BULLETIN DE LA S. M. F.

WOLFGANG DOEBLIN
ROBERT FORTET

Sur des chaînes à liaisons complètes

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 132-148
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__132_0>

SUR DES CHAINES A LIAISONS COMPLÈTES;

PAR MM. W. DOEBLIN ET ROBERT FORTET.

Introduction.

Notations. — Soit un système aléatoire pouvant prendre, à la suite d'expériences, un nombre fini d'états $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Appelons *chemin* la suite ordonnée des états pris successivement par le système; un chemin c peut être caractérisé par la suite $i_0, i_{-1}, \ldots, i_{-n}, \ldots$ des indices des états qui ont été pris par le système respectivement à la suite de la dernière expérience, à la suite de l'avant-dernière, etc., et ainsi de suite, en remontant dans le temps. Un chemin peut être infini ou fini, c'est-à-dire que la suite précédente peut être infinie ou finie, suivant qu'il y a déjà eu une infinité d'expériences réalisées, ou seulement un nombre fini.

Étant donnés deux chemins c et c', où c' est fini, correspondant aux suites $i_0, i_{-1}, \ldots, i_{-n}, \ldots$ et $i'_0, i'_{-1}, \ldots, i'_{-p}$, nous appelons $c+c'$ le chemin correspondant à la suite : $i'_0, i'_{-1}, \ldots, i'_{-p}, i_0, i_{-1}, \ldots, i_{-n}, \ldots$. Étant donné le chemin $c(i_0, i_{-1}, \ldots, i_{-n}, \ldots)$ et l'état E_i, nous désignons par $c+i$ le chemin correspondant à la suite : $i, i_0, i_{-1}, \ldots, i_{-n}, \ldots$. Nous appelons $\varphi_i[c+i=\varphi_i(c)]$ la transformation qui fait passer de c à $c+i$.

Chaînes à liaisons complètes. — Supposons que, lorsque le système a parcouru un chemin c quelconque, il y a une probabilité déterminée $p_i(c)$, fonction de c, pour qu'il prenne l'état E_i à la suite de l'expérience prochaine. Il y a alors évidemment une probabilité déterminée $P_i^n(c)$ pour qu'il prenne l'état E_i à la suite des n expériences prochaines. Ces probabilités sont évidemment liées par la relation fonctionnelle

$$(1)\qquad P_j^{n+1}(c)=\sum_{i=1}^{r} p_i(c)\,P_j^n[\varphi_i(c)] \quad (j)$$

avec

$$P_i(c) = p_i(c), \qquad \sum_i p_i(c) = 1.$$

Nous disons alors, avec MM. Onicescu et Mihoc, que nous sommes en présence d'une *chaîne à liaisons complètes* [1]. Le problème essentiel est d'étudier le comportement de $P_i^n(c)$ lorsque n croît indéfiniment : problème sans doute difficile lorsque les $p_i(c)$ sont quelconques. On est donc conduit à définir des catégories particulières de chaînes à liaisons complètes, en imposant aux $p_i(c)$ des conditions supplémentaires.

Il nous a semblé qu'une hypothèse à la fois naturelle et susceptible de conduire à des résultats, consiste à supposer que *les $p_i(c)$ dépendent peu des états de c obtenus à la suite d'expériences très anciennes, et à la limite n'en dépendent plus du tout, s'il s'agit d'expériences infiniment anciennes.* Il y a évidemment bien des manières, non exactement équivalentes, de traduire mathématiquement cette hypothèse : nous allons en exposer deux.

I. — Les chaînes (A).

Étant donnés deux chemins quelconques $c(i_0, i_{-1}, \ldots, i_{-n}, \ldots)$ et $c'(i'_0, i'_{-1}, \ldots, i'_{-n}, \ldots)$ et k un nombre positif inférieur à 1, quelconque par ailleurs : nous appellerons : distance (mod. k) de c et c' la quantité

$$D_k(c, c') = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j . k^j, \tag{2}$$

où ε_j égale 1 ou 0 suivant que i_{-j} diffère de i'_{-j} ou non.

Ceci étant, nous dirons qu'*une chaîne à liaison complète est une chaîne* (A), *s'il existe un nombre* $M(>0)$ *et un nombre* $k(0 < k < 1)$, *tels que l'on ait*

$$|p_i(c) - p_i(c')| \leq M . D_k(c, c') \tag{3}$$

[1] *Cf.* ONICESCU et MIHOC, *Sur les chaînes de variables statistiques* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 59, 1935, p. 174-192). Dans ce Mémoire, outre la définition des chaînes à liaisons complètes générales, les Auteurs étudient en détail un cas particulier, dont nous parlons plus loin sous le nom de *chaînes* [O-M].

quels que soient c et c' et i. Autrement dit, on suppose que l'influence des expériences anciennes décroît en raison géométrique de leur ancienneté. (Évidemment une telle hypothèse comporte une large part d'arbitraire et nous l'avons choisie surtout en raison de sa commodité mathématique; rappelons cependant que Galton a fait pour l'étude de l'hérédité une hypothèse très comparable.)

