BULLETIN DE LA S. M. F.

M. CHARPENTIER

Sur quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 193-224
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__193_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES DE M. BIRKHOFF;

PAR M^lle M. CHARPENTIER.

1. Le but de cet article est d'exposer quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff (Mémoire paru dans cette même publication, t. 40, 1932, p. 1), et surtout d'établir la propriété suivante : *Une courbe de M. Birkhoff est un continu indécomposable*, propriété qui ne suit pas immédiatement, comme il pourrait le sembler au premier abord, la suivante : *Une courbe* C *n'a pas de point accessible de ses deux domaines complémentaires*, ce qui, d'après M. Whyburn (¹), entraîne celle-ci : *Elle ne peut être décomposée en deux ensembles par l'ablation d'aucun couple de ses points*, cette propriété étant alors tout à fait insuffisante pour établir notre résultat.

Je rappelle d'abord quelques-unes des propriétés de ces courbes :

1° $\mathcal{C}$ est une courbe fermée, c'est-à-dire un ensemble de mesure nulle (²) séparant le plan en deux régions;

2° Toute la courbe $\mathcal{C}$ reste invariante par une certaine transformation analytique T_ε;

3° Les points radialement accessibles (c'est-à-dire accessibles de O suivant un rayon) restent radialement accessibles par itération de T_ε^{-1};

4° Les points accessibles de l'intérieur ont pour coefficient de rotation par T_ε, τ_i et les points accessibles de l'extérieur τ_e, τ_i et τ_e ont des *valeurs différentes*. Il en résulte qu'aucun point ne peut être accessible à la fois de l'intérieur et de l'extérieur;

5° $\mathcal{C}$ est roulée à gauche, c'est-à-dire que tout point accessible de l'intérieur est accessible de O par une courbe dont la tangente

---

(¹) *Monatshefte für Math. und Physik*, Bd 37, p. 305.

(²) Une courbe fermée n'est pas toujours de mesure nulle, bien entendu.

en un point P fait avec la direction radiale $\overrightarrow{OP}$ un angle supérieur au nombre positif d, sauf peut-être à son extrémité.

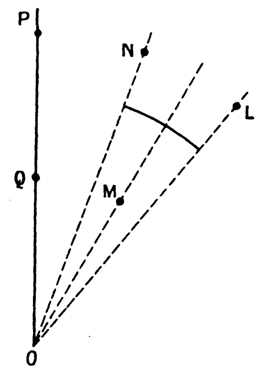
Nous étudierons d'abord l'ensemble des points radialement accessibles, les résultats obtenus nous permettront d'explorer les boucles de la courbe à l'aide des courbes Λ (voir plus loin leur définition) dont le nombre de tours autour de l'origine ne pourra pas être borné ; d'où sera déduite l'existence de bouts premiers contenant entièrement la courbe et, par conséquent, celle-ci devra être identique à un continu indécomposable (le cas de deux continus doit même être écarté).

1° Ensemble des points radialement accessibles.

2. Appelons K l'ensemble des points radialement accessibles, $\overline{K}$ désignera, comme d'habitude, la somme $K + K'$. L'ensemble des rayons issus de O et terminés aux points de K est un ensemble fermé $\mathcal{K}$.

a. Si l'ensemble des points limites de K *situé sur un rayon r contient deux points* P *et* Q *limites d'un même côté de points*

Fig. 1.



de K *le segment* PQ *appartient à la courbe (mais pas nécessairement à la fermeture de l'ensemble des points radialement accessibles).*

En effet, soient des points $R_1, R_2, \ldots, R_j, \ldots$ de K tendant vers P, des points $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ de K tendant vers Q, on peut, arbitrairement près de PQ, trouver un point M de la suite S_i dont le rayon OM soit entre les rayons ON et OL limités en deux points N et L de la suite R_j.

