BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SALTYKOW

Problèmes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 134-157
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__134_0>

PROBLÈMES MODERNES D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE;

PAR M. N. SALTYKOW.

(*Conférences faites à la Société Mathématique de France à Paris le* 5 *mars et à Strasbourg le* 8 *mars* 1937.)

I. — Introduction.

Les fondateurs de la théorie des équations aux dérivées partielles, créant leurs méthodes d'intégration, avaient émis plusieurs idées qui ont grandement contribué au progrès de la théorie considérée [1]. Pour introduire, par la voie la plus directe, dans le sujet de la présente conférence on devrait rappeler, d'abord, les travaux de deux *Écoles Scientifiques : française* et *allemande*. La première fut inaugurée par les recherches de J. Liouville, J. Bertrand et E. Bour. Quant à l'École allemande, elle a été créée par S. Lie et A. Mayer.

La France, après la mort de Jacobi, devient le foyer de nouveaux travaux sur l'intégration des équations considérées. Les brillantes découvertes de J. Liouville, de J. Bertrand et de E. Bour ont fait avancer la théorie des équations étudiées, au delà des progrès qui ont été réalisés dans les Œuvres posthumes de Jacobi [2].

Or, à la fin du siècle passé, dans son dernier quart, la théorie des équations aux dérivées partielles revient sous l'influence de l'esprit germanique. A cette époque avait surgi une nouvelle

---

(1) N. SALTYKOW, *Les progrès et les problèmes actuels de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue.* Paris, Gauthier-Villars, 1936.

(2) N. SALTYKOW, *L'œuvre de Jacobi dans le domaine des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Bull. Soc. Math.*, 2e série, t. LXIII, juillet 1939).

génération des mathématiciens, étrangère à l'École française de J. Liouville, de J. Bertrand et de E. Bour. A la tête de la nouvelle école se placèrent S. Lie et A. Mayer qui ont entrepris leurs propres recherches sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. S. Lie est devenu célèbre par sa théorie des groupes continus et leurs applications. Il avait de plus introduit les éléments de contact, les multiplicités intégrales et les groupes fonctionnels. L'abondance des résultats publiés par S. Lie et leur forme géométrique avaient attiré l'attention du monde entier des mathématiciens. Ils se sont fidèlement adonnés aux nouvelles idées ; et il n'a été guère question ni de les comparer avec les anciens résultats, ni de les étudier d'un point de vue critique.

Une longue période, à peu près d'une quarantaine d'années, devait s'écouler pour que les études et les critiques détaillées parviennent à confronter les idées et les méthodes des Écoles française et allemande.

Alors on a pu constater que les idées de Joseph Liouville, qu'il avait développées dans son enseignement au Collège de France, ne sont pas moins profondes que celles de S. Lie. En effet, l'élément de contact de ce dernier géomètre ne représente qu'une interprétation géométrique d'un élément intégral de Liouville, *irrégulier*, comme on le dit à présent ([3]).

Or, cet illustre savant considérait, en même temps, les éléments intégraux réguliers. Son analyse, grâce à sa généralité et sa rigueur, était parfois supérieure à celle de S. Lie.

On s'était, d'autre part, bien aperçu que c'est précisément J. Bertrand qui avait inauguré, 20 ans avant S. Lie, l'introduction des groupes fonctionnels, bien que cette notion se trouvait déjà chez Jacobi; mais cependant elle ne fut publiée que postérieurement à Bertrand, dans les Œuvres posthumes de Jacobi.

Rappelons, enfin, le conflit qui s'est manifesté entre les deux Écoles scientifiques mentionnées à l'époque, où l'Académie des Sciences à Paris avait refusé les sollicitations de S. Lie et de A. Mayer. Ils avaient bien voulu qu'on leur reconnaisse les progrès que, grâce à leurs méthodes, ils avaient cru avoir réalisés

---

([3]) N. Saltykow, *Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris, Gauthier-Villars, 1931, Chap. V, p. 45.

dans le problème des trois corps, en réduisant son intégration à un système de six équations différentielles ordinaires du premier ordre. Or, le jury ne pouvait guère le faire, car le même résultat se trouvait déjà dans les anciennes recherches sur l'Intégration des équations différentielles de la Mécanique de Jacobi datant de 1842 (*Gesam. Werke*, Bd. IV, p. 315) [4].

Les faits cités se trouvent en stricte connexion avec les problèmes qui se posent actuellement dans la théorie des équations aux dérivées partielles, en élucidant les différents points de vue qui doivent être mis d'accord entre eux.

L'exposé succinct qui va être esquissé dans ces quelques pages qui vont suivre, fut l'objet d'une étude détaillée dans plusieurs séries des conférences *Sur les méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles* et *Sur les théories mathématiques du problème des trois corps*. Elles ont été professées, durant ces dernières années, dans les Universités belges sous les auspices de la *Fondation Universitaire de Belgique*.

II. — Éléments intégrables.

La théorie des éléments intégrables [5] réalise le progrès récent du problème de l'intégration des équations étudiées. Cette nouvelle notion généralise la méthode classique d'intégration de Jacobi et celle des éléments intégraux dont on vient de parler.

Considérons, pour fixer les idées, la fonction inconnue z des n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, en désignant par $p_1, p_2, \dots, p_n$ les dérivées partielles du premier ordre de la fonction z prises respectivement par rapport aux variables indépendantes, de sorte que l'on ait

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

---

(4) S. Lie, *Gesam. Abhandl.* Anmerkungen zum IV Bd. Leipzig Teubner 1929, p. 476-482. *Voir* la lettre de S. Lie adressée à A. Mayer.