Ceci étant, l'équation de récurrence (1), avec la définition (2) et la condition (3), rentre dans une catégorie que nous avons pu étudier, nous exposons cette étude dans une Note à la fin de ce travail, et nous allons donner immédiatement les principaux résultats ainsi obtenus.

Théorème I. — *Pour une chaîne* (A), *lorsque n croît indéfiniment, les probabilités* $P_i^n(c)$ *sont des fonctions asymptotiquement presque périodiques de n, et convergent en moyenne de Césaro, vers des limites* $\Pi_i(c)$.

Théorème II. — *Pour une chaîne* (A), *s'il existe un état* E_{i_0} *tel que l'on ait* $p_{i_0}(c) > \eta > 0$ *quel que soit c, les probabilités* $P_i^n(c)$ *tendent normalement, au sens ordinaire, lorsque n croît indéfiniment, vers des limites* Π_i *indépendantes de* C.

Ainsi les résultats essentiels de la théorie des chaînes de Markoff sont conservés, sauf la périodicité asymptotique des $P_i^n(c)$, qu'on ne peut guère espérer dans le cas général et qui est en tous cas remplacée par la presque périodicité. Ajoutons que l'on pourrait envisager l'étude de variables aléatoires liées à une chaîne (A) : la méthode de M. Mihoc pour l'étude des variables aléatoires liées à une chaîne simple de Markoff serait applicable.

Application aux chaînes (O-M). — Dans leur Mémoire cité en Note, p. 133, MM. Onicescu et Mihoc ont défini des chaînes, que nous appellerons *chaînes* (O-M), de la façon suivante : les états $E_1, E_2, \ldots, E_r$ se présentant à la $(n-1)^{\text{ième}}$ expérience avec des probabilités $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $\left(\sum_i x_i = 1\right)$, et la $(n-1)^{\text{ième}}$ expérience ayant réalisé l'état E_j, ces Auteurs supposent qu'à la $n^{\text{ième}}$ expérience les états $E_1 \ldots E_r$ ont des probabilités respectives

$x'_1, \ldots, x'_r \left(\sum_i x'_i = 1\right)$ qui sont des fonctions déterminées de j, de n et de $x_1, \ldots, x_r$, soit

$$x'_i = \varphi^n_{j,i}(x_1, x_2, \ldots, x_r). \tag{4}$$

On peut considérer que les formules (4) définissent des transformations $T^n_j(x) = x'$ des (x) en (x').

On voit facilement que les chaînes (O-M) sont à liaisons complètes, et d'ailleurs leur étude conduit à une équation analogue à (1); mais on voit aussi que : pour qu'une chaîne (O-M) soit une chaîne (A) il suffit que les transformations T^n_j aient des bornes inférieures à un nombre k inférieur à 1 $\Big($c'est-à-dire que les rapports $\frac{|x'_1 - x'_2|}{|x_1 - x_2|}$ restent inférieurs à $k < 1$, quels que soient x_1, x_2, j et n; $|x_1 - x_2|$ désignant la distance, supposée définie dans l'espace des x, de 2 points x_1 et x_2 de cet espace$\Big)$. A la suite de cette remarque, les résultats principaux de MM. Onicescu et Mihoc (*ibid.*, p. 179 et 188) apparaissent alors comme des cas particuliers de notre théorème II (la méthode de ces auteurs permettrait d'ailleurs de démontrer le théorème II); enfin le théorème I complète notablement l'étude des chaînes (O-M).

Pour terminer sur les chaînes (A), signalons que cette notion peut être étendue au cas où les états possibles forment une infinité dénombrable ou continue; et que la définition pourrait être élargie, car il suffit par exemple que la condition (3) soit réalisée par les $P^n_i(c)$ pour une valeur ν quelconque de n.

II. — Les chaînes (B).

Nous allons supposer que les $p_i(c)$ satisfont à la condition

$$|p_i(c' + c_m) - p_i(c'' + c_m)| < \varepsilon_m, \tag{5}$$

c_m désignant un chemin de m états, c' et c'' étant des chemins quelconques, ε_m étant non négatif indépendant de c_m, c' et c'' et tel que

$$\sum_m \varepsilon_m < \infty. \tag{5'}$$

Nous ne pouvons pas étudier complètement le mouvement sous cette hypothèse, ni l'allure asymptotique des $P_i^n(c)$ et nous serons obligés de faire des hypothèses supplémentaires. Mais dès maintenant nous pouvons borner la différence

$$P_i^{(n)}(c'+c_m) - P_i^{(n)}(c''+c_m),$$

$$\begin{aligned} P_i^{(n)}(c'+c_m) &= \sum_{j=1}^{r} p_j(c'+c_m)\, P_i^{(n-1)}(c'+c_m+j) \\ &= \sum_{j=1}^{r} p_j(c''+c_m)\, P_i^{(n-1)}(c'+c_m+j) + \theta r \varepsilon_m, \end{aligned}$$

où $-1 \leqq \theta \leqq 1$. On en déduit par un calcul facile

$$(6) \qquad |P_i^{(n)}(c'+c_m) - P_i^{(n)}(c''+c_m)| < r \sum_{h=n}^{n+m} \varepsilon_h < r \sum_{m=n}^{\infty} \varepsilon_h.$$

Donc dans les conditions (5), (5′) non seulement $p_i(c+c_m)$ dépend très peu du chemin c, mais même la probabilité pour que le système se trouve dans un état donné n épreuves après la réalisation du chemin $c+c_m$ ne dépend que très peu du chemin c et cela uniformément par rapport à n [ceci n'est pas toujours vrai si la condition (5′) n'est pas satisfaite].