Il existe alors sur tous les cercles de centre O de rayon ρ,

$$\min(\mathrm{ON}, \mathrm{OL}) > \rho > \mathrm{OM},$$

au moins un point de la courbe C, situé entre les rayons ON et OL, sinon un tel cercle formerait avec ON et OL une courbe fermée sans points communs avec $\mathcal{C}$ mais possédant à son intérieur et à son extérieur des points de $\mathcal{C}$, ce qui est impossible puisque $\mathcal{C}$ est un continu (seule cette propriété de $\mathcal{C}$ intervient ici). Donc tout point de PQ est limite de points de $\mathcal{C}$ et appartient à $\mathcal{C}$.

3. *Les points d'un rayon r limites des points de* K *situés à droite de r se réduisent à un point.*

Soient S_1 et S_2 deux points jouissant de cette propriété, le segment S_1S_2 appartient à la courbe, prenons pour S_1 le point le plus près de O et pour S_2 le point le plus éloigné de O, qui sont limites de points radialement accessibles situés à droite de r, et considérons un rayon s, à droite de r, faisant avec r un angle α, soit M son point radialement accessible, on peut joindre S_1 à OM par un arc intérieur à la courbe et situé au-dessous de tous les points de K situés entre OM et OS_1, soit S_1L cet arc, l'arc $OL + LS_1$ qui joint O à S_1 peut être choisi aussi voisin de OS_1 que l'on veut; S_1 sera appelé dans la suite un point *presque radialement accessible*.

Soit un point intérieur T assez près de S_2; c'est-à-dire que dans le plan des coordonnées r, θ on a

$$|r(T) - r(S_2)| < \varepsilon,$$
$$\theta(S_2) - \theta(T) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut encore choisir ce point T entre des rayons dont les points radialement accessibles U et V tendent vers S_1 c'est-à-dire

$$|r(S_1) - r(U)| < \varepsilon,$$
$$|r(S_1) - r(V)| < \varepsilon,$$

et

$$\theta(S_1) - \theta(U) < \varepsilon$$

avec

$$\theta(S_1) > \theta(V) > \theta(T) > \theta(U),$$

on peut joindre UT et UV par des arcs intérieurs à la courbe sans points communs et au-dessous de tout point de K, car nous avons pu choisir OT au-dessous de K par hypothèse ; ainsi le quadrilatère curviligne OUTV ne possède à son intérieur aucun point de la courbe et sur sa frontière les seuls points U et V.

Nous utiliserons le lemme suivant :

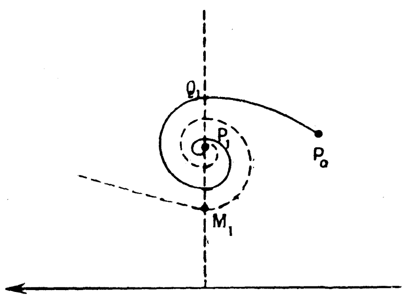
Lemme. — *Si une courbe tournée régulièrement à gauche d'un angle toujours supérieur à un nombre positif fixe d, va d'un point de coordonnées* $(\theta_0 r_0)$ *à un point de coordonnées* $(\theta_1 r_1)$ *sans que son abscisse reprenne la valeur* θ_0 *on a* [*dans le plan des coordonnées* (r, θ) *avec l'axe des* θ *orienté de droite à gauche*] :

$$\frac{r_1 - r_0}{\theta_1 - \theta_0} < \cot d,$$

le lemme est évident d'un point P_0 à un point P_1 si l'angle de la courbe avec le rayon ne dépasse pas π.

Supposons maintenant que cette courbe affecte la forme

Fig. 2.



ci-dessus ; il existe alors un point de $P_1 P_0$, soit Q_1 dont l'ordonnée R_1 est supérieure à r_1 et pour Q_1 l'on a évidemment

$$\frac{R_1 - r_0}{\theta_1 - \theta_0} < \cot d.$$

d'où, *a fortiori*,

$$\frac{r_1 - r_0}{\theta_1 - \theta_0} < \cot d.$$

Si cette figure se reproduit plusieurs fois de P_0 à P_k on écrira l'inégalité pour chaque P_0Q_1, M_1Q_2, ..., et l'on aura à additionner

$$\frac{R_1 - r_0}{\theta_1 - \theta_0} < \cot d,$$

$$\frac{R_2 - r_1}{\theta_2 - \theta_1} < \cot d,$$

$$\frac{r_k - r_{k-1}}{\theta_k - \theta_{k-1}} < \cot d;$$

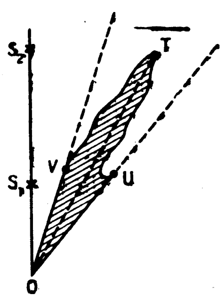
d'où

$$r_k - r_0 + \{(R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) + \dots\} < \cot d(\theta_k - \theta_0),$$