(5) N. Saltykow, *Étude sur l'évolution des méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris, Gauthier-Villars, 1934, chap. II, p. 9.

Cela posé, écrivons l'équation aux dérivées partielles sous la forme suivante

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

où la fonction inconnue z, elle-même, ne figure point explicitement. Introduisons l'hypothèse

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0.$$

Supposons que l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre des caractéristiques de l'équation (1),

$$(3) \qquad (F, f) = 0$$

admette un nombre quelconque $n + \rho - 1$ des solutions distinctes

$$(4) \qquad f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_{n+\rho-1},$$

où l'on a les conditions limitatives suivantes :

$$n - 1 < n + \rho - 1 < 2n - 2,$$

le déterminant fonctionnel

$$(5) \qquad D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+\rho-1}}{p_2, p_3, \ldots, p_n, x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \ldots, x_n}\right) \gtrless 0$$

étant distinct de zéro.

L'ensemble de l'équation donnée (1) *et des intégrales* (4) *définissent un élément intégrable de l'équation* (1), *si cette dernière équation ainsi que les suivantes*

$$(6) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + \rho - 1)$$

rendent la relation

$$(7) \qquad dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s$$

une différentielle exacte.

L'importance de la notion introduite est considérable. En effet, si l'on connaît un élément intégrable de l'équation donnée (1), l'intégration de cette dernière s'achève par une quadrature, suivie des éliminations algébriques.

D'autre part, l'élément intégrable permet de former, grâce à une quadrature et des différentiations, le système complet des intégrales distinctes des caractéristiques de l'équation.

La théorie des éléments intégrables représente une *méthode universelle* d'intégration, car elle embrasse de même les autres méthodes classiques d'intégration comme des cas particuliers limites. En effet, si $\rho = n - 1$, la relation (7) devient évidemment une différentielle exacte, et l'on obtient en l'intégrant l'intégrale générale des caractéristiques de l'équation (1). Si d'autre part on se trouve dans le cas limite, où $\rho = 0$ et la relation (7) est une différentielle exacte, il s'ensuit que les intégrales connues engendrent un élément intégral.

Précisons, pour fixer les idées, que l'on doit considérer deux intégrales de l'élément intégrable : *particulière* et *générale*. Cette distinction correspond respectivement à l'hypothèse, selon laquelle l'équation donnée (1) figure, elle-même, dans l'élément considéré, ou bien l'équation qui s'obtient en égalant le premier membre de l'équation (1) à une constante arbitraire.

Cela posé, la théorie étudiée est constituée par les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Considérons l'élément particulier* (1) *et* (6) *que l'on met, grâce à l'inégalité* (5), *sous la forme*

$$(8) \qquad \begin{cases} x_{n-\rho+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho), \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} p_s \quad = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Soit l'intégrale de la différentielle exacte que devient la relation (7), *en vertu des formules* (8) *et* (9),

$$(10) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) + C,$$

C *étant une nouvelle constante arbitraire.*

Il existe toujours, parmi les $n+\rho-1$ *constantes* C_1, $C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}$, ρ *constantes telles qu'en les désignant par* C_n, $C_{n+1}, \ldots, C_{n+\rho-1}$, *lorsqu'on les élimine entre les équations* (8) *et* (10), *l'intégrale complète de l'équation* (1) *s'obtient sous la forme*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) + C,$$

où les n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C$ *figurent explicitement.*

Le théorème énoncé représente la généralisation évidente de la théorie des caractéristiques, et le choix des constantes à éliminer des formules (8) et (10) se fait au moyen des règles bien déterminées qui sont formulées en cinq théorèmes [6].

THÉORÈME II. — *Supposons que l'équation*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a, \tag{11}$$

a étant une constante arbitraire, engendre avec les équations (6) *un élément intégrable général qui s'écrit, en vertu de* (5), *de la manière suivante :*

$$\left\{\begin{aligned} x_{n-\rho+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho), \\ p_s &= \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Soit l'intégrale de la différentielle exacte que devient la relation (7), *grâce aux formules* (12),

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, a, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-1}) + C, \tag{13}$$

C *désignant la nouvelle constante arbitraire.*

Cela étant, introduisons la fonction que nous dirons principale de l'élément considéré

$$S \equiv \varphi - \sum_{i=1}^{\rho} p_{n-\rho+i}\varphi_i,$$

et écrivons les formules suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial C_i} = C'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + \rho - 1), \tag{14}$$

C'_i *étant des nouvelles constantes arbitraires.*

Les formules (14) *impliquent toujours* $n - \rho - 1$ *relations*

---

[6] N. SALTYKOW, *Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles d'une fonction inconnue*. Paris, Gauthier-Villars, 1935, p. 15.

distinctes qui forment avec les équations (6) (11) *et* (13) *le système complet des* $2n - 1$ *intégrales distinctes des caractéristiques de l'équation* (1) (7).