Il n'en résulte pas immédiatement que si nous considérons un chemin de longueur finie, mettons $E_i, \ldots, E_{ie} = \Gamma$, la probabilité soit $P_\Gamma^{(n)}(c+c_m)$ pour que ce chemin soit décrit n épreuves après le chemin $c+c_m$, ne dépende que très peu de c pourvu que m soit suffisamment grand. La façon qui nous paraît la plus facile pour démontrer cette dernière propriété sous l'hypothèse (5), (5′) est la suivante. Considérons pour l'instant comme état non plus l'état réalisé par le système à une épreuve mais l'ensemble des états qu'il a pris dans les l épreuves consécutives $n-kl$, $n-kl+1$, ..., $n-kl+l-1$, $(k=0, \pm 1, \pm 2 \pm \ldots,)$. Alors on obtient une nouvelle chaîne qui satisfait aussi à des conditions telles que (5) et (5′) seulement ε_m y est remplacé par $\displaystyle\sum_{i=(m-1)l+1}^{ml} \varepsilon_i$, on en déduit presque immédiatement qu'on peut prendre m suffisamment grand $> M(l, \varepsilon)$ tel que pour tout n

$$|P_\Gamma^{(n)}(c+c_n) - P_\Gamma^{(n)}(c''+c_m)| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il y a un cas particulier où l'on peut prendre $M(l, \varepsilon)$ indépendant de l et où la démonstration est encore plus facile, c'est celui où l'on a pour $m \geqq M$, quels que soient i, c, c' et c_m

$$(7) \qquad p_i(c + c_m) = p_i(c' + c_m)(1 + \theta\varepsilon_m) \qquad (-1 \leqq \theta \leqq 1),$$

$$(7') \qquad 0 \leqq \varepsilon_m \leqq \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=M}^{\infty} \varepsilon_m < \infty.$$

Les chaînes à liaisons complètes satisfaisant à (7) et (7′) seront appelées chaînes (B), ce sont elles que nous étudierons surtout. Pour ces chaînes l'influence explicite sur les probabilités de passage dans une épreuve des états que le système a pris à des épreuves très anciennes est très petite, non seulement quantitativement comme pour les chaînes qui satisfont aux conditions (5) et (5′), mais aussi qualitativement : le rapport des probabilités de passage $\frac{p_i(c+c_m)}{p_i(c'+c_m)}$, s'il n'est pas $0/0$ tend vers 1 si $m \to \infty$. [Pour les chaînes (5) et (5′) il peut arriver que quel que soit m, un certain passage en une épreuve ait avec le même chemin c_m une probabilité tantôt nulle tantôt positive suivant le chemin que le système a décrit avant.]

Alors si $m \geqq M$, le rapport de la probabilité pour que le système décrive après le chemin $c' + c_m$ un chemin de longueur quelconque et de la même probabilité après le chemin $c'' + c_m$, est de la forme $0/0$ ou compris entre

$$\exp.\left\{-\sum_{i=m}^{\infty} \varepsilon_i\right\} \quad \text{et} \quad \exp.\left\{+\sum_{i=m}^{\infty} \varepsilon_i\right\}$$

ce qui est arbitrairement voisin de 1, puisque par hypothèse $\Sigma\varepsilon_m$ converge, et il en résulte sans difficulté que si $m \geqq M$

$$P_\Gamma^{(n)}(c' + c_m) = \sum_{c_n} p_{c_n+\Gamma}(c + c_m) = P_\Gamma^{(n)}(c'' + c_m)(1 + y_m),$$

$$\exp.\left\{-\sum_{i=m}^{\infty} \varepsilon_i\right\} \leqq 1 + y_m \leqq \exp.\left\{\sum_{i=m}^{\infty} \varepsilon_i\right\},$$

en particulier

$$P_i^{(n)}(c' + c_m) = P_i^{(n)}(c'' + c_m)(1 + y'_m).$$

Si ζ désigne un ensemble quelconque de chemins commençant à un instant donné mais étant de longueurs finies ou infinies, alors si $P_\xi^{(n)}(c)$ est la probabilité de parcourir un chemin de ξ à partir de la $n^{\text{ième}}$ épreuve après l'accomplissement des chemins c, on a encore

$$P_\xi^{(n)}(c' + c_m) = P_\xi^{(n)}(c'' + c_m)(1 + y'_m).$$

Nous voyons donc que sous l'hypothèse (5)-(5') la probabilité pour que le système décrive après n épreuves un chemin quelconque de longueur bornée ne dépend qu'arbitrairement peu des états que le système a pris à des épreuves très anciennes par rapport à un chemin connu. Mais nous n'avons point démontré, et pour cause, que l'influence du passé très éloigné soit en telle négligeable, nous avons seulement montré que dans l'influence du passé c'est l'influence du passé moins éloigné qui prévaut par rapport à l'influence du passé plus lointain; et ceci dans l'hypothèse (5) et (5') seulement pour les chemins de longueur finie. Dans l'hypothèse (7) et (7'), par contre, nous pouvons dire que la connaissance du passé récent détermine presque complètement, si ce passé récent est suffisamment large, les probabilités de tout le mouvement futur.