à condition naturellement que r_k soit le premier point d'abscisse θ_k; comme la partie entre crochets est positive nous avons immédiatement le résultat désiré (qui est d'ailleurs presque évident, mais je désire insister sur les détails).

Revenons maintenant au quadrilatère OUTV.

Fig. 3.



T *doit être accessible par une courbe régulièrement tournée à gauche, sauf peut-être à son extrémité, puisque* T est un point intérieur à la courbe.

Soit J une courbe régulièrement tournée à gauche allant de O à T.

Nous faisons de suite quelques remarques sur J.

I. J *ne peut aller de l'arc* UOV *à l'arc* UTV *à l'extérieur du* *quadrilatère* puisque si nous appelons LM un tel arc de J, les points M et L peuvent être joints à l'intérieur du quadrilatère par un arc simple intérieur à la courbe $\mathcal{C}$, la courbe de Jordan formée par les deux arcs LM séparerait les points U et V et ne rencontrerait pas $\mathcal{C}$, ce qui est évidemment impossible.

II. J *ne peut aller de* OU *à* OV (*et réciproquement*) *qu'en passant par* OS_1. Elle ne peut en effet passer au-dessus de S_2, car elle séparerait encore $\mathcal{C}$ en deux parties et elle ne peut aller de OU à OV en enfermant UTV à son intérieur, car alors une courbe de Jordan intérieure à $\mathcal{C}$ contiendrait $\mathcal{C}$ tout entière à son intérieure!

Considérons maintenant J à partir de son point de départ O. Nous prenons comme sens positif des θ le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre; il y a deux cas possibles :

a. J est au début située dans l'angle $\widehat{OS_1, OU}$ (OS_1 compris), sont alors possibles les cas suivants :

1° J va jusqu'à un point L de OU;

2° J va passer au-dessous de S_1, mais pour cela elle passe au-dessus de UTV et alors la courbe fermée $OS_1 + J$ intérieure à $\mathcal{C}$ contient U et V à son intérieur, ce qui est impossible;

3° J va passer au-dessus de OS_2, mais alors elle a dû passer au-dessus de UTV, elle doit donc revenir sur ses pas en passant encore au-dessus de S_2 car il lui est impossible de rencontrer OS_1 et comme elle ne peut rencontrer OS_1 ni OVTU (propriétés I et II) elle doit nécessairement aboutir en un point de OU avec un angle α avec le rayon $d \leqq \alpha \leqq \pi$ puisqu'elle vient de l'extérieur.

Donc tout se ramène au cas 1°.

Il vient maintenant :

b. J est au début dans l'angle $\widehat{OU, OS_1}$ (OU compris), elle peut alors, tout en restant à gauche de OU :

1° Aller à T;

2° Aller au-dessus de S_2;

3° Aller passer par OS_1, mais dans ce dernier cas si J est dans OUTV elle doit en sortir par OV, soit L son premier point avec OS_1, si avant L, J n'est pas passé au-dessus de T elle se trouve dans la même situation que si elle avait débuté dans $\widehat{OS_1, OU}$ et l'on est ramené au cas a sinon elle est passée au-dessus de T.

Le raisonnement est le même si au lieu du début de J dans $\widehat{OU, OS_1}$ on a un point de J sur OU avec un angle α : $0 < \alpha < \pi$.

