BULLETIN DE LA S. M. F.

ERWIN FELDHEIM

Un problème de la théorie élémentaire des nombres

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN PROBLÈME DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES;

PAR M. ERVIN FELDHEIM

(Budapest).

Nous nous proposons de déterminer tous les triangles rectangles, de côtés mesurés par les nombres entiers a, b et c, tels que a et b soient deux entiers consécutifs. Nous établirons d'abord le

THÉORÈME. — *Tout nombre dont le carré se compose des carrés de deux entiers consécutifs est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers dont deux, au moins, sont consécutifs.*

La démonstration de cette proposition nous fournira une méthode pour la détermination des nombres cherchés, et nous permettra d'établir des relations de récurrence, et même des expressions explicites générales, pour les entiers a, b et c.

Il est connu que les nombres a, b, c formant un triangle rectangle, c'est-à-dire vérifiant la relation

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

peuvent être représentés sous la forme suivante :

$$a = x^2 - y^2, \qquad b = 2xy, \qquad c = x^2 + y^2.$$

Pour démontrer notre théorème, nous devons distinguer deux cas

a. Supposons que $a + 1 = b$, c'est-à-dire

$$x^2 - y^2 + 1 = 2xy,$$

d'où

$$y = -x + \sqrt{2x^2+1}.$$

Le nombre $2x^2+1$ sera un carré parfait si l'on prend

$$x^2 = u^2 + (u+1)^2.$$

Alors

$$2x^2+1 = (2u+1)^2 \quad \text{et} \quad y = 2u+1-x.$$

Finalement

$$c = x^2+y^2 = u^2+(u+1)^2+(2u+1-x)^2,$$

avec

$$x^2 = u^2+(u+1)^2.$$

Cela démontre notre proposition : c est la somme de trois carrés, dont deux carrés de nombres consécutifs. Cherchons si tous les trois entiers peuvent être consécutifs.

On a

$$2u+1-x = u-1 \quad \text{si} \quad x = u+2,$$

donc

$$(u-3)(u+1) = 0.$$

On en tire

$$u = 3, \quad x = 5, \quad y = 2; \quad c = 2^2+3^2+4^2 = 29, \quad 29^2 = 20^2+21^2.$$

Si l'on fait ensuite

$$2u+1-x = u+2,$$

il vient

$$x = u-1,$$

donc

$$u(u+4) = 0.$$

On en tire

$$u = 0, \quad x = -1, \quad y = 2; \quad c = 0^2+1^2+2^2 = 5, \quad 5^2 = 3^2+4^2.$$

b. Considérons maintenant le cas $a-1 = b$, ou

$$x^2-y^2-1 = 2xy,$$

d'où

$$x = y+\sqrt{2y^2+1}.$$

Posons ici encore

$$y^2 = v^2+(v+1)^2,$$

alors

$$x = 2v+1+y.$$

Ainsi

$$c = v^2+(v+1)^2+(2v+1+y)^2,$$

avec

$$y^2 = v^2 + (v+1)^2.$$

Si l'on veut avoir

$$2v + 1 + y = v + 2,$$

on aura

$$y + v = 1, \quad \text{d'où} \quad y = 1, \quad v = 0.$$

Nous retrouvons le résultat $c = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$ du cas précédent.

Nous voyons que, dans le cas a, le composant x, dans le cas b, le composant y de c est de même nature que le nombre c : son carré est la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Nous obtenons donc les nombres c consécutifs en prenant successivement pour x et y les nombres c précédemment calculés.

Numérotons les nombres c dans l'ordre croissant par $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, de même que tous les nombres figurant dans les développements qui précèdent. Ainsi

$$(1) \quad c_n = x_n^2 + y_n^2, \quad a_n = x_n^2 - y_n^2, \quad b_n = 2x_n y_n \quad \text{et} \quad c_n^2 = a_n^2 + b_n^2.$$

Illustrons par quelques exemples ce que nous venons de dire :

$x_0 = 1,$	$y_0 = 0,$	$a_0 = 1,$	$b_0 = 0,$	$c_0 = 1$	$= 0^2 + 0^2 + 1^2,$
$x_1 = 2,$	$y_1 = 1,$	$a_1 = 3,$	$b_1 = 4,$	$c_1 = 5$	$= 0^2 + 1^2 + 2^2,$
$x_2 = 5,$	$y_2 = 2,$	$a_2 = 21,$	$b_2 = 20,$	$c_2 = 29$	$= 2^2 + 3^2 + 4^2,$
$x_3 = 12,$	$y_3 = 5,$	$a_3 = 119,$	$b_3 = 120,$	$c_3 = 169$	$= 3^2 + 4^2 + 12^2,$
$x_4 = 29,$	$y_4 = 12,$	$a_4 = 697,$	$b_4 = 696,$	$c_4 = 985$	$= 12^2 + 20^2 + 21^2,$
$x_5 = 70,$	$y_5 = 29,$	$a_5 = 4059,$	$b_5 = 4060,$	$c_5 = 5741$	$= 20^2 + 21^2 + 70^2.$

