BULLETIN DE LA S. M. F.

ERNEST VESSIOT

Sur une classe de faisceaux complets de degré 2

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 149-167
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__149_0>

SUR UNE CLASSE DE FAISCEAUX COMPLETS DE DEGRÉ 2;

PAR M. E. VESSIOT.

J'ai étudié autrefois (¹), sous le nom d'*équations* (aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes) *de Lie* et de *systèmes de Lie*, les équations aux dérivées partielles et les systèmes d'équations différentielles ordinaires associés de la forme respective (²)

$$0 = \mathrm{T}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \theta_\alpha(t)\mathrm{X}_\alpha f, \qquad \mathrm{X}_h f = \xi_{h\beta}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\beta}$$
$$(h, \alpha = 1, 2, \ldots, r;\ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

et

$$\frac{dx_i}{dt} = \theta_\alpha(t)\,\xi_{\alpha,i}(x_1, \ldots, x_n), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$ constitue un groupe de transformations infinitésimales.

Une généralisation naturelle est constituée par ce que j'appellerai des *faisceaux de Lie*, à savoir des faisceaux complets, d'un degré p quelconque, qui ont pour base p transformations infinitésimales de la forme

$$\mathrm{U}_h f = \frac{\partial f}{\partial u_h} + \varphi_{h,\alpha}(u_1, \ldots, u_p)\mathrm{X}_\alpha f \qquad (h = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

où $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$ est toujours un groupe à un nombre quelconque n de variables. L'intégration d'un tel faisceau équivaut à celle du

---

(¹) *Voir*, en particulier, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII, 1894, mém. H, et t. X, 1896, mém. C.

(²) J'emploierai couramment, comme on le fait dans le calcul tensoriel, la notation $a_\alpha b_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, pour désigner la somme $\sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha b_\alpha$. Pour plus de netteté les indices de sommation seront, à l'exclusion des autres, des lettres minuscules grecques.

système complet $U_1 f = \ldots = U_p f = 0$, ou du système de Pfaff, complètement intégrable,

$$dx_i = \omega_\alpha \xi_{\alpha,i}(x_1, \ldots, x_n), \qquad \omega_h = \varphi_{\beta h}(u_1, \ldots, u_p)\, du_\beta$$
$$(h, \alpha = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, p).$$

Un exemple en est donné par ce que Lie a appelé les équations fondamentales de la théorie des groupes continus finis ([1]).

Les pages qui suivent sont consacrées à un cas particulier que j'ai rencontré au cours de recherches sur la méthode de Darboux, relative à l'intégration des équations aux dérivées partielles de second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Il s'agit des faisceaux complets de degré 2, de la forme

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u, v) L_\alpha f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(u, v) M_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

où $L_1, \ldots, L_r$ et $M_1, \ldots, M_r$ sont deux groupes *simplement transitifs réciproques :*

$$(\mathcal{L}) \qquad L_i f = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(\mathcal{M}) \qquad M_i f = \mu_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (i, \alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Je montre comment on peut ramener à cette forme tout faisceau complet de degré 2,

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_\alpha(u, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \mu_\alpha(v, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

à variables u, v séparées ; et comment on peut se limiter au cas où les φ_i ne dépendent que de u, et où les ψ_i ne dépendent que de v.

Je donne ensuite, pour tout faisceau de Lie,

$$(\mathcal{F}) \quad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u) L_\alpha f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v) M_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

ainsi associé à un couple, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, de groupes simplement transitifs réciproques, une méthode d'intégration qui se rattache à la théorie de la *structure* des groupes continus finis.

---

[1] S. Lie et Fr. Engel, *Théorie des Transf. Gruppen*, t. I, chap. II, p. 27. Les équations en question sont les équations (5), p. 34.

Les deux groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ étant les deux *groupes paramétriques* d'une structure Σ, pour laquelle le produit de deux transformations, $T_{(c_1,\ldots,c_r)} = T_{(a_1,\ldots,a_r)} T_{(b_1,\ldots,b_r)}$ est défini par certaines *équations paramétriques*, ou *équations de structure*,

$$c_h = \Omega_h(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

l'intégrale générale du système de Pfaff, dualistique de $\mathcal{F}$, est

$$x_i = \Omega_i(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où les a_i et les b_i constituent les intégrales générales respectives des systèmes de Lie (à une seule variable indépendante)

$$\frac{da_i}{dv} = \psi_\alpha(v)\,\mu_{\alpha,i}(a_1, \ldots, a_r), \qquad \frac{db_i}{du} = \varphi_\alpha(u)\,\lambda_{\alpha,i}(b_1, \ldots, b_r)$$
$$(i, \alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

On a, d'autre part, un système fondamental d'invariants de $\mathcal{F}$, (solutions de $Uf = Vf = 0$), dans les fonctions

$$\begin{gathered}\Omega_i[a'_1, \ldots, a'_r; \Omega_1(x, b'), \ldots, \Omega_r(x, b')] \\ = \Omega_i[\Omega_1(a', x), \ldots, \Omega_r(a', x); b'_1, \ldots, b'_r] \\ (i = 1, 2, \ldots, r),\end{gathered}$$

où les a'_i et les b'_i constituent, respectivement, une solution particulière quelconque des deux systèmes de Lie (à une seule variable indépendante)

$$\frac{da'_i}{dv} + \psi_\alpha(v)\,\lambda_{\alpha,i}(a'_1, \ldots, a'_r) = 0, \qquad \frac{db'_i}{du} + \varphi_\alpha(u)\,\mu_{\alpha,i}(b'_1, \ldots, b'_r) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Le cas où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ ont un certain nombre ν de transformations infinitésimales (indépendantes) communes, se ramène à l'intégration d'un faisceau de Lie, pour lequel les groupes associés sont de degré $r - \nu$, et à ν quadratures de différentielles totales en u et v.