Ainsi, quelle que soit la forme de J elle a au moins un arc partant d'un point A de OU et allant à un certain point Γ en restant à gauche du rayon de OU, ce point Γ pouvant être suivant les cas : T, un point au-dessus de T, un point au-dessus de S_2, on a donc en tout cas :

$$r_\Gamma - r_A > r_T - r_U - \varepsilon$$

et

$$\theta_\Gamma - \theta_A < \theta S_1 - \theta_U$$

ou

$$\frac{r\Gamma - rA}{\theta\Gamma - \theta A} > \frac{rT - rU - \varepsilon}{\theta S_1 - \theta U}.$$

Or on peut choisir T et U de façon à avoir simultanément

$$rT - rU > \frac{S_1S_2}{2} + \varepsilon$$

et

$$\theta S_1 - \theta U < \frac{S_2S_1}{4\cot d}$$

et il vient

$$\frac{r\Gamma - rA}{\theta\Gamma - \theta A} > \frac{S_1S_2}{2} \times \frac{4\cot d}{S_1S_2} > 2\cot d,$$

ce qui est impossible d'après le lemme.

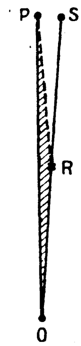
Donc notre hypothèse que S_1 et S_2 sont distincts est inadmissible.

4. ***L'ensemble des points limites des points de K situés à gauche du rayon r se réduit au point accessible de r.***

Soient R le point radialement accessible de R et un point S de $\overline{K}$ qui serait différent de R sur r.

On peut alors trouver un point radialement accessible P assez voisin de S pour que la droite presque verticale RP (dans le plan des coordonnées $r\theta$) se change par T_ε^{-1} en une ligne tournée à droite, OP et OR deviennent aussi des lignes tournées à droite, et R et S restent radialement accessibles. Nous garderons les

Fig. 4.

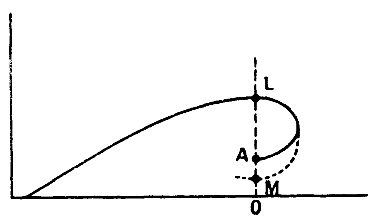


mêmes noms aux transformés des points OPRS et nous les considérerons exclusivement dans le plan $r\theta$.

Lemme [1]. — *Une ligne intérieure à $\mathcal{C}$, tournée à droite, aboutissant en un point radialement accessible* A, *n'a aucun autre point commun avec* OA ($O \leq r \leq OA$, $\theta = \theta_A$).

En effet soit M un tel point. Avant d'atteindre M, J, la courbe considérée passera avant M, en un point L de la verticale de A au-

Fig. 5.



dessus de A, sinon A ne serait jamais atteint ultérieurement; soit M_0 le premier point de OA sur J à partir de L, l'arc OLM_0 augmenté du rayon OM_0 (ou s'il est nécessaire on limite J non à O

[1] Cette propriété est utilisée par M. Birkhoff comme beaucoup d'autres ci-dessus.

mais à son premier point, à partir de L, avec OA dans le sens $\overline{M_0 L}$) forme une courbe fermée qui contient nécessairement A et en effet dans le cas contraire J qui sortirait de la courbe fermée formée, par le point le plus bas de l'intersection de J et de OA, devrait atteindre A situé au-dessus de lui sur la même verticale, ce qui est impossible.

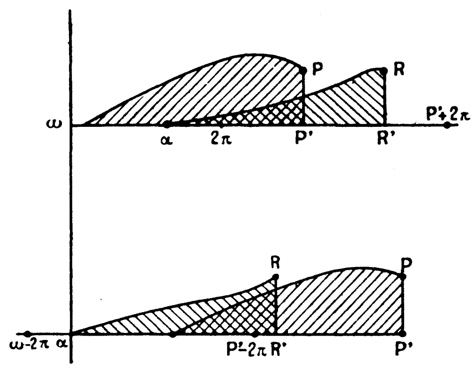
Mais l'hypothèse de la courbe fermée contenant A, tout en étant intérieure à $\mathcal{C}$, est évidemment inadmissible.

Ainsi, puisqu'il s'agit maintenant de représenter les deux courbes tournées à droite OP, OR, qui sont disjointes, nous utilisons le lemme et nous remarquons que R est extérieur à la courbe fermée formée par OP + rayon OP et réciproquement.

