{-3R}{2}, \frac{3R\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{-3R}{2}, \frac{3R\sqrt{3}}{2}\right).$$

On peut remarquer que la droite de Simson pour (A) de A_1 est la hauteur A_1H et que le point $\overline{A_1}$ diamétralement opposé à A_1 donne pour droite de Simson précisément A_2A_3; on sait que le lieu des points d'où l'on peut mener à une hypocycloïde à 3 rebroussements deux tangentes rectangulaires est le cercle qui la touche aux points où elle rencontre à angle droit ses axes de symétrie; les pieds des hauteurs de $A_1A_2A_3$ appartiennent à ce cercle, qui est ainsi le cercle des 9 points de (A), et ceci explique pourquoi toutes les hypocycloïdes déterminées par les divers triangles inscrits dans Γ sont toutes égales. [On voit aussitôt que le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à la courbe enveloppe de (1) est le cercle Γ lui-même.]

5. La correspondance ponctuelle entre Γ et Δ réalisée au moyen d'un triangle $A_1A_2A_3$ ou des ∞^2 triangles en situation isogonale avec lui est très simple, puisqu'elle revient à joindre chaque point M de Γ à un point ω de Γ et à prendre la direction symétrique de ωM par rapport à une droite fixe. Mais il y a un fait géométrique à mettre en évidence, c'est la façon dont on peut réaliser le triangle (B) le plus général. Nous avons déjà indiqué comment on peut rattacher, d'une façon biunivoque, chaque triangle (B) au point b le plus général du plan [de b on mène les tangentes à l'hypocycloïde enveloppe des droites de Simson relatives à (A)]. On peut arriver au même résultat en faisant une transformation où Γ est remplacé par une courbe gauche C et le triangle $B_1B_2B_3$ par un triangle inscrit dans C, défini par son plan, variable cette fois, au lieu de rester fixe. Nous pouvons prendre un point Ω arbitraire, hors du plan de Γ et couper le cône S de sommet Ω et directrice Γ par une quadrique ayant en commun avec ce cône une génératrice arbitraire; le reste de l'intersection est une cubique gauche C; le cercle Γ et la cubique C se correspondent point pour point par les génératrices du cône S. Considérons maintenant une droite D arbitraire de l'espace, non sécante à C et les plans pivotant autour de D, coupant C en 3 points b_1, b_2, b_3; les droites b_2b_3, b_3b_1, b_1b_2 engendrent une surface réglée Σ de degré 4, dont C est ligne double, pendant que D est l'enveloppe des plans tangents triples; le cône circonscrit à Σ d'un point arbitraire est de classe 4; il se décompose en un cône de classe 3 et une génératrice de Σ, si le point vient sur Σ; si le point vient en un point de C, le cône se réduit à deux génératrices et à un cône effectif de seconde classe. Si donc nous mettons la surface Σ en perspective sur le plan de Γ à partir de Ω, les triangles $b_1b_2b_3$ de l'espace deviennent des triangles $B_1B_2B_3$ inscrits dans Γ et circonscrits à la conique γ suivant laquelle le cône de sommet Ω, circonscrit à Σ, est coupé par le plan de Γ. Il existe ∞^4 droites D; on arrive ainsi à ∞^4 coniques γ qui sont les coniques *triangulairement inscrites dans* Γ (il existe pour chaque conique γ ∞^1 triangles circonscrits à γ et inscrits dans Γ). Deux droites D, D′ ayant un point commun M fournissent deux coniques γ, γ' dont les deux séries ∞^1 de triangles (circonscrits à γ ou γ' et inscrits dans Γ) ont un triangle commun, obtenu par le plan D, D′. Si la droite D s'appuie sur

une sécante fixe double δ de C (il y a ∞^3 droites D pour chaque sécante δ), on trouve ∞^3 coniques γ toutes tangentes à la perspective Δ de δ sur le plan de Γ; en particulier si Δ est la droite à l'infini du plan de Γ, on retrouve les paraboles P dont un foyer est sur Γ, car le plan $D\delta$ conduit en perspective à un triangle FIJ, F étant la perspective du point f où ce plan recoupe C; FI, FJ sont isotropes; γ est donc une parabole de foyer F. Les ∞^2 triangles en position isogonale avec un triangle $A_1A_2A_3$ donné s'obtiennent avec les ∞^2 droites D' qui rencontrent la sécante double ij de C au même point que la droite D relative à $A_1A_2A_3$.

Ceci nous conduit d'ailleurs à tracer la parabole tangente simultanément aux côtés de (A), (B). Sa directrice est la droite HK, donc la direction de l'axe est perpendiculaire à HK, perce Δ en un point dont l'homologue sur Γ est le foyer de la parabole cherchée. Autrement dit nous avons construit l'unique tangente commune aux deux hypocycloïdes, enveloppes des droites de Simson relatives à (A) et (B).

Si donc nous considérons une parabole P dont le foyer F est sur Γ, il existe ∞^1 triangles inscrits dans Γ, circonscrits à P; ils sont tous en situation isogonale les uns avec les autres; si $A_1A_2A_3$ est l'un d'eux, il existe ∞^1 paraboles tangentes aux côtés de $A_1A_2A_3$, le foyer de chacune restant sur Γ; chacune d'elles définit ∞^1 triangles et l'on a ainsi les ∞^2 triangles en situation isogonale entre eux; d'autre part comme la première parabole P définit ∞^1 triangles $A_1A_2A_3$ et que chacun de ces triangles donne à son tour ∞^1 paraboles, on voit que l'on a un total de ∞^2 paraboles (avec ∞^2 triangles seulement, précisément parce qu'un triangle définit ∞^1 paraboles, de même que chaque parabole définit ∞^1 triangles); dans l'espace, cela revient à avoir choisi un point fixe de la sécante double ij de C et à considérer successivement les ∞^2 droites issues de ce point, pour chacune la surface Σ correspondante et le contour apparent de cette surface sur le plan de Γ à partir de Ω, contour qui est une de nos paraboles.

Sur le cercle Γ nous avons vu comment le choix du foyer sur Γ détermine la direction de l'axe (point à l'infini de Δ homologue du foyer choisi sur Γ); pour ce même foyer, on a ∞^1 paraboles, le choix de la tangente au sommet (perpendiculaire à la direction connue de l'axe) restant arbitraire.

On peut remarquer que, pour une parabole P de foyer F choisi sur Γ, les ∞^1 triangles $A_1 A_2 A_3$ inscrits dans Γ, circonscrits à P, sont chacun autopolaire par rapport à une certaine conique H (dépendant de P), harmoniquement inscrite dans Γ; à cause du triangle FIJ, on voit que H *est une hyperbole équilatère dont le centre est* F. Il y a ∞^2 hyperboles H, correspondant une à une aux ∞^2 paraboles P; les directions FA_1 et $A_1 A_2$ sont symétriques par rapport aux axes de H; on retrouve ainsi cette propriété qu'étant donné un poinl F quelconque de Γ, la correspondance entre un point M de Γ et le point homologue M′ de Δ est telle que les droites FM, FM′ sont symétriques par rapport à une droite fixe issue de F.

(Manuscrit reçu le 26 avril 1942.)