Il va sans dire que, dans le cas particulier, où $\rho = 0$, la *fonction* S devient la *fonction principale de Jacobi.*

Remarquons que pour l'application des théorèmes qui viennent d'être formulés à l'intégration d'une équation (1), on n'a qu'à en chercher les intégrales quelconques des caractéristiques, sans se soucier des conditions jacobiennes d'involution. En nous émancipant de cette dernière restriction, il est vrai qu'en revanche, nous sommes obligé de pousser au delà de n le nombre des intégrales que l'on cherche. En appliquant toujours le théorème de Poisson à chaque paire de deux intégrales quelconques trouvées, on parviendra aisément à en former un groupe fonctionnel. Or, si pendant ces dernières opérations on obtiendrait, inopinément, un élément intégral de l'équation donnée (1), il est aisé d'achever immédiatement l'intégration de cette équation, par une quadrature.

C'est l'avantage de la théorie des éléments intégrables. D'autant plus que, si la résolution des équations de l'élément intégral, par rapport aux variables canoniques, offrirait des difficultés algébriques insurmontables, on pourrait continuer la formation de l'élément intégrable. On pourrait réussir de cette manière à atténuer parfois les difficultés du calcul algébrique, en augmentant le nombre d'équations, entre le même nombre d'anciennes variables.

Néanmoins il se pose la nouvelle question de borner par une limite définie le nombre des intégrales nécessaires pour achever l'intégration de l'équation (1). On profiterait de cette manière des avantages que présente un élément intégrable en comparaison avec la théorie des caractéristiques, dont l'application exigerait le calcul du système complet de ses intégrales.

Le problème posé est résoluble par un algorithme algébrique élémentaire.

Introduisons dans ce but la *notion du groupe fonctionnel*

(7) N. Saltykow, *Étude sur l'évolution des méthodes modernes d'intégration*, p. 13-14.

intégrable. Cette nouvelle notion doit impliquer que le groupe considéré engendre le nombre suffisant d'intégrales pour en former un élément intégrable.

Supposons que l'on ait trouvé un groupe fonctionnel quelconque de ν intégrales distinctes

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_\nu, \tag{15}$$

de l'équation linéaire des caractéristiques (3).

Considérons le déterminant gauche symétrique

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

où est introduite la désignation suivante des parenthèses de Poisson

$$\alpha_{ik} \equiv (f_i, f_k).$$

Le déterminant (16) est nul, si son ordre ν est impair.

Or, si ν étant pair, le déterminant (16), était nul, il suivrait que tous ses mineurs du premier ordre s'annulent identiquement.

Appelons le déterminant (16) *déterminant du groupe* (15) et son mineur d'ordre inférieur, le premier qui ne s'annulerait point, sera dit *déterminant caractéristique* du groupe (15). Désignons l'ordre de ce dernier mineur par μ.

Cela étant, il est aisé de supposer, sans diminuer la généralité des considérations, que le déterminant *caractéristique* d'un groupe fonctionnel quelconque soit toujours gauche *symétrique*.

Ainsi le *déterminant caractéristique* du groupe fonctionnel considéré (15) peut être représenté de la manière suivante :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,\nu-\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,\nu-\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{\nu-\mu,1} & \alpha_{\nu-\mu,2} & \ldots & \alpha_{\nu-\mu,\nu-\mu} \end{vmatrix} \gtrless 0. \tag{17}$$

Cette assertion est évidente, car il nous appartient d'affecter les intégrales considérées des indices qu'il nous plairait.

La question posée peut s'élucider grâce au théorème suivant ([8]) :

THÉORÈME III. — *Le groupe fonctionnel* (15) *est intégrable si l'ordre de son déterminant caractéristique* (17) *surpasse de deux unités le double excès de l'ordre du groupe* ν *sur celui des dérivées* n.

Cela étant, remarquons que la démonstration du théorème énoncé III est étroitement liée avec la notion des *fonctions distinguées* du groupe fonctionnel (15). On y entend les fonctions de la forme

$$\Phi_s(f_1, f_2, \ldots, f_\nu) \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu),$$

qui représentent les intégrales en involution de l'équation (3). Puisque le déterminant (17) est gauche symétrique, son ordre ne peut être que pair, soit 2ρ. Par conséquent, il s'ensuit, du théorème formulé, que la relation

$$\nu = n + \rho - 1 \tag{18}$$

doit être vérifiée pour que le groupe fonctionnel (15) soit intégrable.

Citons quelques exemples.

Considérons le problème d'un corps dans l'espace des trois dimensions. Il admet trois intégrales des aires f_1, f_2, f_3 engendrant le groupe fonctionnel. En effet, ces dernières intégrales vérifient les conditions

$$(f_1, f_2) = f_3, \qquad (f_1, f_3) = -f_2, \qquad (f_2, f_3) = f_1.$$

Le déterminant de ce groupe

$$\begin{vmatrix} 0 & f_3 & -f_2 \\ -f_3 & 0 & f_1 \\ f_2 & -f_1 & 0 \end{vmatrix}$$

s'annule identiquement, mais le déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} 0 & f_3 \\ -f_3 & 0 \end{vmatrix}$$

([8]) N. SALTYKOW, *Étude sur l'évolution des Méthodes modernes d'intégration*, Chap. III, n° 9, p. 17.

est du second ordre. On aura donc, dans le cas considéré,

$$\rho = 1, \qquad n = 3, \qquad \nu = 3.$$

Ces derniers nombres vérifient bien la relation (18). Il s'ensuit que le groupe des intégrales des aires est intégrable, et le problème d'un corps devient résoluble par une quadrature (9).

Quant au problème des trois corps, les équations jacobiennes canoniques du mouvement relatif possèdent le groupe des trois intégrales semblables au précédent. On a de même dans ce dernier cas $\rho = 1$, mais $n = 6$.