Voyons ce qui se passe dans le plan $r\theta$, étant donnée la représentation de OP les points α R' ne peuvent tomber tous deux sur $\omega P'$, non plus que sur le segment $\omega + 2\pi$, $P' + 2\pi$ et réciproquement.

On peut toujours prendre α sur $\omega P'$ tel que $\omega\alpha < 2\pi$, il en

Fig. 6.



résulte que R' sera sur le segment $P', P' + 2\pi$ il ne peut être au delà de $P' + 2\pi$ car le segment $\omega + 2\pi$, $P' + 2\pi$ serait alors sur le segment $\alpha R'$, ce qui est impossible. On a donc les cas de figures ci-dessus.

Il s'agit maintenant de représenter RP, c'est une ligne *tournée à droite* qui va de R à P. En considérant les figures ci-dessus, on voit que dans le premier cas il lui est impossible d'aller de R à P sans rencontrer αR et dans le second cas qu'il lui est sans doute possible d'atteindre P mais en laissant à sa droite l'aire limitée par $x\omega$PR, donc en changeant l'orientation du triangle OPR, ce qui est également impossible.

5. *Tout point de $\mathcal{C}$ situé sur un rayon de $\mathcal{K}$ est radialement accessible ou presque radialement accessible.*

Soit R un tel point. Comme on a vu ci-dessus tous les points de K à droite du rayon tendent vers un point unique S, au-dessus de R évidemment.

Par conséquent on peut trouver un rayon OT assez voisin de OR pour que tout point de C, contenu dans l'angle SOT, soit contenu dans un cercle de centre S de rayon $\frac{RS}{2}$ [RS est fixe], alors le cercle de centre O de rayon OR joindra R à OT *en* U *sans rencontrer* $\mathcal{C}$ et R sera accessible de O par la ligne presque radiale OUR. Nous dirons que R est *presque radialement accessible*, car la ligne OUR peut être choisie arbitrairement près de OR. R est évidemment accessible.

Donc tous les points de $\mathcal{C}$ qui appartiennent à $\mathcal{K}$ sont des points accessibles : *radialement accessibles* ou *presque radialement accessibles*.

L'ensemble des rayons sur lesquels $\overline{\mathrm{K}}$ *ne se réduit pas au point accessible est au plus dénombrable.*

Si nous considérons le point radialement accessible sur un rayon, comme donné par sa distance r à O; r est une fonction de θ [angle de r avec une origine quelconque] qui, semi-continue inférieure pour un continu quelconque, n'admet ici que des discontinuités de première espèce d'après ce qui a été démontré plus haut, donc au plus une infinité dénombrable. Nous pouvons donc écrire

$$\overline{\mathrm{K}} - \mathrm{K} = \text{un ensemble dénombrable.}$$

6. D'après la propriété (4°) un point radialement accessible est transformé en un point radialement accessible par T_ε^{-1}, donc

$$\mathrm{K} \supset T_\varepsilon^{-1}(\mathrm{K}),$$

d'où

$$\overline{\mathrm{K}} \supset \overline{T}_\varepsilon^{-1}(\mathrm{K}).$$

En répétant T_ε^{-1} indéfiniment, on a deux suites d'ensembles qui ont la même limite :

$$K \supset T_\varepsilon^{-1}(K) \supset T_\varepsilon^{-2}(K) \rightarrow \ldots \varpi;$$
$$\overline{K} \supset \overline{T}_\varepsilon^{-1} \supset \overline{T}_\varepsilon^{-2}(K) \rightarrow \ldots \varpi.$$

Tout point de ϖ appartient à tous les ensembles de la seconde suite, donc si un point P de ϖ n'appartient pas à l'un des ensembles T_ε^{-i} (K) de la première suite nous pourrons dire qu'il appartient à $\overline{T}_\varepsilon^{-i}(K) - T_\varepsilon^{-i}(K)$.

Mais nous pouvons écrire

$$T_\varepsilon^{-1}(\overline{K}) = \overline{T}_\varepsilon^{-1}(K).$$

puisque la transformation est uniformément continue sur K puisque continue dans toute une région contenant K et même C à son intérieur.