1. Considérons un faisceau complet $\mathcal{F}$ de la forme

$$(1)\quad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_\alpha(x_1, \ldots, x_n; u)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \mu_\alpha(x_1, \ldots, x_n; v)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où les variables u et v sont, par conséquent, séparées. Posons

$$(2)\quad Lf = \lambda_\alpha(x_1, \ldots, x_n;\, u)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad Mf = \mu_\alpha(x_1, \ldots, x_n;\, v)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

$\mathcal{F}$ étant complet, on a

$$(3)\qquad (Uf, Vf) = (Lf, Mf) = 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial u}$ et Lf laissent Mf invariante; et il en est de même, par suite, des transformations successives

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial u}, Lf\right) = L'f, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}, L'f\right) = L''f, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}, L^{(i)}f\right) = L^{(i+1)}f, & \ldots, \end{cases}$$

où $L^{(i)}f$ désigne la dérivée $i^{ème}$ de Lf, par rapport à u,

$$L^{(i)}f = \frac{\partial^i \lambda_\alpha(x_1, \ldots, x_n;\, u)}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons donc la suite

$$(5)\qquad Lf,\ L'f,\ L''f,\ \ldots,\ L^{(i)}f,\ \ldots$$

Il existera un entier l, au plus égal à n, tel que les l premières transformations de cette suite seront divergentes, tandis que les $l+1$ premières ne le seront pas, et donneront lieu à une identité de la forme

$$(6)\qquad L^{(l)}f = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n;\, u)L^{(\alpha)}f$$
$$[\alpha = 0, 1, 2, \ldots, (l-1);\ L^{(0)}f = Lf],$$

et, les transformations (5) laissant invariante l'équation $Vf = 0$, il résulte d'un théorème classique de S. Lie [1] que les coefficients a_α sont des invariants de Vf.

Soit alors $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ un système fondamental de solutions

---

[1] *Voir*, par exemple, S. Lie, *Gesamwelke Abhandlungen*, t. IV, p. 199.

de l'équation linéaire

$$(7)\quad \frac{d^l\varphi}{du^l} = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n; u)\frac{d^\alpha\varphi}{du^\alpha} \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots, (l-1); \frac{d^0\varphi}{du^0} = \varphi\right),$$

définies par la condition de se réduire, pour $u = u_0$ (valeur numérique arbitraire), ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(l-1)$, à des valeurs constantes (indépendantes des x_i) données. Pour l'une quelconque φ de ces solutions, (7) est une identité, et l'on en déduit

$$\frac{d^l(\mathrm{V}\varphi)}{du^l} = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n; u)\frac{d^\alpha(\mathrm{V}\varphi)}{du^\alpha} \qquad [\alpha = 0, 1, \ldots, (l-1)],$$

en appliquant aux deux membres l'opération $\mathrm{V}f$, qui est permutable avec $\frac{\partial f}{\partial u}$. Comme $\mathrm{V}\varphi$ s'annule, pour $u = u_0$, ainsi que ses $(l-1)$ premières dérivées, il en résulte que $\mathrm{V}\varphi$ est identiquement nul. Donc les φ_α sont, comme les a_α, des invariants de $\mathrm{V}f$.

On voit donc, par (6), que $\mathrm{L}f$ est de la forme

$$(8)\qquad \mathrm{L}f = \varphi_\alpha(x, u)\mathrm{L}_\alpha f, \qquad \mathrm{L}_i f = \lambda_{i,\gamma}(x)\frac{\partial f}{\partial x_\gamma}$$
$$(\alpha, i = 1, 2, \ldots, l;\ \gamma = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ_α étant des invariants de $\mathrm{V}f$ qui sont, par rapport à u, linéairement indépendants.

On déduit de cette identité

$$\mathrm{L}^{(i)}f = \varphi_\alpha^{(i)}.\mathrm{L}_\alpha f \qquad [i = 1, 2, \ldots, (l-1);\ \alpha = 1, 2, \ldots, l];$$

et, par suite, les $\varphi_\alpha^{(i)} = \frac{d^i\varphi_\alpha}{du^i}$ étant, comme les φ_α, des invariants de $\mathrm{V}f$, on aura, pour les $\mathrm{L}_i f$, des expressions de la forme

$$\mathrm{L}_i f = \varphi_{i,\alpha}(x, u)\,\mathrm{L}^{(\alpha)}f \qquad [i = 1, 2, \ldots, l;\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, (l-1)],$$

d'où l'on conclut que $\mathrm{L}_1 f, \ldots, \mathrm{L}_l f$ sont divergentes et laissent invariantes $\mathrm{V}f$ et $\mathrm{M}f$, aussi bien que $\mathrm{L}f, \mathrm{L}'f, \ldots, \mathrm{L}^{(l-1)}f$, pour qui ces propriétés étaient acquises. Car les $\varphi_{i,\alpha}$ seront, comme les $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha, \ldots$, au moyen desquels ils s'expriment, des invariants de $\mathrm{V}f$, et leur déterminant, comme celui des $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha, \ldots, \varphi_\alpha^{(l-1)}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, l)$, sera différent de zéro.