Nous allons dire que le principe ergodique (faible) est applicable, si quels que soient l, les chemins c', c'' et Γ_e de longueur l

$$\lim_{n \to \infty} [P_{\Gamma_e}^{(n)}(c') - P_{\Gamma_e}^{(n)}(c'')] = 0$$

et que le principe ergodique fort est satisfait, si quels que soient les chemins c' et c'', l'ensemble ξ de chemins finis ou infinis

$$\lim_{n \to \infty} [P_\xi^{(n)}(c') - P_\xi^{(n)}(c'')] = 0.$$

Envisageons deux systèmes matériels $S_{c'}$ et $S_{c''}$ ne pouvant prendre que les états $E_1, \ldots, E_r$, évoluant d'une façon réciproquement indépendante et suivant tous les deux la loi de la chaîne à liaisons complètes. Faisons partir ces systèmes à un même instant en supposant que le premier a parcouru avant cet instant le chemin c', le second le chemin c''. Alors, en vertu des équations (6) on voit sans peine [*cf.* W. Doeblin, *Exposé de la théorie des chaînes simples de Markoff à un nombre fini d'états* (en impression, *Rev. math. Union Interbalkan*)], que la condition nécessaire et suffisante pour que le principe ergodique soit satisfait est que ces deux systèmes aient avec probabilité 1 au moins une fois dans le mouvement un contact d'ordre l quels que soient c' et c'' et l. [Cette condition est d'ailleurs nécessaire même pour des chaînes à liaisons complètes qui ne satisfont pas à (5) et (5')].

On montre de même très facilement que si la probabilité pour que les systèmes $S_{c'}$ et $S_{c''}$ aient dans leur mouvement ultérieur au moins une fois un contact d'ordre l est $> \varepsilon > 0$ quels que soient c' et c'', elle est $= 1$. Si $p_i(c)$ est $> a$ pour tout c, alors la probabilité pour que $S_{c'}$ et $S_{c''}$ coïncident dans leur mouvement pendant m épreuves successives est plus grande que la probabilité pour qu'ils prennent dans les m premières épreuves tous les deux m fois l'état E_i, donc, $> a^m$, il résulte d'après ce que nous avons dit que

$$P_c^{n}(c') - P_c^{(n)}(c'') \to 0,$$

et l'on montre sans peine que

$$|P_k^{(n)}(c') - P_k^{(n)}(c'')| < \min_{0<m<n} \left[(1 - a^m)^{\frac{n}{m} - 1} + \sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon_l \right].$$

Sous les hypothèses (7) et (7') il résulte de même que pour n'importe quel ensemble ξ de chemins

$$|P_\xi^{(n)}(c') - P_\xi^{(n)}(c'')| < \min_{0<m<n} \left[(1 - a^m)^{\frac{n}{m} - 1} + \sum_{l=m}^{\infty} \varepsilon_l \right].$$

Supposons qu'à chaque chemin s'arrêtant à la $(n-1)^{\text{ième}}$ épreuve on fasse correspondre une probabilité $P_K^{n-1,n}(c) = p_K^{(n)}(c)$ pour que le système ayant fini le chemin c à la $n-1^{\text{ième}}$ épreuve se trouve à la $n^{\text{ième}}$ épreuve dans E_K, alors $p_K^{(n)}(c)$ définit une chaîne variable à liaisons complètes. Nous désignerons par $P_K^{m,n}(c)$ la probabilité pour que le système ayant fini à l'instant m le chemin c se trouve à l'instant n dans E_K. La condition (5) et (5') sera remplacée par

$$|p_k^{(n)}(c' + c_m) - p_k^{(n)}(c'' + c_m)| < \varepsilon_m,$$
$$\Sigma \varepsilon_m < \infty,$$

ε_m ne dépendant que de m, et (7) (7') par : si $m \geq M$

$$p_k^{(n)}(c' + c_m) = p_k^{(n)}(c'' + c_m)(1 + \theta \varepsilon_m),$$
$$-1 < \theta < 1, \quad 0 < \varepsilon_m < \frac{1}{2}, \quad \Sigma \varepsilon_m < \infty.$$

Alors pour ces chaînes, tout ce qui a été dit plus haut reste valable, le seul changement qu'il faut faire c'est de remplacer $P_\Gamma^{n}(c)$ par $P_\Gamma^{(m, n+m)}(c)$.

Nous étudierons surtout dans la suite des schémas qui satisfont en même temps aux conditions (7) et (7′) et à la condition

$$(8) \qquad \frac{p_k^{(n)}(c)}{p_k^{(m)}(c)} > a > 0 \quad \text{ou} \quad 0/0$$

quels que soient n, m, k et c.