Donc

$$\overline{T}_\varepsilon^{-1}(K) = T_\varepsilon^{-1}(K) + T_\varepsilon^{-1}(\overline{K} - K) = T_\varepsilon^{-1}(K) + \left\{ \begin{array}{l}\text{au plus un ensemble dé-}\\ \text{nombrable.}\end{array}\right.$$

De même

$$\overline{T}_\varepsilon^{-i}(K) = T_\varepsilon^{-i}(K) + \text{un ensemble dénombrable},$$
$$\overline{T}_\varepsilon^{-i}(K) - T_\varepsilon^{-i}(K) \subset \text{un ensemble dénombrable},$$
$$\sum \left[\overline{T}_\varepsilon^{-i}(K) - T_\varepsilon^{-i}(K)\right] \subset \text{un ensemble dénombrable}.$$

Donc :

L'ensemble des points de l'ensemble limite ϖ qui n'appartiennent pas à tous les ensembles K, $T_\varepsilon^{-1}(K)$, $T_\varepsilon^{-2}(K)\ldots$ *est dénombrable.*

Si donc ϖ ne se réduit pas à un ensemble dénombrable, il existe des points radialement accessibles qui restent radialement accessibles sous itération indéfinie de T_ε.

Supposons le coefficient de rotation irrationnel, alors (1^{er} cas) $\lim T_\infty(K)$ sera partout dense sur K, ceci est réalisé si les images *d'un point* P sont partout denses sur K alors ϖ est égal à $\overline{K}$ qui reste ainsi invariant tant par T_ε^{-1} que par T_ε mais ceci correspondrait au second cas étudié par Poincaré car sur le cercle de représentation conforme l'ensemble $\tau(K)$ est invariant ainsi que l'ensemble de ses intervalles contigus et la transformation sur le cercle : $\theta_1 = f(\theta)$ ne peut correspondre à une **fonction f à dérivée** à variation bornée [1].

Un exemple du second cas dans une courbe présentant des propriétés communes avec les courbes de M. Birkhoff est donné dans mon article du *Journal de Mathématiques*, l'on voit que l'ensemble parfait P reste radialement accessible par T^n et T^{-n} quel que soit n.

2° Impossibilité de borner le nombre de tours des arcs simples unissant l'origine aux points accessibles.

7. Nous appellerons distance angulaire [2] de deux points P et Q par rapport à un arc Γ qui ne passe pas par O ou : $\Theta\Gamma$ (P, Q) la valeur de la variation de l'argument de z le long de cet arc Γ soit $\mathrm{Arg}(z_Q) - \mathrm{Arg}(z_P)$. Nous utiliserons *la propriété fondamentale suivante : Étant donné un arc simple de Jordan* Γ *unissant deux points* P *et* Q, *on peut, sans changer la valeur de* $\Theta\Gamma$(P, Q), *faire subir à* Γ *une déformation topologique quelconque entre* P *et* Q, *qui restent fixes, à condition de ne jamais lui faire traverser* O.

Considérons maintenant deux transversales joignant deux points A et B de la frontière d'un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, soient k et l ces deux transversales, nous considérons d'autre part deux transversales AB sans autre point commun que leurs extrémités A, B, et séparant $\mathcal{D}$ en trois domaines dont celui qui a pour frontière les deux transversales contient l'origine O; soient μ et ν ces deux transversales.

Je dis que k (ou l) peut être déformée continûment à l'intérieur de $\mathcal{D}$, soit en μ, soit en ν, en effet considérons l'ensemble E de tous les points intérieurs à des courbes fermées formées par des arcs quelconques de $\mu\nu$ et k, E continu simplement connexe sépare $\mathcal{D}$ en deux domaines puisqu'il n'a que A et B communs avec la frontière de $\mathcal{D}$, soient d_1 et d_2 ces deux domaines $\left(d_1 + d_2 + \overline{\mathrm{E}} = \mathcal{D} + \mathrm{A} + \mathrm{B}\right)$, nous pouvons tracer dans d_1 une transversale δ_1 d'extrémités A et B,

---

[1] Denjoy, *Comptes rendus*, 1931.