2. On obtiendra, de même, pour Mf, une expression de la forme

$$(9)\qquad Mf = \psi_\beta(x, v) M_\beta f, \qquad M_j f = \mu_{j,\gamma}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\gamma}$$
$$(\beta, j = 1, 2, \ldots, m;\ \gamma = 1, 2, \ldots, n),$$

où m est un entier au plus égal à n; les ψ_β y sont des invariants de Uf, linéairement indépendants relativement à v; les $M_j f$ sont divergentes et laissent invariantes Uf et Lf.

Il convient de remarquer ici que, si ψ est un invariant de Uf indépendant de u, on a l'identité

$$\varphi_\alpha(x, u) L_\alpha \psi = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, l),$$

d'où résulte, vu l'indépendance linéaire des φ_α, que les $L_\alpha \psi$ sont nuls : c'est-à-dire que ψ est un invariant de chacune des $L_i f$. Il en est donc ainsi pour les ψ_j. Et de même les φ_i sont des invariants pour chacune des $M_j f$.

L'invariance de Mf par les $L_i f$ donne donc

$$0 = (L_i f,\ \psi_\beta M_\beta f) = \psi_\beta (L_i f,\ M_\beta f) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l;\ \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

et l'on en conclut, vu l'indépendance linéaire des ψ_β,

$$(10)\qquad (L_i, M_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

3. D'après ce qui précède, tout invariant de Uf qui ne dépend pas de u est un invariant du faisceau $\{L_1, \ldots, L_l\}$. L'identité (8) rend la réciproque évidente. Considérons donc le premier des dérivés successifs de ce faisceau qui soit complet. On pourra lui donner pour base, si p est son degré, $(l \leqq p \leqq n)$, des transformations $L_1, \ldots, L_p$ parmi lesquelles figureront les transformations $L_1, \ldots, L_l$ déjà introduites, les autres (si $l < p$), provenant de celles-là par l'algorithme des crochets successifs. Ces dernières, comme $L_1, \ldots, L_l$, seront donc permutables à $M_1, \ldots, M_m$.

Si l'on opère de même sur $M_1, \ldots, M_m$, on obtiendra un autre faisceau complet, de degré q, $(m \leqq q \leqq n)$, dont les invariants seront les invariants de Vf ne dépendant pas de v, et dont on aura une base, $M_1, \ldots, M_q$, en adjoignant, si $m < q$, à $M_1, \ldots, M_m$ certaines des transformations qu'on en déduit par l'algorithme des crochets successifs; et l'on aura les identités

$$(10\ bis)\qquad (L_i, M_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q).$$

$L_1, \ldots, L_p$, comme $M_1, \ldots, M_q$, seront, du reste, divergentes, en tant que transformations de base de deux faisceaux.

De plus, le faisceau $L_1, \ldots, L_p$ étant complet, on aura des identités

$$(11) \qquad (L_i, L_j) = a_{ij\alpha} L_\alpha \qquad (i, j, \alpha = 1, 2, \ldots, p);$$

et, les premiers membres laissant invariante l'équation $Vf = 0$, puisque $L_1, \ldots, L_p$ le font, il résulte du théorème de S. Lie déjà utilisé que les $a_{ij\alpha}$ seront des constantes ou des invariants de Vf indépendants de v. De même, les M_i seront liées par des identités

$$(12) \qquad (M_i, M_j) = b_{ij\alpha} M_\alpha \qquad (i, j, \alpha = 1, 2, \ldots, q),$$

dont les coefficients $b_{ij\alpha}$ seront des constantes où des invariants de Uf indépendants de u.

4. *Premier cas : $p = q = n$.* — Les seuls invariants de Uf indépendants de u sont les fonctions de v : et les seuls invariants de Vf indépendants de v sont les fonctions de u. Car les faisceaux $\{L_1, \ldots, L_p\}$, $\{M_1, \ldots, M_q\}$ n'ont alors aucun invariant fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Par conséquent, les φ_α de (8) sont des fonctions de u seule, les ψ_α de (9) sont des fonctions de v seule, les $a_{ij\alpha}$ de (11) et les $b_{ij\alpha}$ de (12) sont des constantes. Donc $L_1, \ldots, L_n$ et $M_1, \ldots, M_n$ sont deux groupes de transformations infinitésimales, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, *simplement transitifs et réciproques* (1), de l'espace $x_1, \ldots, x_n$; et le faisceau $\mathcal{F}$ est de la forme

$$(13) \quad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u) L_\alpha f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial u} + \psi_\alpha(v) M_\alpha f \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est ce que j'appellerai un faisceau de Lie (2) associé au couple de groupes simplement transitifs réciproques $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$.

Observons que, dans le cas actuel, les transformations $\varphi_\alpha(u) L_\alpha$ et $\psi_\alpha(v) M_\alpha$ n'appartiennent pas, quel que soit u et quel que soit v, respectivement, à un même sous-groupe, la première de $\mathcal{L}$, la seconde de $\mathcal{M}$.

---

(1) *Voir*, par exemple, S. Lie et Fr. Engel, *Theorie des Transf. Gruppen*, t. I, p. 380.

(2) Je ne crois pas, cependant, que S. Lie ait étudié, spécialement, les systèmes complets, $Uf = 0$, $Vf = 0$, associés à de tels faisceaux.

5. *Deuxième cas : $p < n$, $q = n$.* — Les seuls invariants de Vf indépendants de v sont les fonctions de u seul. Au contraire, Uf admet $s = n - p$ invariants indépendants, fonctions des x_i seuls, et pas davantage. Prenons comme variables nouvelles, à la place de $x_{p+1}, \ldots, x_n$, un système fondamental, $v_1, \ldots, v_s$, de tels invariants : alors les invariants de Uf indépendants de u, (tels les ψ_β), seront des fonctions de $v, v_1, \ldots, v_s$.