Par conséquent, la relation (18) démontre que, pour achever l'intégration des équations, il faudrait avoir encore trois nouvelles intégrales engendrant un groupe fonctionnel avec les trois intégrales connues.

La théorie considérée s'étend immédiatement sur les systèmes d'équations compatibles aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue (10).

III. — Invariants différentiels.

Les efforts des géomètres pour achever l'intégration furent dirigés dans le cas, où les intégrales nécessaires manquaient, à diminuer le nombre des variables dans les équations, en profitant pour cela des intégrales connues.

Considérons, pour fixer les idées, l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(1)} \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

Supposons que l'équation linéaire des caractéristiques correspondante

$$\text{(2)} \qquad (F, f) = 0$$

admette un groupe fonctionnel de ν intégrales distinctes

$$\text{(3)} \qquad f_1, \; f_2, \; \ldots, \; f_\nu.$$

(9) N. Saltykow, *Méthodes modernes d'intégration*, p. 25-26.
(10) N. Saltykow, *Méthodes modernes d'intégration*, Chap. IV, p. 40.

Composons les équations linéaires

$$(4) \qquad (f_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

formant un système complet.

Les $2n - \nu$ intégrales distinctes de ce dernier système

$$(5) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{2n-\nu},$$

formant un groupe fonctionnel, sont appelées *invariants différentiels* du groupe (3). S. Lie appelle le groupe (5) *polaire* par rapport à celui de (3).

L'importance des invariants (5) se manifeste, en premier lieu, par le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si les invariants* (5) *sont distincts de la fonction caractéristique* F *de l'équation donnée* (1), *alors* F *représente une fonction des seuls invariants* (5).

Ce théorème est une conséquence immédiate des propriétés des intégrales d'un système linéaire. En effet, les invariants (5) représentent un système complet d'intégrales distinctes du système linéaire (4). Par conséquent toute autre intégrale de ce dernier système est une fonction des intégrales (5).

Or, les fonctions (3) représentant les intégrales de l'équation (2), on aura les identités suivantes :

$$(6) \qquad (F, f_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ces dernières identités démontrent que la fonction caractéristique F est de même une intégrale du système (4). Donc, il s'ensuit, d'après les propriétés citées des intégrales d'un système linéaire, la relation requise

$$(7) \qquad F \equiv \Psi(v_1, v_2, \ldots, v_{2n-\nu}).$$

Il est intéressant de constater que le nombre des invariants (5) dépend de l'ordre ν du groupe (3). En tant que l'ordre du groupe (3) est supérieur, l'ordre du groupe polaire (5) diminue, et la fonction caractéristique F s'exprime en un nombre moindre des paramètres.

Théorème V. — *Introduisons les* $2n - \nu$ *invariants* (5) *comme nouvelles variables, au lieu des* $2n$ *anciennes*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n.$$

L'équation linéaire (2), *étant transformée, devient*

$$\sum_{s=1}^{2n-\nu} A_s \frac{\partial\varphi}{\partial v_s} = 0, \tag{8}$$

φ *représentant la nouvelle désignation de la fonction inconnue, où l'on a*

$$A_s \equiv \sum_{\sigma=1}^{2n-\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial v_\sigma}(v_\sigma,\ v_s), \tag{9}$$

Ψ *désignant l'expression* (7) *de la fonction caractéristique* F.

L'équation (8) s'obtient, grâce à la méthode d'intégration ingénieuse de Korkine-Lindelöf [11]. En effet, l'ensemble des équations (2) et (4) forme un système d'équations linéaires fermé. Or, il s'ensuit de la théorie générale citée que les anciennes variables ne figurent point dans les équations transformées.

La forme remarquable (7) de la fonction caractéristique transformée et de l'équation transformée (8) sont longtemps restées inaperçues.

J. Bertrand, l'initiateur de la théorie considérée, s'était borné de chercher la forme des intégrales des problèmes de la mécanique, admettant les intégrales des aires. Les propriétés exposées, concernant la transformation de l'équation (2), s'étendent aisément sur une équation linéaire quelconque de la forme générale, ainsi que sur les systèmes d'équations linéaires. Quant à S. Lie, il gardait les anciennes variables dans les équations transformées, en attribuant à ces variables une signification spéciale [12]. Les résultats analogues à ceux de S. Lie se trouvent de même dans la

---

[11] N. Saltykow, *Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris, Gauthier-Villars, 1931, Chap. II, n° 7.

[12] S. Lie, *Math. An.,* Bd. XXV, § 10, n° 28.

thèse de M. E. Englund ([13]), où ils sont reproduits. Enfin, H. Poincaré étudie les propriétés spéciales du système canonique du problème des trois corps, en variables de Delaunay, pour réduire leur nombre, grâce aux intégrales des aires ([14]).

Le nombre des variables dans l'équation (8) peut être encore diminué, s'il se trouve parmi les invariants (5) des tels invariants qui sont en involution avec tous les autres. En effet, alors, les coefficients correspondants (9) s'évanouissent identiquement.

Cela étant, le problème d'intégration de l'équation (1) revient à intégrer l'équation transformée (8). On devrait en trouver autant des intégrales qu'elles engendrent avec les (3) un élément *intégral*, ou un élément *intégrable*, ou bien, dans ce cas le moins favorable, l'*intégrale générale des caractéristiques*.

