BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LUCAS

Théorème sur la géométrie des quinconces

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 9-10

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__9_1>

Théorème sur la Géométrie des Quinconces;
par M. Édouard Lucas.

(Séance du 7 novembre 1877.)

Les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier.

En effet, on observera d'abord que, si l'on considère l'échiquier comme indéfini dans tous les sens, le centre d'une case, l'un de ses sommets, ou le milieu de l'un de ses côtés, est toujours un centre de symétrie. Cela posé, désignons par A, B, C les centres de trois cases, et supposons-les situés aux sommets d'un triangle équilatéral; le milieu de la ligne BC est évidemment placé sur l'un des centres de symétrie de l'échiquier; par conséquent, le point D, symétrique du point A par rapport à la droite BC, ou, ce qui revient au même, par rapport à son milieu, est aussi le centre d'une case. Dans le triangle isoscèle ABD, on a d'ailleurs

$$\overline{AD}^2 = 3\overline{AB}^2;$$

mais, d'après la nature de l'échiquier, on a

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2, \quad \overline{AD}^2 = c^2 + d^2,$$

a, b, c, d désignant des nombres entiers. On aurait donc

$$c^2 + d^2 = 3(a^2 + b^2),$$

et par suite le nombre 3 diviserait une somme de deux carrés, ce qui est impossible, puisque ce nombre n'est pas lui-même une somme de deux carrés.

Il en résulte que le système des équations indéterminées

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

ou le système

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 2(ux + vy),$$

est impossible à résoudre en nombres entiers ou fractionnaires. Nous montrerons ultérieurement comment on peut, par la géométrie des quinconces, démontrer ces deux théorèmes d'Arithmétique :

1° Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés.

2° Tout diviseur d'une somme de deux carrés premiers entre eux est une somme de deux carrés.

Remarque. — Il est facile dans l'espace, pour un échiquier cubique formé de cubes égaux et juxtaposés, de trouver, et d'une infinité de manières, trois ou six cubes dont les centres soient disposés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier, ou quatre cubes dont les centres soient disposés aux sommets d'un tétraèdre régulier.