Dans les relations (11), les $a_{ij\alpha}$, invariants de Vf qui ne dépendent pas de u, sont des constantes. Donc $L_1, \ldots, L_p$ formeront un groupe simplement transitif $\mathfrak{L}$ en $x_1, \ldots, x_p$, dans les transformations duquel $v_1, \ldots, v_s$ pourront figurer comme paramètres, mais dont la structure ne dépendra pas de ceux-ci. On pourra donc, en substituant à $x_1, \ldots, x_p$ d'autres variables convenablement choisies,

$$x'_h = f_h(x_1, \ldots, x_p; v_1, \ldots, v_s) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

faire disparaître les paramètres v des transformations L_i (1). Il est donc loisible de supposer que l'on a, d'emblée,

$$\text{(14)} \qquad L_i f = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_p)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p).$$

Quant aux M_j, elles prennent la forme

$$\text{(15)} \quad M_j f = \mu_{j,\alpha}(x_1, \ldots, x_p; v_1, \ldots, v_s)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \eta_{j,\gamma}(v_1, \ldots, v_s)\frac{\partial f}{\partial v_\gamma}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, p;\ \gamma = 1, 2, \ldots, s).$$

Les coefficients $\eta_{j,\gamma}$ ne dépendent pas de $x_1, \ldots, x_p$, car, en vertu des identités (10^{bis}), ce sont des invariants des L_i, et, par conséquent des invariants de Uf, qui ne dépendent ni de u, ni de v.

Remarquons maintenant que, si l'on remplace les M_j par n combinaisons indépendantes, à coefficients fonctions des v_k, de ces transformations, cela n'altérera, ni les identités (10^{bis}), ni la forme des identités (12), où les coefficients $b_{ij\alpha}$ sont des fonctions des v_i, et, dans l'identité (9), cela aura seulement pour effet de

(1) Car en donnant aux v_j des valeurs numériques, v_j^0, dans les L_i, on obtiendra un groupe $L_1^0, \ldots, L_p^0$, de la même structure que $L_1, \ldots, L_p$; et deux groupes simplement transitifs ayant la même structure sont semblables.

faire porter la so mmation sur toutes les n transformations M_j nouvelles. Sous cette dernière réserve, il est donc loisible de supposer que les M_j sont de la forme

$$(16)\qquad M_j f = \mu_{j,\alpha}(x_1, \ldots, x_p; v_1, \ldots, v_s)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (j, \alpha = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(17)\qquad M_{p+h} f = V_h f = \frac{\partial f}{\partial v_h} + \mu'_{h,\alpha}(x_1, \ldots, x_p; v_1, \ldots, v_s)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p).$$

Pour les transformations (16), les identités (10^{bis}), associées aux identités, du type (12),

$$(18)\qquad (M_i, M_j) = b_{ij\alpha}(v_1, \ldots, v_s)M_\alpha \qquad (i, j, \alpha = 1, 2, \ldots, p),$$

montrent que, les v_i n'y figurant que comme paramètres, elles sont des transformations de base du groupe simplement transitif $\mathfrak{M}$, réciproque de $\mathfrak{L}$. Ce sont donc des combinaisons, à coefficients fonctions des v_i, de p transformations indépendantes de ces paramètres. Il est donc loisible de supposer que ces transformations (16) sont de la forme

$$(16\ bis)\qquad M_j f = \mu_{j,\alpha}(x, \ldots, x_p)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (j, \alpha = 1, 2, \ldots, p).$$

Les identités (10^{bis}), appliquées aux transformations (17), montrent encore que les transformations $\mu'_{h,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ laissent invariantes les diverses L_i; et l'on a, par suite,

$$(17\ bis)\qquad M_{p+h} f = V_h f = \frac{\partial f}{\partial v_h} + \psi_{h,\alpha}(v_1, \ldots, v_s)M_\alpha f$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p).$$

On a, en définitive, pour le faisceau $\mathcal{F}$, la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} Uf = \dfrac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u)L_\alpha f, \\ Vf = \dfrac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v, v_1, \ldots, v_s)M_\alpha f + \psi_\beta(v, v_1, \ldots, v_s)\dfrac{\partial f}{\partial v_\beta} \\ \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p;\ \beta = 1, 2, \ldots, s). \end{cases}$$

Si, dès lors, on introduit comme variables nouvelles, à la place de $v_1, \ldots, v_s$, un système fondamental d'invariants,

$$w_h = f_h(v, v_1, \ldots, v_s), \qquad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

de la transformation

$$(20)\qquad V_0 f = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi'_\beta(v, v_1, \ldots, v_s)\frac{\partial f}{\partial v_\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s),$$

(lesquels seront des invariants de $\mathcal{F}$), $\mathcal{F}$ sera ramené à être un faisceau de Lie, associé au couple des groupes $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$,

$$(21)\qquad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u) L_\alpha f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v;\, w_1, \ldots, w_s) M_\alpha f$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, p);$$

car les w_i ne joueront que le rôle de paramètres dans les coefficients ψ_α de Vf.