Revenons aux chaînes constantes. Soient $P_\Gamma^{(n)}$ et $p_\Gamma^{(n)}$ le maximum et le minimum de $P_\Gamma^{(n)}(c)$ par rapport à c, on a

$$P_\Gamma^{(n)}(c) = \sum_{j=1}^{r} P_\Gamma^{(n-1)}(c+j)\, p_j(c).$$

Il en résulte

$$P_\Gamma^{(n)} \geqq P_\Gamma^{(n+1)} \geqq \ldots \geqq p_\Gamma^{(n+1)} \geqq p_\Gamma^{(n)}.$$

Donc si le principe ergodique est applicable uniformément par rapport aux chemins initiaux, pour les chaînes constantes

$$P_\Gamma^{(n)}(c) \to P_\Gamma.$$

Nous allons maintenant nous consacrer uniquement aux chaînes (B). Nous pouvons nous arranger de façon à ce que le nombre d'épreuves M qui figure dans la définition des chaînes (B) soit $= 1$. Il suffit pour cela par exemple d'introduire les r^{M} états $A_i = E'_{i_1}, \ldots, E_{i_M}$, la réalisation de A_i à une épreuve signifiant la réalisation à cette épreuve de l'état E_{i_M} sous l'hypothèse que les états réalisés aux $M-1$ épreuves précédentes ont été $E_{i_{M-1}}, \ldots, E_{i_1}$. Sans diminuer la généralité nous pouvons donc supposer que nos chaînes (B) sont telles que le rapport

$$\frac{p_i(c+k)}{p_i(c'+k)}$$

est soit $0/0$ quels que soient c et c', soit compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ quels que soient c et c'. [Une simple sommation permet de passer des probabilités de passage dans ce cas aux probabilités de passage pour les chaînes (B) les plus générales.]

Alors il est facile de mettre en évidence comme pour le cas fini des groupes d'états $\mathcal{G}_\alpha$ $\mathcal{G}_\gamma$ que nous appellerons groupes finals jouissant des propriétés suivantes : Le système ne peut pas quitter le groupe final dans lequel il est amené, il passe presque sûrement une infinité de fois par chaque état de ce groupe final. Quel que soit le chemin initial, la probabilité pour que le système se trouve encore à la $n^{\text{ième}}$ épreuve à l'extérieur des groupes finals tend vers zéro si $n \to \infty$ (uniformément par rapport au chemin initial comme $Ke^{-\lambda n}$).

Il résulte immédiatement de l'analyse des chaînes simples que les états d'un groupe final $\mathcal{G}_\beta$ se divisent en sous-groupes disjoints $\overline{1(\beta)}, \ldots, \overline{d(\beta)}$ $[d(\beta) \geq 1]$, dits encore sous-groupes cycliques, qu'on peut ranger dans un ordre circulaire tel que le système se trouvant dans $\mathcal{G}_\beta$ passe en chaque épreuve cycliquement d'un sous-groupe cyclique au suivant.

Si $E_j \varepsilon \overline{l'(\beta)}$ et $E_K \varepsilon \overline{l(\beta)}$, alors

$$P_k^{(n)}(c+j) = 0 \quad \text{si } n \not\equiv l - l' \quad [\text{mod. } d(\beta)],$$
$$P_k^{(n)}(c+j) \to P_k \quad \text{si } n \equiv l - l' \quad [\text{mod. } d(\beta)].$$

Si c est quelconque, soit $\text{Pr.}[c, \rho(\beta)]$ la limite $(\nu \to \infty)$ de la probabilité pour que le système se trouve $\nu d(\beta)$ épreuves après le chemin c dans $\overline{\rho(\beta)}$, alors nous avons les formules

$$P_k^{(n)}(c) \to 0 \qquad \text{si } E_k \overline{\in} \Sigma G_\beta,$$
$$P_k^{(n)}(c) \approx \text{Pr.}[c, l_n(\beta)] P_k \qquad \text{si } E_k \in l(\beta),$$

$\overline{l_n}$ est le sous-groupe cyclique de $\mathcal{G}_\beta$, déterminé par

$$n \equiv l - l_n \quad [\text{mod. } d(\beta)]$$

et $P_K^{(n)}(c)$ converge en moyenne de Cesarò vers 0 si $E_K \overline{\in} \Sigma \mathcal{G}_\beta$, vers $\text{Pr.}[c, \mathcal{G}_\beta] \dfrac{P_K}{d(\beta)}$ si $E_K \in \mathcal{G}_\beta$, où

$$\text{Pr.}[c, \mathcal{G}_\beta] = \sum_{\rho=1}^{d(\beta)} \text{Pr.}[c, \rho(\beta)]$$

est la probabilité pour que le système passe du chemin c dans $\mathcal{G}_\beta$.