Citons, par exemple, l'équation formée par l'un de mes élèves, M. S. Nikitovitch :

$$\text{(10)} \qquad F \equiv (p_1 - x_2)(p_3 + x_4) + (p_2 + x_3)(p_4 + x_1) - a = 0$$

admettant le groupe fonctionnel de quatre intégrales

$$\text{(11)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} f_1 \equiv x_1 - p_2 = C_1, & f_2 \equiv x_2 + p_3 = C_2, \\ f_3 \equiv x_3 + p_4 = C_3, & f_4 \equiv x_4 + p_1 = C_4, \end{array} \right.$$

C_1, C_2, C_3 et C_4 désignant les constantes arbitraires.

Le groupe polaire étant

$$\begin{array}{ll} v_1 \equiv p_1 - x_2, & v_2 \equiv p_2 + x_3, \\ v_3 \equiv p_3 + x_4, & v_4 \equiv p_4 + x_1\,; \end{array}$$

l'équation (10) transformée devient

$$F \equiv \Psi \equiv v_1 v_3 + v_2 v_4 - a = 0.$$

L'équation linéaire (8) correspondante admet l'intégrale

$$f_5 \equiv v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 - v_4^2 = C_5.$$

([13]) E. Englund, *Sur les méthodes d'intégration de S. Lie et les problèmes de la Mécanique céleste*. Uppsala, 1916, Chap. I.

([14]) H. Poincaré, *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1, Chap. I, n° 15; C. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, t, 1, § 10, p. 279.

Cette dernière s'écrit, en anciennes variables, de la manière suivante :

$$(12) \quad f_5 \equiv (p_1 - x_2)^2 + (p_2 + x_3)^2 - (p_3 + x_4)^2 - (p_4 + x_1)^2 = C_5,$$

C_5 désignant une constante arbitraire.

L'intégrale obtenue (12) se trouve en involution avec les intégrales (11).

Il s'ensuit, donc, dans le cas considéré

$$\nu = 5, \qquad n = 4, \qquad \rho = 2,$$

et la condition (18) du paragraphe II, est identiquement vérifiée. Par conséquent, l'intégration de l'équation (10) s'achève par une quadrature.

Remarquons, d'autre part, que l'équation (10) admet *l'élément intégral* formé par l'équation considérée (10) et les trois suivantes

$$f_2 = C_2, \qquad f_4 = C_4, \qquad f_5 = C_5.$$

En résolvant ces quatre dernières équations par rapport aux dérivées partielles p_1, p_2, p_3 et p_4, on obtient, par une quadrature, l'intégrale complète de l'équation (10) sous la forme suivante :

$$z = C_4 x_1 + C_2 x_3 - x_1 x_4 - x_2 x_3 \mp \int R_1 \, d(x_2 - i x_4) \pm \int R_2 \, d(x_2 + i x_4) + C,$$

où l'on a posé

$$R_1 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{A_1 + B_1 (x_2 - i x_4) - 2i (x_2 - i x_4)^2},$$

$$R_2 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{A_2 + B_2 (x_2 + i x_4) + 2i (x_2 + i x_4)^2},$$

$$A_1 \equiv C_2^2 - C_4^2 + C_5 + 2i(a - C_2 C_4), \qquad B_1 \equiv 2[C_4 - C_2 + i(C_2 + C_4)],$$

$$A_2 \equiv C_2^2 - C_4^2 + C_5 - 2i(a - C_2 C_4), \qquad B_2 \equiv 2[C_4 - C_2 - i(C_2 + C_4)],$$

C_2, C_4, C_5 et C désignant quatre constantes arbitraires.

Enfin, on pourrait, d'une troisième manière, envisager le système des deux équations en involution (10) et (12), dont le système complet des intégrales distinctes des caractéristiques est donné par les six équations (10), (11) et (12). On en tirerait l'intégrale complète requise par une quadrature, suivie des éliminations algébriques.

IV. — Invariants canoniques.

L'équation transformée (8) que l'on avait obtenue au précédent paragraphe, présente un grave inconvénient. En effet, elle a perdu la forme jacobienne d'une équation linéaire à une fonction caractéristique. Par conséquent, le système canonique d'équations différentielles ordinaires correspondant à l'équation aux dérivées partielles

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \tag{1}$$

serait remplacé, grâce à la méthode exposée plus haut, par un système qui n'est plus canonique.

Or, E. Bour avait démontré ([15]) que l'on pouvait remplacer les invariants du problème des trois corps de J. Bertrand par d'autres, que nous dirons *canoniques*, de telle manière que la forme canonique des équations ne soit pas altérée. Le calcul de E. Bour est assez compliqué. S. Lie, d'après le témoignage de M. F. Engel, sans connaître l'œuvre de Bour, avait adopté sa méthode pour réduire chaque groupe fonctionnel à la forme canonique.

Il s'agit dans les lignes qui vont suivre de modifier le procédé de E. Bour, en généralisant celui qui nous avait servi pour résoudre le problème général de M. D. Michnevitch ([16]).

Il y a deux cas à distinguer.

Supposons d'abord que les intégrales connues de l'équation linéaire

$$(F, f) = 0, \tag{2}$$

que l'on désignera par

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_\nu \qquad (\nu < n-1), \tag{3}$$

([15]) E. Bour, *Mémoire sur le problème des trois corps*. Thèse, Paris, 1855.