6. *Troisième cas* : $p < n$, $q < n$. — Il peut arriver, dans ce cas, que $\mathcal{F}$ ait des invariants, $w_1, \ldots, w_g$, fonctions des x_i seuls. Mais si on les introduit comme variables, à la place des g derniers des x_i, ils ne figureront dans Uf et Vf que comme des paramètres constants, dont on pourra faire abstraction. Nous écarterons donc cette hypothèse. Alors Uf a $t = n - p$ invariants indépendants, $v_1, \ldots, v_t$, indépendants de u; et Vf a $s = n - q$ invariants indépendants, $u_1, \ldots, u_s$, indépendants de v; et les $s + t$ fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ ainsi introduites, $u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_t$ sont indépendantes. Prenons-les comme variables nouvelles, à la place des $s + t$ dernières variables x_i; et nous aurons, pour les L_i et M_j, la forme

$$(22)\quad L_i = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r;\, u_1, \ldots, u_s;\, v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \xi_{i,\beta}(u_1, \ldots, u_s)\frac{\partial f}{\partial u_\beta}$$

$$(23)\quad M_j = \mu_{j,\alpha}(x_1, \ldots, x_r;\, u_1, \ldots, u_s;\, v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \eta_{j,\gamma}(v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial v_\gamma}$$

$$\left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r; \\ r = n - s - t;\quad \beta = 1, 2, \ldots, s;\ \gamma = 1, 2, \ldots, t, \end{array}\right)$$

dans laquelle on a tenu compte que, d'après les identités (10^{bis}), les ξ_{ip} étaient des invariants de Vf, et les $\eta_{j\gamma}$ des invariants de Uf.

On peut, comme dans le cas précédent, sans changer la forme des identités (8), (9), (10^{bis}), (11) et (12), ni la nature de leurs coefficients [sous la seule réserve que les sommations, dans (8) et (9), s'étendront de 1 à p, et de 1 à q], remplacer les L_i par des combinaisons de ces transformations à coefficients fonctions des u_i seuls, et les M_j par des combinaisons de ces transformations, à coefficients fonctions des v_i seuls, et, par suite, supposer, pour les L_i et les M_j, la forme suivante :

$$(24)\qquad L_i = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r;\ u_1, \ldots, u_s;\ v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(i, \alpha = 1, 2, \ldots, r);$$

$$(25)\qquad L_{r+h} = \frac{\partial f}{\partial u_h} + \lambda'_{h,\alpha}(x_1, \ldots, x_r;\ u_1, \ldots, u_s;\ v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r);$$

$$(26)\qquad M_i = \mu_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_2;\ u_r, \ldots, u_s;\ v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(i, \alpha = 1, 2, \ldots, r);$$

$$(27)\qquad M_{r+k} = \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + \mu'_{k,\alpha}(x_1, \ldots, x_r;\ u_1, \ldots, u_s;\ v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, t;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Or, dans les identités (11), appliquées aux transformations (24), les $a_{ij\alpha}$ sont ici des fonctions des u_i seuls; et dans les identités (12), appliquées aux transformations (26), les $b_{ij\alpha}$ sont des fonctions des v_i seuls. Par ailleurs, les u_i et les v_i n'interviennent, dans (24) et (26), que comme des paramètres. Compte tenu des identités (10^{bis}), on conclut donc que $L_1, \ldots, L_r$ et $M_1, \ldots, M_r$ constituent deux groupes simplement transitifs réciproques, $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$, en $x_1, \ldots, x_r$. De plus, la structure du premier ne dépend pas des paramètres v_i, et la structure du second ne dépend pas des paramètres u_i. Comme deux groupes simplement transitifs réciproques ont la même structure, on conclut que celle de $\mathcal{L}$ et de $\mathfrak{M}$ ne dépend ni des paramètres u_i, ni des paramètres v_i. Donc, on pourra faire disparaître ces paramètres des $\mathcal{L}_i$ et des $\mathfrak{M}_j$, par un changement de variables qui remplacera les x_i par des fonctions des x_i, u_i et v_i convenablement choisies. Nous pouvons donc remplacer les formules (24) et (26) par des formules de la forme

$$(28)\qquad L_i = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad M_i = \mu_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(i, \alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Les identités (10^{bis}), appliquées maintenant aux crochets des transformations (25) avec les transformations $M_1, \ldots, M_r$, et à ceux des transformations (27) avec $L_1, \ldots, L_r$, montrent ensuite que les transformations (25) et (27) sont de la forme

$$(29)\qquad L_{r+h} = \frac{\partial f}{\partial u_h} + \varphi_{h,\alpha}(u_1, \ldots, u_s; v_1, \ldots, v_t) L_\alpha$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r);$$

$$(30)\qquad M_{r+k} = \frac{\partial f}{\partial v_k} + \psi_{k,\alpha}(u_1, \ldots, u_s; v_1, \ldots, v_t) M_\alpha$$
$$(k = 1, 2, \ldots, t;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

De sorte que l'on aura, pour Uf et Vf, des expressions

$$(31)\quad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega_\alpha(u; u_1, \ldots, u_s)\frac{\partial f}{\partial u_\alpha} + \varphi_\gamma(u; u_1, \ldots, u_s; v_1, \ldots, v_t) L_\gamma f$$

$$(32)\quad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \varpi_\beta(v; v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial u_\beta} + \psi_\gamma(v; u_1, \ldots, u_s; v_1, \ldots, v_t) M_\gamma f$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, s;\ \beta = 1, 2, \ldots, t;\ \gamma = 1, 2, \ldots, r).$$

Remplaçons $u_1, \ldots, u_s$ par s invariants, $f_i(u, u_1, \ldots, u_s) = u'_i$, (indépendants) de la transformation

$$(33)\qquad U_0 f = \frac{\partial f}{\partial u} + \omega_\alpha(u; u_1, \ldots, u_s)\frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

et $v_1, \ldots, v_t$ par t invariants (indépendants), $g_i(v, v_1, \ldots, v_t) = v'_i$, de la transformation

$$(34)\qquad V_0 f = \frac{\partial f}{\partial v} + \varpi_\beta(v; v_1, \ldots, v_t)\frac{\partial f}{\partial v_\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, t),$$

et nous aurons réduit Uf et Vf à la forme de Lie

$$(35)\qquad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \Phi_\alpha(u, v) L_\alpha f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \Psi_\alpha(u, v) M_\alpha f$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Les u'_i et v'_i ne figureront, dans les Φ_α et ψ_α, que comme des paramètres arbitraires : car ce seront des invariants de $\mathcal{F}$.