[2] Dans tout ce qui suit j'ai tenu à démontrer certains détails qui pourraient sembler évidents.

de même dans d_2, δ_2; δ_1 comme δ_2 n'a avec μ, ν, k d'autres points communs que les extrémités A et B.

a. δ_1 peut être déformée en μ sans rencontrer O puisqu'elle appartient au domaine limité par $\overline{\mathrm{E}}$ et par conséquent à d_1 qui s'en déduit par addition de $\overline{\Sigma} r_k$ en appelant r_k les régions limitées par μ et les arcs de k situés dans r_1 supposons que O et δ_1 soient séparés par k, alors k peut aussi se déformer en δ_1, puisqu'elles n'ont que les extrémités communes et que le domaine qu'elles délimitent ne contient pas O. Par conséquent k peut se déformer en μ.

b. Si notre hypothèse n'est pas vérifiée, on a alors O et δ_2, séparés par k et k et ν pouvant se déformer tous les deux en δ_2 peuvent être déformées l'une en l'autre, il vient :

Lemme. — *Étant donnés deux points* P *et* Q *de la frontière d'un domaine simplement connexe* $\mathcal{D}$, *soient* μ *et* ν *deux transversales d'extrémités* A, B *mais autrement disjointes, telles que l'origine* O *appartienne au domaine qu'elles limitent. Toute autre transversale* Γ(P, Q) *peut être déformée soit en* μ, *soit en* ν *sans que* Θ_Γ(P, Q) *soit altéré par la déformation.*

Il existe ainsi deux valeurs possibles et deux seulement pour Θ(P, Q) quand P et Q appartiennent à la frontière du domaine, il vient :

Théorème. — *Quelle que soit la transversale choisie entre deux points* P *et* Q *de la frontière de* D *il y a deux valeurs possibles pour* Θ(P, Q); Θ_1(P, Q) *et* Θ_2(P, Q) *avec la relation* $\Theta_1(P, Q) - \Theta_2(P, Q) = \varepsilon 2\pi$, $\varepsilon = \pm 1$, ε dépend du sens choisi et de la valeur attribuée à Θ_1(P, Q).

Il suffit en effet de déformer les transversales en les deux transversales μ et ν envisagées au lemme précédent et le théorème devient évident.

8. Ainsi donc, nous pouvons pour évaluer Θ(P, Q) choisir tel arc PQ qui nous plaira, à condition qu'il ne passe pas par O, nous aurons une valeur de Θ qui est, surtout pour Θ grand, à peu de chose près ($\pm 2\pi$) la même pour n'importe quel arc.

Considérons maintenant un point P accessible de l'intérieur de la courbe par un arc simple quelconque L issu de O, supposons que P ne soit pas radialement accessible. L a un dernier point U avec $\mathcal{K}$, U appartiendra nécessairement, d'après ce que nous avons démontré plus tôt, au segment limité par le point radialement accessible et le point limite des points radialement accessibles d'un certain rayon r, nous appellerons *courbe* Λ *une telle courbe issue de* U. Ces courbes ont les propriétés suivantes :

1° Pour deux courbes Λ_1 et Λ_2 aboutissant à un même point accessible P, $\Theta_{\Lambda_1}(U_1, P) = \Theta_{\Lambda_2}(U_2, P)$.

En effet Λ_1 et Λ_2 sont issues des points U_1 et U_2 du segment RS d'un même rayon r; sinon, en appelant M le premier point de rencontre de Λ_1 et Λ_2 et $\overline{OU_1}$ et $\overline{OU_2}$ les lignes intérieures à $\mathcal{K}$ rendant accessibles de O les points U_1 et U_2 (*voir* ci-dessus) la courbe fermée OU_1MU_2O séparerait les points accessibles R_1 et R_2 puisque ceux-ci sont séparés dans $\mathcal{K}$ par la transversale U_1OU_2.