Pour les chaînes variables à liaisons complètes satisfaisant à la condition (7), (7') et à (8), les formules ci-dessus sont remplacées par :

$$\text{si } E_j \in \overline{l'(\beta)} \quad \text{et} \quad E_k \in \overline{l(\beta)},$$
$$P_k^{m,n}(c+j) = 0 \quad \text{si } n - m \not\equiv l - l' \quad [\text{mod. } d(\beta)],$$
$$P_k^{m,n}(c+j) = P_k^{(n)} + \varepsilon_k^{(m,n)}(c+j) \quad \text{si } n - m \equiv l - l' \quad [\text{mod. } d(\beta)],$$

où

$$\Sigma P_k^{(n)} = 1 [E_k \in \overline{l(\beta)}] \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^{(m,n)}(c+j) \to 0 \quad \text{si } n-m \to \infty.$$

Si $P_r^{(m)}[c, \rho(\beta)]$ est la limite $(\nu \to \infty)$ de la probabilité pour que le système qui a fini à la $m^{\text{ième}}$ épreuve, le chemin c se trouve $\nu d(\beta)$ épreuves après dans $\rho(\beta)$, alors

$$P_k^{m,n}(c) = \text{Pr.}^{(m)}[c, l_{n-m}(\beta)] P_k^{(n)} + \varepsilon_k^{n,m}(c) \qquad \text{si } E_k \in \overline{l(\beta)},$$
$$P_k^{m,n}(c) \to 0 \qquad \text{si } E_k \overline{\in} \Sigma G_\beta.$$

Attachons maintenant à chaque état un nombre X_i. Soit $X_c^{(n)}$ la variable aléatoire égale à X_i si le système se trouve n épreuves après le chemin c dans E_i.

$$S_c^{(n)} = X_c^{(1)} + X_c^{(2)} + \ldots + X_c^{(n)}.$$

Alors un calcul simple montre que

$$\frac{M[S_c^{(n)}]}{n} \to \sum_\alpha \text{Pr.}[c, G_\alpha] M_\alpha,$$
$$M_\alpha = \frac{1}{d(\alpha)} \Sigma P_k X_k \qquad (E_k \in G_\alpha).$$

Si l'état $E_j \in \mathcal{G}_\alpha$, alors

$$\frac{M[S_{c+j}^{(n)}]}{n} \to M_\alpha,$$
$$M[S_{c+j}^{(n)} - M_\alpha n]^2 = o(n^2).$$

Donc $\frac{S_{c+j}^{(n)}}{n} \to M_\alpha$ stochastiquement au sens de Bernoulli et par conséquent

$$\frac{S_c^{(n)}}{n} \to S_c.$$

S_c étant une variable aléatoire égale à M_α avec probabité $P_r[C, \mathcal{G}_\alpha]$.

Note sur une équation fonctionnelle.

Considérons un ensemble e distancié, fermé, compact, borné, séparable, composé d'objets quelconques x; soit $x' = \varphi(x)$ ou plus brièvement φ, une transformation définie sur cet ensemble; nous disons que φ est bornée par $m (> 0)$, si l'on a quels que soient x_1 et x_2, $\Delta(x'_1, x'_2) \leq m \Delta(x_1, x_2)$, $[\Delta(x_1, x_2)$ désignant d'une façon générale la distance des deux points $x_1, x_2]$.

Considérons maintenant l'espace $C'^{(1)}$ des fonctions $f(x)$ définies sur e et telles que $|f(x)|$ et $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{\Delta(x_1, x_2)}$ admettent respectivement des bornes supérieures finies, $M(f)$ et $m(f)$, lorsque x, x_1 et x_2 varient dans e. L'espace $C'^{(1)}$ est un espace mesurable (B), que nous normerons en posant

$$\text{norme de } f = \|f\| = M(f) + m(f).$$

Il doit être entendu que toutes les fonctions qui interviennent dans la suite appartiennent à l'espace $C'^{(1)}$.

Soient alors r fonctions $a_i(x)[i=1, 2, \ldots, r]$, telles que

$$\sum_i M(a_i) \leqq 1,$$

et r transformations $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ bornées par un nombre $k < 1$. La formule

$$\boxed{f'(x) = \sum_i a_i(x) f[\varphi_i(x)] = U(f)} \tag{1}$$

définit une opération linéaire continue dans l'espace $C'^{(1)}$. On a en effet

$$M(f') \leqq M(f) \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned} f'(x_1) - f'(x_2) &= \sum_i a_i(x_1) f[\varphi_i(x_1)] - \sum_i a_i(x_2) f[\varphi_i(x_2)] \\ &= \sum_i a_i(x_1) \{ f[\varphi_i(x_1)] - f[\varphi_i(x_2)] \} \\ &\quad + \sum_i [a_i(x_1) - a_i(x_2)] f[\varphi_i(x_2)] \end{aligned}$$

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| \leqq m(f)\, k\, \Delta(x_1, x_2) + M(f) \sum_i m(a_i) \Delta(x_1, x_2),$$

d'où

$$m(f') \leqq k\, m(f) + \rho M(f). \tag{3}$$

en posant

$$\rho = \sum_i m(a_i).$$

L'opération $f' = \mathrm{U}(f)$, qui est évidemment linéaire, est continue d'après (2) et (3).

Nous nous proposons d'étudier $\mathrm{U}(f)$, par la même méthode qui a permis à M. F. Riesz ([1]) d'étudier les opérations complètement continues, et bien que $\mathrm{U}(f)$ ne le soit pas.