7. Reste à exprimer que $\{Uf, Vf\}$ est complet : ce qui donne la condition

$$(36)\qquad \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial u} M_\alpha f - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v} L_\alpha f = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Si donc les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ n'ont pas de transformation infinitésimale commune, on conclut $\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial v}=0$, $\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial u}=0$, $(\alpha=1, 2, \ldots, t)$, c'est-à-dire que l'on a la forme (13) du premier cas.

Supposons, en second lieu, que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ aient ν transformations infinitésimales (indépendantes) en commun, et pas davantage, $N_1 f, \ldots, N_\nu f$: c'est, comme l'on sait, le cas où la structure de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ comporte, pour chacun, ν transformations *distinguées* (permutables à toute transformation infinitésimale du groupe) indépendantes, lesquelles leur sont communes. Les deux groupes seront ainsi, avec $r=\rho+\nu$,

$$(37)\quad (\mathcal{L})\ (L_1, \ldots, L_\rho, N_1, \ldots, N_\nu);\qquad (\mathcal{M})\ (M_1, \ldots, M_\rho, N_1, \ldots, N_\nu),$$

et $\mathcal{F}$ sera de la forme

$$(38)\quad U=\frac{\partial f}{\partial v}+\Phi_\alpha L_\alpha+\chi_\beta(u, v)N_\beta,\qquad V=\frac{\partial f}{\partial v}+\Psi_\alpha M_\alpha+\theta_\beta(u, v)N_\beta$$
$$(\alpha=1, 2, \ldots, \rho;\ \beta=1, 2, \ldots, \nu).$$

La condition $(U, V)=0$ donnera alors

$$\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial\chi_\beta}{\partial v}=\frac{\partial\theta_\beta}{\partial u};$$

de sorte que la forme définitive de $\mathcal{F}$ sera

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} Uf&=\frac{\partial f}{\partial u}+\varphi_\alpha(u)\,L_\alpha+\frac{\partial H_\beta(u, v)}{\partial u}N_\beta,\\ Vf&=\frac{\partial f}{\partial v}+\psi_\alpha(v)\,M_\alpha+\frac{\partial H_\beta(u, v)}{\partial v}N_\beta\\ &(\alpha=1, 2, \ldots, \rho;\ \beta=1, 2, \ldots, \nu).\end{aligned}\right.$$

Remarquons que l'on pourrait, par un changement de variables effectué sur les x_i, ramener les L_i, M_i, N_j à la forme (¹)

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} L_i&=\lambda_{i\alpha}(x_1, \ldots, x_\rho)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}+\lambda'_{i\beta}(x_1, \ldots, x_\rho)\frac{\partial f}{\partial z_\beta},\\ N_j&=\frac{\partial f}{\partial z_j},\\ M_i&=\mu_{i\alpha}(x_1, \ldots, x_\rho)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}+\mu'_{i\beta}(x_1, \ldots, x_\rho)\frac{\partial f}{\partial z_\beta}\\ &(i, \alpha=1, 2, \ldots, \rho;\ j, \beta=1, 2, \ldots, \nu),\end{aligned}\right.$$

(¹) En effet, les N_j, permutables deux à deux, forment un groupe semblable à un groupe de translations. De là leur réductibilité à la forme indiquée, et que le changement de variables, sur les z_j,

$$(41)\qquad z'_j = z_j - \mathrm{H}_j(u, v) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

réduirait les expressions (39) à la forme (13)

$$(42)\quad \mathrm{U}f = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u)\mathrm{L}_\alpha f, \qquad \mathrm{V}f = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v)\mathrm{M}_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho),$$

les lettres z_h étant remplacées par les lettres z'_h dans les expressions (40) des L_i et des M_i.

Observons que $\mathcal{F}$ admettra ρ invariants indépendants qui seront fonctions de $x_1, \ldots, x_\rho, u, v$. Ils seront donnés par l'intégration du faisceau de Lie

$$(43)\quad \mathrm{U}f = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u)\bar{\mathrm{L}}_\alpha f, \qquad \mathrm{V}f = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v)\mathrm{M}_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho).$$

relatif au couple de groupes simplement transitifs réciproques, aux variables $x_1, \ldots, x_\rho$,

$$(44)\quad (\mathcal{L})\quad \mathrm{L}_i = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_\rho)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}; \qquad (\mathfrak{M})\quad \mathrm{M}_i = \mu_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_\rho)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Une réduction analogue serait applicable aussi aux deux premiers cas (n° 4 et n° 5). Les invariants du faisceau (43), une fois obtenus, étant pris pour nouvelles variables à la place de $x_1, \ldots, x_\rho$, n'interviendront plus que comme des paramètres; et il restera à intégrer un faisceau complet de la forme

$$(45)\qquad \mathrm{U}f = \frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{F}_\beta(u, v)\frac{\partial f}{\partial z_\beta}, \qquad \mathrm{V}f = \frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{G}_\beta(u, v)\frac{\partial f}{\partial z_\beta}$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots, \nu).$$

ce qui exigera seulement ν quadratures de différentielles totales,

$$\int \mathrm{F}_\beta(u, v)\,du + \mathrm{G}_\beta(u, v)\,dv \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu).$$

$x_1, \ldots, x_\rho$, désignant des invariants de ce groupe. Les conditions $(\mathrm{L}_i, \mathrm{N}_j) = 0$, $(\mathrm{M}_i, \mathrm{N}_j) = 0$, expriment alors que les coefficients des L_i et des M_i ne dépendait pas des z_h.