([16]) N. Saltykow, *Structure d'un système normal d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, aux intégrales données des caractéristiques* (*Bulletin de l'Académie des Sciences Mathématiques et Naturelles*, *Acad. Sc. Math. et Phys.*, n° 3, Belgrade, 1936).

soient en involution, vérifiant de plus la condition

$$(4) \qquad D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_\nu}{p_1, p_2, \ldots, p_\nu}\right) \gtrless 0.$$

Il va sans dire que, dans le cas où les intégrales connues (3) en involution seraient au nombre de $n-1$, l'intégration de l'équation considérée (1) serait achevée par une quadrature.

L'étude de l'hypothèse, où les intégrales (3) soient en involution, n'est pas dénuée d'intérêt. Au contraire, ce cas intervient, lorsqu'on se heurte aux difficultés pour prolonger la méthode classique d'intégration de Jacobi. Ayant obtenu, dans ces circonstances, une ou plusieurs intégrales des caractéristiques en involution (5), il est alors aisé de recourir aux considérations suivantes.

La généralisation d'un autre théorème classique de Jacobi ([17]) démontre que le système linéaire de l'équation en involution

$$(5) \qquad (f_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

admet le système complet des intégrales

$$(6) \quad f_1, \; f_2, \; \ldots, f_\nu; \qquad \varphi_1, \; \varphi_2, \; \ldots, \; \varphi_{n-\nu}; \qquad \psi_1, \; \psi_2, \; \ldots, \; \psi_{n-\nu},$$

qui est précisément *canonique*.

Cela veut dire que, sauf les intégrales φ_i et ψ_i, du même indice, toutes les autres sont en involution entre elles; quant aux intégrales φ_i et ψ_i, elles sont conjuguées, c'est-à-dire qu'elles vérifient les conditions

$$(\varphi_i, \psi_i) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-\nu).$$

Il suffit, pour avoir le système des intégrales canoniques des équations (5), de composer l'intégrale complète du système normal d'équations aux dérivées partielles

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

a_k désignant des constantes arbitraires, à savoir

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, C_1, C_2, \ldots, C_{n-\nu}) + C,$$

([17]) N. Saltykow, ***Méthodes classiques d'intégration***, n° 18.

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-\nu}, C$ étant $n-\nu+1$ constantes arbitraires distinctes.

Alors les formules

$$p_{r+s} = \frac{\partial V}{\partial x_{r+s}}, \qquad \frac{\partial V}{\partial C_s} = C'_s$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n-\nu)$$

définissent respectivement les valeurs (6) de toutes les intégrales φ_i et ψ_i.

Le système complet des intégrales (6) définit les invariants que nous dirons *canoniques*.

La fonction caractéristique F de l'équation (1) devient alors

$$F \equiv \Psi(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\nu}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\nu}).$$

Quant à l'équation (2) transformée, on l'écrira de la manière suivante :

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n-\nu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} \right) = 0,$$

les valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ y figurent à titre de quantités constantes.

L'équation primitive (1) sera de cette manière transformée en la suivante :

$$(9) \qquad \Psi(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\nu}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\nu}) = 0,$$

les nouvelles variables $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\nu}$, y sont considérées comme indépendantes, tandis que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\nu}$ figurent à titre de dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue prises respectivement par rapport aux variables indépendantes de même indice.

Insistons sur quelques détails concernant les considérations exposées. Il va de soi-même que chaque fois, où l'on aurait ν intégrales des caractéristiques en involution, on pourrait éliminer de l'équation (1) le même nombre des variables canoniques de la seconde classe. S'il arrivait que les variables, conjuguées de celles que l'on vient d'éliminer, ne figurent pas non plus dans l'équation transformée (1), elle ne contiendrait que $2n - 2\nu$ variables canoniques et suppléerait l'équation primitive (1).

Or, la théorie développée des invariants canoniques, pour former l'équation réduite, offre une méthode générale qu'il est aisé de formuler de la manière suivante :

Théorème VI. — *Supposons que l'équation* (1) *admette les intégrales* (7) *des caractéristiques en involution. Si leur intégrale complète est connue, on obtient, par différentiation le système canonique des invariants* (6). *L'équation* (1) *se transforme alors en* (9), *et l'équation* (2) *est remplacée par la* $(8)^{ième}$, *les quantités* $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ *y figurant à titre de constantes; tous les* ψ_i *désignent les variables canoniques de la première classe et les* φ_i *celles de la seconde.*

Passons à présent à l'étude des ν intégrales (3) non en involution formant un groupe fonctionnel quelconque, leur nombre ν étant limité par la condition

$$\nu < 2n - 1.$$

Supposons que le groupe (3) engendre μ fonctions distinguées

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\mu, \tag{10}$$

où les nombres ν et μ sont liées par la relation inconnue ([18])

$$\nu = \mu + 2\rho.$$

Il est aisé de supposer, sans diminuer la généralité des considérations, que l'on ait

$$D\left(\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu}{f_1, f_2, \ldots, f_\mu}\right) \gtrless 0.$$

Par conséquent, le groupe (3) peut être remplacé par le suivant

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\mu, \quad f_{\mu+1}, \quad f_{\mu+2}, \quad \ldots, \quad f_\nu,$$

Considérons d'abord le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ll} (f_i, f) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ (f_{\mu+s}, f) = 0 & (s = 1, 2, \ldots, 2\rho). \end{array}\right. \tag{11}$$

Désignons par φ_1 une solution quelconque de ce dernier système distincte des intégrales (10). Reprenons les intégrations succes-

([18]) N. Saltykow, *Méthodes modernes d'intégration*, p. 29.

sives de notre travail cité antérieurement [16]. Cherchons dans ce but une solution du système d'équations formé par le système (11) et l'équation complémentaire

$$(12) \qquad (\varphi_1, f) = 0.$$

En procédant de la même manière on aboutira au système de $n+\rho$ équations linéaires, formé des équations (11), (12) et des suivantes :

$$(\varphi_2, f) = 0, \qquad (\varphi_3, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (\varphi_{n-\rho}, f) = 0,$$

dont on aura le système complet des solutions distinctes en involution entre elles :

$$(13) \qquad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\mu, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-\rho-\mu},$$

représentant le nombre maximum de $n-\rho$ fonctions distinctes qui se trouvent *en involution entre elles.*

Il est évident d'abord que les $n-\rho-\mu$ dernières fonctions (13) sont en involution entre elles, d'après la méthode même de leur calcul.