Soit ε un nombre positif assez petit pour que $\frac{1}{k} - \varepsilon$ soit > 1. Dans ce qui suit, λ est supposé de module $\leqq \frac{1}{k} - \varepsilon$; posons

$$k' = \left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right) k < 1, \qquad \rho' = \rho\left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right);$$

et considérons l'opération $\lambda \mathrm{U}(f)$; pour elle, (2) et (3) sont remplacées par

$$(2') \qquad \mathrm{M}(f') \leqq |\lambda| \mathrm{M}(f),$$

$$(3') \qquad m(f') \leqq k' m(f) + \rho' \mathrm{M}(f).$$

Lemme I. — *Les solutions non nulles de l'équation homogène*

$$(5) \qquad \mathrm{V}(f \mid \lambda) = f - \lambda \mathrm{U}(f) = 0$$

forment une variété linéaire à un nombre fini de dimensions.

Soit en effet f une solution non nulle de (5) telle que $\mathrm{M}(f) = 1$, on a, d'après (3'),

$$m(f) \leqq k' m(f) + \rho',$$

d'où

$$(6) \qquad m(f) \leqq \frac{\rho'}{1 - k'}.$$

Donc de toute suite bornée de solution de (5), on peut extraire, d'après un théorème d'Arzela, une suite uniformément convergente. Ces solutions forment visiblement une variété linéaire dans l'espace B des fonctions bornées : toute partie bornée de cette variété étant compacte, celle-ci n'a qu'un nombre fini de dimensions, d'après un théorème de M. Riesz (*ibid.*, p. 78).

([1]) Dans un Mémoire des *Acta Mathematica*, t. 41, 1918, p. 72.

Lemme I'. — *Les solutions non nulles de l'équation*

$$V^n(f\,|\,\lambda) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

forment une variété linéaire d'un nombre fini de dimensions.

Nous avons vu que pour $n = 1$, les solutions f de $V^n(f\,|\,\lambda) = 0$ sont telles que $m(f)$ soit borné par un nombre fini indépendant de la solution considérée, pourvu que $M(f) = 1$; supposons qu'il en soit de même pour $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = p$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre A tel que l'on ait $m(f) \leqq A$, si l'on a

$$V^n(f\,|\,\lambda) = 0 \qquad (n \leqq p) \qquad \text{et} \qquad M(f) = 1,$$

nous disons qu'il existe alors un nombre A' tel que l'on ait $m(f) \leqq A'$, si l'on a

$$V^{p+1}(f\,|\,\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad M(f) = 1.$$

Soit f_1 en effet une solution de $V^{p+1}(f\,|\,\lambda) = 0$, telle que $M(f) = 1$; en posant $V(f_1\,|\,\lambda) = -f_2$, on a $V^p(f_2\,|\,\lambda) = 0$, d'ailleurs $M(b_2) \leqq 1 + |\lambda|$ d'après $(2)'$, donc, comme par hypothèse, $m\left(\dfrac{f_2}{M(f_2)}\right) \leqq A$, on a

$$m(f_2) \leqq A[1 + |\lambda|] \leqq A\left\{1 + \frac{1}{k} - \varepsilon\right\} = A_1$$

(et cela même si $f_2 = 0$).

Mais on a, d'après $(3')$,

$$m(f_1 + f_2) \leqq k' m(f_1) + \rho'.$$

Alors, ou bien

$$m(f_1) \leqq m(f_2) \leqq A_1;$$

ou bien

$$m(f_1) > m(f_2),$$

mais alors on a

$$m(f_1 + f_2) \geqq m(f_1) - m(f_2);$$

d'où

$$m(f_1) - m(f_2) \leqq k' m(f_1) + \rho'$$

ou

$$m(f_1) \leqq \frac{\rho' + A_1}{1 - K'}.$$

Et de toute façon, en prenant A' supérieur à $\dfrac{\rho' + A_1}{1 - k'}$, $m(f_1) \leqq A'$. Le lemme I' s'établit alors aisément.

On peut appeler $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ les variétés linéaires à un nombre fini de dimensions constituées par les solutions non nulles des équations $V'(f|\lambda)=0, \ldots, V^n(f|\lambda)=0, \ldots$; on a évidemment : $L_n \leqq L_{n+1}$; mais on a aussi :

Lemme II. — *Si* $|\lambda|=1$, *il existe un entier positif ou nul* ν *tel que l'on ait*

$$L_n = L_{n+1} \quad \text{pour} \quad n>\nu; \qquad L_n < L_{n+1} \quad \text{pour} \quad n \leqq \nu.$$

Dans le cas contraire, en effet, on pourrait déterminer une suite infinie de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$M(f_n)=1; \qquad f_n < L_n; \qquad f_n \text{ extérieure à } L_{n-1};$$
$$M(f_n - f(\geqq \frac{1}{2} \text{ pour tout } f < L_{n-1}.$$

Posons $\lambda U(f_n) = f_n + f'_n$; f'_n fait partie de L_{n-1} car

$$V^{n-1}(f'_n|\lambda) = V^n(f_n|\lambda) = 0;$$

et f'_n est non nulle sans quoi f_n ferait partie de L_1 ; on voit alors que d'une façon générale l'opération $\lambda^p U^p(f_n)$ transforme f_n en $f_n + f_n^p$ où f_n^p appartient à L_{n-1}.