8. **L'intégrale générale des faisceaux de Lie**

$$(46)\quad Uf = \frac{\partial f}{\partial u} + \varphi_\alpha(u) L_\alpha f, \qquad Vf = \frac{\partial f}{\partial v} + \psi_\alpha(v) M_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

auxquels nous avons été conduits par l'analyse précédente, se présente sous une forme remarquable, en relation avec les principes fondamentaux de la théorie des groupes continus finis.

Les deux groupes simplement transitifs,

$$(47)\quad (\mathcal{L})\quad L_i = \lambda_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}; \qquad (\mathfrak{M})\quad M_i = \mu_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_r)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$
$$(i, \alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

qui sont associés à un tel faisceau $\mathfrak{F}$, peuvent, en effet, être considérés comme les *deux groupes paramétriques* (¹) attachés à une certaine *structure* Σ, qui est leur structure commune.

Si les *formules de structure*, qui donnent, en fonction des paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$, $(b_1, \ldots, b_r)$ de deux transformations quelconques T_a, T_b, d'un groupe quelconque G de cette structure, les paramètres $(c_1, \ldots, c_r)$ de la transformation produit $T_c = T_a T_b$, sont

$$(48)\qquad c_i = \Omega_i(a_1, \ldots, a_r;\ b_1, \ldots, b_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

les équations finies de $\mathcal{L}$ et de $\mathfrak{M}$ seront

$$(49)\quad (\mathcal{L})\quad x'_i = \Omega_i(x_1, \ldots, x_r;\ b_1, \ldots, b_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$
$$(50)\quad (\mathfrak{M})\quad x'_i = \Omega_i(a_1, \ldots, a_r;\ x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

avec les paramètres b_i et a_i, respectivement (²).

Ceci posé, considérons le système S, complètement intégrable,

---

(¹) *Voir*, par exemple, S. Lie et Fr. Engel, *Theorie des Transf. Gruppen*, t. I, p. 401, et t. III, p. 638; et aussi E. Vessiot, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896, mém. C, p. 3.

(²) Il faut observer que les formules de structure (48) sont susceptibles d'une infinité de formes, pour une même structure Σ. Car on peut effectuer, sur $(a_1, \ldots, a_r)$, $(b_1, \ldots, b_r)$ et $(c_1, \ldots, c_r)$, une même transformation ponctuelle arbitraire de l'espace à r dimentions; ou, en d'autres termes, rapporter l'être géométrique qu'est cette structure à un système quelconque de coordonnées curvilignes de cet espace de groupe. C'est pour un choix convenable de ce mode de référence que les équations (49) et (50) seront celles des groupes $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ donnés.

formé par les deux systèmes partiels

$$(51)\qquad \frac{dx_i}{du} = \varphi_\alpha(u)\lambda_{\alpha.i}(x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(52)\qquad \frac{dx_i}{dv} = \psi_\alpha(v)\mu_{\alpha.i}(x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

dont l'intégration équivaut à celle du faisceau $\mathcal{F}$ donné; et cherchons-en une solution de la forme

$$(53)\qquad x_i = \Omega_i(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

les b_i étant des fonctions inconnues de u seul, et les a_i des fonctions inconnues de v seul.

Portons donc ces expressions (53) dans (51) et (52). En ce qui concerne (51), v et, par suite, les a_i jouent le rôle de constantes. L'opération consiste donc à effectuer dans (51) une transformation du groupe $\mathfrak{M}$, qui remplacera le point $(x_1, \ldots, x_r)$ par le point $(b, \ldots, b_r)$. Or, en vertu des identités $(M_i, U) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, le groupe $\mathfrak{M}$ laisse Uf invariante, et, par conséquent, laisse invariant aussi le système (51). On obtiendra donc, à la place de (51), le système de même forme

$$(54)\qquad \frac{db_i}{du} = \varphi_\alpha(u)\lambda_{\alpha.i}(b_1, \ldots, b_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

On obtiendra de même, à la place du système (52), le système

$$(55)\qquad \frac{da_i}{dv} = \psi_\alpha(v)\mu_{\alpha.i}(a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

On est donc ramené à intégrer deux systèmes de Lie, à une seule variable indépendante, et indépendants l'un de l'autre. On obtiendra ainsi des fonctions $b_i(u)$ se réduisant, pour $u = u_0$, à des valeurs numériques arbitraires b_i^0; et des fonctions $a_i(v)$ se réduisant, pour $v = v_0$, à des valeurs numériques arbitraires a_i^0; et, par conséquent, des fonctions (53), solutions de S, qui se réduiront, pour $u = u_0$, $v = v_0$, aux valeur numériques

$$(56)\qquad x_i^0 = \Omega_i(a_1^0, \ldots, a_r^0; b_1^0, \ldots, b_r^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

qui seront, elles-mêmes, arbitraires : et les équations (53) donneront l'intégrale générale de S.

Le raisonnement fait plus haut, pour l'introduction des expressions (53) dans (51) et (52), prouve, de plus, que si l'on a trouvé une solution particulière quelconque $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_2)$, $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_2)$ de chacun des systèmes (51) et (52), on en peut déduire leurs intégrales générales par les formules

$$(56)\qquad b_i = \Omega_i(\beta_1, \ldots, \beta_r; \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(57)\qquad a_i = \Omega_i(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où les β_i et les α_i sont des constantes arbitraires.