Quant aux μ premières fonctions (13), ou (10), elles sont définies comme des fonctions de toutes les intégrales (3). Il s'ensuit, donc

$$(\Phi_i, \varphi_k) \equiv \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_s}(f_s, \varphi_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu; \; k = 1, 2, \ldots, n-\rho-\mu).$$

Or, en vertu des équations (11) que vérifient toutes les fonctions φ_k, on a les identités

$$(\Phi_i, \varphi_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu; \; k = 1, 2, \ldots, n-\rho-\mu),$$

confirmant l'assertion qui vient d'être émise.

Par conséquent, les fonctions (13) représentent les intégrales distinctes en involution du système (11).

Écrivons de la manière abrégée, le système (11)

$$(f_s, f) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu; \; \nu \equiv \mu + 2\rho).$$

Cela étant, calculons les autres $n-\rho-\mu$ intégrales de ce dernier système engendrant son système canonique d'intégrales.

Composons dans ce but, d'abord, le système fermé des équations suivantes :

$$(f_s, f) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu),$$
$$(\varphi_\sigma, f) = \begin{cases} 1, & \sigma = 1 \\ 0, & \sigma \gtrless 1 \end{cases} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n - \rho - \mu).$$

Cherchons une solution particulière quelconque de ce dernier système que l'on désignera par ψ_1.

Pour avoir la seconde fonction ψ_2, cherchons une solution du système des $n + \rho + 1$ équations

$$(f_s, f) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu),$$
$$(\varphi_\sigma, f) = \begin{cases} 1, & \sigma = 2 \\ 0, & \sigma \gtrless 2 \end{cases} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n - \rho - \mu),$$
$$(\psi_1, f) = 0.$$

En procédant d'une manière analogue, on finira par obtenir les fonctions cherchées

$$(14) \qquad \psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_{n-\rho-\mu},$$

qui sont en *involution* entre elles et avec les fonctions (13) d'indices distinctes; quant aux fonctions de mêmes indices, elles sont *conjuguées*.

L'ensemble des fonctions (13) et (14) représente le système canonique des intégrales des équations (11). Les deux cas que l'on vient d'étudier permettent de compléter le résultat de 1933 ([19]), généralisant le théorème de Bour, mais qui est énoncé sous une forme conventionnelle.

Il nous est possible à présent d'établir le nouveau résultat obtenu sous une forme bien déterminée de la manière suivante :

Théorème VII. — *Supposons que l'équation* (1) *admette le groupe fonctionnel des intégrales* (3) *des caractéristiques engendrant* μ *fonctions distinguées* (10). *Il existe toujours le groupe polaire correspondant qui admet la forme canonique*

([19]) N. Saltykow, *Groupes fonctionnels semi-gauches, incomplets* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 197, 1933, p. 1023); *Étude sur l'évolution des méthodes modernes d'intégration*, Chap. IV, p, 22.

(13), (14); *les équations* (1) *et* (2) *se transforment respectivement en*

$$\Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\rho-\mu}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\rho-\mu}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-\rho-\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} \right) = 0,$$

les quantités Φ_1, Φ_2 ..., Φ_μ *y figurant à titre des constantes*, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\rho-\mu}$ *étant les nouvelles variables indépendantes et* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\rho-\mu}$ *les nouvelles dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, prises respectivement par rapport aux nouvelles variables indépendantes.*

Les théorèmes obtenus sont sujets à beaucoup d'applications. Citons dans ce but quelques exemples de la Mécanique céleste.

V. — Problème des trois corps.

Considérons le système canonique du problème des trois corps, dans le mouvement relatif, en coordonnées de Delaunay :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}, & \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial h}, \\ \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l'}, & \dfrac{\partial G'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g'}, & \dfrac{\partial H'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial h'}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H}, \\ \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L'}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G'}, & \dfrac{dh'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H'}, \end{array} \right.$$

les variables canoniques considérées étant réparties respectivement en deux classes suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} L, & G, & H, & L', & G', & H', \\ l, & g, & h, & l', & g', & h'; \end{array} \right.$$

les variables de la première ligne (2) appartiennent à la première classe et celles de la seconde ligne, à la seconde classe.

Les intégrales des aires se présentent sous la forme suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1 \equiv H + H' = C, \\ f_2 \equiv G^2 - G'^2 + H'^2 - H^2 = 0, \\ f_3 \equiv h - h' = 180^\circ. \end{cases}$$

Ces dernières vérifient les conditions

$$(f_1, f_2) = 0, \qquad (f_1, f_3) = 0, \qquad (f_2, f_3) = 2f_1.$$

Il s'ensuit que les trois fonctions f_1, f_2, f_3 forment le groupe fonctionnel à une fonction distinguée qui est représentée par la première intégrale.