Observons que la formule (3') peut s'écrire

$$m(f') - \frac{\rho' M(f)}{1-k'} \leqq k' \left\{ m(f) - \frac{\rho' M(f)}{1-k'} \right\},$$

on en déduit aisément, en tenant compte de ce que $|\lambda|=1$, que l'on peut donner à p une valeur p_n telle que

$$m(f_n + f_n^{p_n}) \leqq \frac{\rho'}{1-k'} + \eta,$$

η nombre positif d'ailleurs aussi petit qu'on le veut. Alors, d'après le théorème d'Arzela, la suite des fonctions $(f_n + f_n^{p_n})$ est compacte, dans l'espace B, soit $n_1, n_2, n_q, \ldots$ une suite d'indices telle que la suite $f_{n_q} + f_{n_q}^{p_{n_q}}$ converge : $M\left\{f_{n_{q+1}} + f_{n_{q+1}}^{p_{n_{q+1}}} - f_{n_q} - f_{n_q}^{p_{n_q}}\right\}$ doit donc tendre vers 0, or $\left(f_{n_{q+1}}^{p_{n_{q+1}}} - f_{n_q} - f_{n_q}^{p_{n_q}}\right)$ appartient à $L_{n_{q+1}} - 1$, cela est donc impossible.

Lemme III. — *Si* $|\lambda|=1$, *et si l'équation* $V(f|\lambda)=g$ *a une solution quel que soit* g, *cette solution est unique.*

La démonstration est la même que celle du théorème III de M. Riesz (*ibid.*, p. 82).

Lemme IV. — *Il existe une constante* C *indépendante de* g, *telle que l'une au moins des solutions de l'équation* $V(f \mid \lambda) = g$, *s'il y a des solutions, satisfasse à la condition* $\|f\| \leqq C\|g\|$.

Désignons par f^* une solution de $V(f \mid \lambda) = g$ telle que $M(f^*) \leqq M(f^* - f)$ pour $V(f \mid \lambda) = 0$: on sait que f^* existe toujours si $V(f \mid \lambda \mid) = g$ admet une solution. Il faut démontrer que le rapport $\frac{\|f^*\|}{\|g\|}$ admet une borne supérieure finie C; si cela n'était pas, on pourrait trouver une suite $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ avec des solutions correspondantes $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*, \ldots$ telles que $\frac{\|f_n^*\|}{\|g_n\|}$ tende vers l'infini; on peut d'ailleurs supposer que $\|g_n\|$ reste bornée, alors $\|f_n^*\|$ croît indéfiniment; $\|f_n^*\| = M(f_n^*) + m(f_n^*)$; en négligeant au besoin une partie des g_n, on peut se ramener à l'un ou l'autre des deux cas suivants :

Premier cas. — $M(f_n^*)$ croît indéfiniment; posons $f_n = \frac{f_n^*}{M(f_n^*)}$; on a

$$\lambda U(f_n) = f_n + \frac{g_n}{M(f_n^*)};$$

si $m(f_n)$ reste bornée, on peut extraire de la suite des f_n une suite convergente vers une limite f non nulle (puisque $M(f_n) = 1$) et telle que $\lambda U(f) = f$, puisque $\frac{g_n}{M(f_n^*)}$ tend vers o, on aurait donc

$$M(f_n^*) \leqq M[f_n^* - f M(f_n^*)],$$

d'où

$$1 = M(f_n) \leqq M[f_n - f],$$

ce qui n'est pas possible, car $M(f_n - f)$ doit pouvoir tendre vers o; si $m(f_n)$ ne reste pas borné, on peut supposer que $m(f_n)$ croît indéfiniment; on a, d'après (3')

$$m(f_n) - m\left[\frac{g_n}{M(f_n^*)}\right] \leqq m\left[f_n + \frac{g_n}{M(f_n^*)}\right] \leqq k' m(f_n) + \rho'.$$

D'où, en divisant par $m(f_n)$, $1 \leqq k' + \varepsilon_n$, où ε_n tend vers o : ce qui est impossible.

Deuxième cas. — $M(f_n^*)$ reste bornée, mais $m(f_n^*)$ n'est pas bornée : on retombe encore dans l'impossibilité $1 \leqq k' + \varepsilon_n$.

A partir de ce moment on peut continuer comme M. Riesz; on montre en particulier que $U(f)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs singulières de module égal à 1, en raisonnant à peu près comme pour le lemme II. Et en utilisant le fait que les valeurs singulières d'une opération linéaire continue forment un ensemble fermé, on démontre que :

Théorème. — *L'opération* $U(f)$ *est la somme d'un nombre fini d'opérations linéaires complètement continues*

$$U_1(f), \ldots, U_p(f),$$

n'admettant chacune qu'une seule valeur singulière, de module égal à 1; *et d'une opération linéaire* $U'(f)$ *dont toutes les valeurs singulières sont de module supérieur à un nombre* $h > 1$, $U_1, \ldots, U_p$, U' *sont deux à deux orthogonales.*

L'étude de $U(f)$, et de la relation de récurrence $f^{n+1} = U(f^n)$ s'achève alors par des procédés classiques.