9. Du résultat précédent on peut déduire un système fondamental d'invariants du faisceau $\mathfrak{F}$. On a, en effet, l'intégrale générale de S, en mettant, dans les formules (53) : pour les a_i, une solution particulière du système (55), et pour les b_i, la solution générale du système (54). Elle sera ainsi donnée par les équations

$$(58)\quad x_i = \Omega_i[a_1, \ldots, a_r; \Omega_1(c_1, \ldots, c_r; b_1, \ldots, b_r), \ldots, \Omega_r(c_1, \ldots, c_r; b_1, \ldots, b_r)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

où $(a_1, \ldots, a_r)$ est une solution particulière quelconque de (55), $(b_1, \ldots, b_r)$ une solution particulière quelconque de (54), et $c_1, \ldots, c_r$ des constantes arbitraires, par rapport auxquelles nous allons résoudre ces équations.

Introduisons, à cet effet, la transformation qui donne, en fonction des paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$ d'une transformation quelconque d'un groupe G, de la structure Σ considérée, les paramètres $(a'_1, \ldots, a'_r)$ de la transformation inverse; et soit

$$(59)\qquad a'_j = \mathfrak{J}_j(a_1, \ldots, a_r) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

cette transformation, qu'on peut nommer l'*inversion* $\mathfrak{J}$ de la structure Σ. En appliquant cette inversion aux a_i des formules (58) on obtiendra (¹)

$$(60)\quad \Omega_i(c_1, \ldots, c_r; b_1, \ldots, b_r) = \Omega_i(a'_1, \ldots, a'_r; x_1, \ldots, x_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

(¹) Il faut observer que les équations de $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{M}$ étant écrites sous la forme (49) et (50), les équations de structure de $\mathcal{E}$ sont les équations (48); mais que

Appliquant ensuite l'inversion $\mathcal{J}$, aux $(b_1, \ldots, b_r)$, c'est-à-dire en posant

(61) $$b'_h = \mathcal{J}_h(b_1, \ldots, b_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

on déduira de ces formules (60) les formules résolues cherchées :

(62) $$c_i = \Omega_i[\Omega_1(a', x), \ldots, \Omega_r(a', x); b'_1, \ldots, b'_r] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

On peut aussi les écrire, en vertu de l'associativité des produits de transformations, sous la forme, en quelque sorte corrélative vis-à-vis de Uf et Vf,

(62 *bis*) $$c_i = \Omega_i[a'_1, \ldots, a'_r; \Omega_1(x, b'), \ldots, \Omega_r(x, b')] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Par ailleurs, on peut se débarrasser, dans les formules (62) et (62^{bis}) de l'intermédiaire de l'inversion $\mathcal{J}$ pour y définir les a'_i et les b'_i. En effet, cette inversion $\mathcal{J}$, appliquée du groupe $\mathcal{L}$, donne le groupe $\mathfrak{M}$ et inversement. Car elle change les équations de structure (48) en

(63) $$c'_i = \Omega_i(b'_1, \ldots, b'_r; a'_1, \ldots, a'_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

quand on l'applique simultanément aux trois systèmes de valeurs des paramètres [1]. Et l'on montre facilement que si l'on a choisi, pour les L_i et les M_i, les transformations infinitésimales de $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont

(64) $$\left\{\begin{aligned} \lambda_{h,i}(a_1, \ldots, a_r) &= \left(\frac{\partial\Omega_i(a, b)}{\partial b_h}\right)_{b=\varepsilon} \\ \mu_{h,i}(b_1, \ldots, b_r) &= \left(\frac{\partial\Omega_i(a, b)}{\partial a_h}\right)_{a=\varepsilon} \end{aligned}\right. \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, r),$$

(les notations $b = \varepsilon$, $a = \varepsilon$ indiquant que les dérivées des seconds membres sont prises pour les valeurs de $(b_1, \ldots, b_r)$ et de $(a_1, \ldots, a_r)$ respectivement égales aux paramètres $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ de la transformation identique des groupes G de la structure Σ

celles de $\mathfrak{M}$ sont les équations, inversées, $c_i = \Omega_i(b_1, \ldots, b_r; a_1, \ldots, a_r)$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$. L'inversion, qui est involutive, est néanmoins la même pour les deux groupes. Elle est définie par les équations $\Omega_i(a_1, \ldots, a_r; a'_1, \ldots, a'_r) = \varepsilon_i$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est le système de valeurs des paramètres qui correspond à la transformation identique des groupes G considérés.

[1] Cela tient à ce que de $T_c = T_a T_b$ on déduit $T_c^{-1} = T_b^{-1} T_a^{-1}$.

considérée], l'inversion $\mathcal{J}$ change L_i en $(-M_i)$ et M_i en $(-L_i)$.

Les a'_i et les b'_i constituent donc, respectivement, une solution particulière quelconque du premier et du second des deux systèmes de Lie

$$\frac{da'_i}{dv} + \psi_\alpha(v)\lambda_{\alpha,i}(a'_1, \ldots, a'_r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{65}$$

$$\frac{db'_i}{du} + \varphi_\alpha(u)\mu_{\alpha,i}(b'_1, \ldots, b'_r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{66}$$

Sous cette double condition, les formules (62), (62^{bis}) ont pour seconds membres les systèmes fondamentaux d'invariants du faisceau $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire de solutions du système complet $Uf = 0$, $Vf = 0$), annoncés.