Ces exemples suffisent pour voir la loi de formation des groupes de nombres cherchés, et d'écrire que

$$(2) \qquad c_n = x_{2n} = y_{2n+1}, \qquad x_{2n-1} = y_{2n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et

$$(3) \qquad a_{2n} - b_{2n} = 1, \qquad a_{2n+1} - b_{2n+1} = -1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les relations (3), en tenant compte des formules respectives (1), s'écrivent sous la forme

$$x_{2n}^2 - x_{2n-1}^2 - 2x_{2n}x_{2n-1} = 1,$$

et

$$x_{2n+1}^2 - x_{2n}^2 - 2x_{2n}x_{2n+1} = -1.$$

En ajoutant ces dernières relations, nous obtenons

(4) $$2x_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n-1}.$$

On démontre une formule analogue pour l'indice impair

(5) $$2x_{2n-1} = x_{2n} - x_{2n-2}.$$

Nous avons donc, pour la détermination des x_n, la relation de récurrence suivante :

(6) $$2x_n = x_{n+1} - x_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or, en tenant compte de (2), la formule (5) donne

$$x_{2n} = c_n, \qquad x_{2n-1} = \frac{c_n - c_{n-1}}{2},$$

et si l'on substitue ces valeurs dans (4), il vient

(7) $$c_n = \frac{c_{n+1} + c_{n-1}}{6} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les nombres cherchés c_n se déterminent donc de proche en proche au moyen de (7), si l'on connaît les valeurs initiales

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad c_1 = 5.$$

Les relations (1) liant les nombres a_n, b_n et x_n permettent de calculer la valeur numérique des a_n et b_n, dès que l'on connaît x_n. On peut toutefois établir une relation de récurrence donnant les a_n.

Sachant que

$$c_n = x_n^2 + x_{n-1}^2, \qquad a_n = x_n^2 - x_{n-1}^2,$$

on aura

(8) $$c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + a_n = x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2,$$

ce qui, avec (7), conduit à la relation

(9) $$6(a_{n+1} - a_{n-1}) = a_{n+2} - a_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Les nombres b_n vérifient évidemment la même relation.

Observons que (5) et (8) donnent

$$x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2 = 2x_{2n+1},$$

et l'on démontre encore la relation intéressante

$$c_{n-1}c_{n+1} - c_n^2 = 4.$$

Le théorème énoncé et démontré au début se formule de la manière suivante :

$$c_{2n} = a_n^2 + b_n^2 + x_{2n-1}^2 \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = a_n^2 + b_n^2 + x_{2n+1}^2,$$

où les a_n et x_n sont donnés par (9) et (4), les b_n par (3).

On peut d'ailleurs exprimer les a_n au moyen des c_n. Nous trouvons que

$$a_n = \frac{3c_n - c_{n-1} + 2(-1)^n}{4},$$

et

$$b_n = a_n - (-1)^n = \frac{3c_n - c_{n-1} - 2(-1)^n}{4},$$

de sorte que, finalement,

$$(10)\quad \begin{cases} c_{2n} = \left(\dfrac{3c_n - c_{n-1} + 2(-1)^n}{4}\right)^2 \\ \qquad + \left(\dfrac{3c_n - c_{n-1} - 2(-1)^n}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{c_n - c_{n-1}}{2}\right)^2, \\ c_{2n+1} = \left(\dfrac{3c_n - c_{n-1} + 2(-1)^n}{4}\right)^2 \\ \qquad + \left(\dfrac{3c_n - c_{n-1} - 2(-1)^n}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{c_{n+1} - c_n}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Les nombres c_n possèdent encore la propriété suivante : les relations

$$(2a_{2n} - 1)^2 = 2c_{2n}^2 - 1 \quad \text{et} \quad (2a_{2n+1} + 1)^2 = 2c_{2n+1}^2 - 1$$

montrent que le nombre $2c_n^2 - 1$ est encore un carré parfait. On peut aussi écrire que

$$2c_n^2 - 1 = \left(\frac{3c_n - c_{n-1}}{2}\right)^2.$$

Passons enfin à la détermination numérique des nombres en question. La relation de récurrence (6) donnera, en posant $x_n = \rho^n$, l'équation

$$\rho^2 - 2\rho - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (\rho - 1)^2 = 2,$$

dont les racines sont

$$\rho_1 = 1 + \sqrt{2}, \qquad \rho_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Donc

$$x_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n.$$

Or

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 2,$$

d'où

$$A = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \qquad B = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Finalement

$$x_n = \frac{1}{4}\{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^n\}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La même méthode donne

$$c_n = \frac{1}{8}\{(3+2\sqrt{2})^{n+1} + (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{n+1} + (3-2\sqrt{2})^n\}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

et

$$a_n = \frac{1}{8}\{(3+2\sqrt{2})^{n+1} - (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{n+1} - (3-2\sqrt{2})^n + 4(-1)^n\}$$
$$(n = 0, 1, \ldots).$$

De la même façon

$$2c_n^2 - 1 = \left\{\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2}[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n] + \frac{\sqrt{2}}{2}[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n]\right\}^2$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

carré parfait, comme nous l'avons dit plus haut.

Remarquons finalement que tous les nombres c_n sont de la forme $6k \pm 1$.

Remarques. — *a*. Considérons le polynome

$$B_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2+4})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2+4}}.$$

Pour $x = 2$, nous obtenons les nombres x_n : $x_n = B_n(2)$ (nombres de Fermat). Ainsi $c_n = B_{2n}(2)$: les nombres c_n cherchés sont les nombres de Fermat de rang pair.

b. En considérant la valeur $c_3 = 169 = 13^2$, nous voyons que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2.$$

C'est une propriété générale, qui résulte de l'identité

$$x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 = [x(x+1)+1]^2.$$