Or, profitons, d'abord, pour réduire le nombre des douze équations (1) de l'ensemble des deux intégrales (3) en involution les plus simples qui sont la première et la troisième.

On se trouve ici dans le cas bien remarquable par sa simplicité. En effet, les deux intégrales en question n'impliquent que deux paires de variables canoniques conjuguées H et h, H′ et h'. Aucune des autres variables ne figure guère dans les intégrales considérées. Par conséquent, les variables

$$\begin{matrix} L, & G, & L', & G', \\ l, & g, & l', & g', \end{matrix}$$

représentent, dans le cas étudié, le système canonique des invariants, dont dépend la fonction caractéristique Ψ transformée ; de plus, la théorie exposée des invariants démontre que la fonction Ψ ne saurait dépendre des autres quatre variables H et H′, h et h' que par l'intermédiaire des fonctions f_1 et f_3.

Par conséquent, le système réduit implique huit équations canoniques qui s'obtiennent du système (1), en y effaçant les quatre équations de la troisième colonne et en substituant dans la fonction caractéristique transformée les valeurs C et 180° respectivement à la place de f_1 et de f_3.

Pour éviter toute objection qui pourrait surgir, remarquons qu'il faudrait dans le cas considéré profiter du principe de J. Liouville. Comme les variables canoniques H et H′ appartiennent à la première classe, on devrait rapporter l'une à la seconde classe, en faisant passer en première classe sa variable conjuguée, avec le signe changé. Cette remarque est d'un caractère purement théorique, car toutes les dernières variables disparaissent dans les équations réduites.

Il serait aisé de proposer encore une autre transformation des équations (1), en partant des deux premières intégrales (3) qui sont, de même, en involution. L'effet de la nouvelle réduction serait analogue à la précédente.

Or, on en conclut que la fonction caractéristique doit être de la forme

$$\Psi(f_1, f_2, \mathrm{L}, \mathrm{G}, \mathrm{L}', \mathrm{G}', l, g, l', g').$$

De plus on y doit remplacer f_1 et f_2 respectivement par leurs valeurs C et o.

C'est cette dernière transformation que H. Poincaré avait ingénieusement étudié sur les équations (1), par des considérations intuitives indépendantes de toute théorie générale.

Appliquons, à présent, la seconde transformation, étudiée au paragraphe précédent. La fonction f_1 va jouer, dans ce dernier cas, le rôle de la fonction distinguée Φ_1 du groupe fonctionnel des trois intégrales f_1, f_2, f_3.

Formons le système linéaire correspondant pour définir le groupe canonique des invariants

$$(4) \qquad -(f_1, f) \equiv \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial h'} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{1}{2}(f_2, f) \equiv \mathrm{G}'\frac{\partial f}{\partial g'} - \mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial g} - \mathrm{H}'\frac{\partial f}{\partial h'} + \mathrm{H}\frac{\partial f}{\partial h} = 0,$$

$$(6) \qquad (f_3, f) \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathrm{H}} - \frac{\partial f}{\partial \mathrm{H}'} = 0.$$

Résolvons les équations (4) et (5) par rapport à $\frac{\partial f}{\partial h}$ et à $\frac{\partial f}{\partial h'}$, pour transformer l'ensemble des équations (4) et (5) en un système jacobien, de la manière suivante :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial h} - \frac{1}{\mathrm{H}+\mathrm{H}'}\left(\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial g} - \mathrm{G}'\frac{\partial f}{\partial g'}\right) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial h'} + \frac{1}{\mathrm{H}+\mathrm{H}'}\left(\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial g} - \mathrm{G}'\frac{\partial f}{\partial g'}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Le système d'équations aux différentielles totales, correspondant au système jacobien (6)-(7), devient :

$$dH' + dH = 0,$$
$$dg + \frac{G}{H+H'}(dh - dh') = 0,$$
$$dg' - \frac{G'}{H+H'}(dh - dh') = 0.$$

Il s'ensuit, outre l'intégrale évidente $f_1 = C$, deux intégrales

$$(8) \qquad g + \frac{G(h-h')}{H+H'} = G, \qquad g' - \frac{G'(h-h')}{H+H'} = C_2,$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

Désignons les premiers membres des intégrales obtenues (8) respectivement par s et s' en posant

$$(9) \qquad \begin{cases} s \equiv g + \dfrac{G(h-h')}{H+H'}, \\ s' \equiv g' - \dfrac{G'(h-h')}{H+H'}. \end{cases}$$

Heureusement, ces deux dernières fonctions (9) se trouvent en involution par rapport à la répartition canonique des variables (2).

On les prendra donc, aisément, pour les deux invariantes que l'on avait antérieurement désignées par φ_1 et φ_2.

Il est aisé de prendre pour les deux invariants φ_3 et φ_4 respectivement les anciennes variables canoniques l et l'.

Quant aux variables canoniques de la première classe ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 c'est évident qu'elles auront respectivement les valeurs suivantes G, G', L et L'.

De cette manière le groupe canonique des invariants requis est défini par le tableau suivant :

$$\begin{matrix} f_1, & L, & G, & L', & G', \\ & l, & s, & l', & s'. \end{matrix}$$

Il s'ensuit que la fonction caractéristique du système (1) transformé devient

$$\Psi(f_1, L, G, L', G', l, s, l', s'),$$

où f_1 doit être remplacée respectivement par sa valeur constante C.