De plus, elles ne peuvent former aucune courbe fermée contenant O, ainsi, comme on a le long du rayon $\Theta_r(U_1, U_2) = 0$ on a bien

$$\Theta_{\Lambda_1}(U_1, P) + \Theta_{\Lambda_2}(P, U_2) + \Theta_r(U_2, U_1) = 0,$$

donc

$$\Theta_{\Lambda_1}(U_1, P) = \Theta_{\Lambda_2}(U_2, P).$$

2° Pour calculer $\Theta(P_1, P_2)$ on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\Theta(P_1, U_1) + \Theta(U_1, U_2) + \Theta(U_2, P_2).$$

Le premier et le troisième terme se calculent le long d'une ligne Λ, reste à calculer le second le long d'une ligne choisie de façon à ne rencontrer ni Λ_1 ni Λ_2. Pour ceci nous menons les lignes presque radiales OU_1 et OU_2 et nous les coupons par un petit cercle de centre O intérieur à $\mathcal{K}$. $\Theta(U_1, U_2)$ a donc, comme on devait s'y attendre, deux valeurs possibles qui diffèrent de 2π, U_1, a_1, a_2, U_2 prises le long des deux arcs a_1, a_2.

En particulier nous voyons que, si $\Theta(P, Q)$ est borné pour tout couple de points PQ, il est borné pour toutes les courbes Λ, et réciproquement s'il n'est pas borné, il y a au moins une courbe Λ sur laquelle il n'est pas borné.

9. Nous le supposerons *borné*, soit M la borne supérieure de la valeur absolue de $\Theta_{\Lambda_i}(Q_i, P_i)$, la borne supérieure $\mathcal{M}$ de $\Theta(P, Q)$ pour P, Q points accessibles quelconques sera bornée par

$$|\Theta(P, Q)| < 2M + \overline{\lim}\, a_1 a_2,$$
$$|\Theta(P, Q)| < 2M + 2\pi.$$

Nous pouvons naturellement faire la même étude pour les points accessibles de l'extérieur, définir des courbes ϖ analogues aux courbes Λ et peut-être une borne pour $\Theta_\varpi(P, Q)$. Soit N cette borne, la question suivante se pose : *existe-t-il un rapport entre* M *et* N ?

Nous remarquerons d'abord que l'on peut calculer M soit pour deux points d'une même Λ, soit pour deux points accessibles. Soient μ la valeur obtenue dans le premier cas, ν dans le second : évidemment $\mu \leq \nu$ car l'on peut toujours amener une même Λ à passer aussi près que l'on voudra des deux points accessibles en question, quels qu'ils soient. D'autre part. soient deux points L, R de Λ pour lesquels on a $\Theta(L, R) > \nu - \varepsilon$, nous menons les rayons passant par L et R et obtenons des points de $\mathcal{C}$ accessibles le long du rayon respectivement de L et R et l'on a en appelant S et T ces points

$$\Theta(L, R) + \Theta(S, L) + \Theta(R, T) = \Theta(S, T),$$

donc comme

$$\Theta(S, L) = \Theta(R, T) = 0.$$
$$\Theta(L, R) = \Theta(S, T) \quad \text{et} \quad \mu > \nu - \varepsilon,$$

Les points doubles formés éventuellement ne changent rien au résultat, car il est évident qu'un arc de courbe Λ ne peut former avec un segment de rayon *intérieur à* $\mathcal{C}$ une courbe fermée changeant la valeur de Θ car alors cette courbe contiendrait O, donc $\overline{\mathcal{K}}$.

Considérons une courbe Λ entre deux points P, Q tels que

$$\Theta(P, Q) > M - \varepsilon.$$

On peut choisir cette Λ tournée à gauche si l'on veut.

Menons un rayon voisin de P, à sa gauche, il existe sur ce rayon, en dessous de Λ au moins un point de $\mathcal{C}$, donc au moins un point accessible de l'extérieur R, comment sera la courbe ϖ qui va atteindre R ? elle peut être choisie tournée à gauche par rapport à l'extérieur, mais en général on voit aisément d'après la figure que le long d'une ligne ϖ allant de l'infini à R la variation $\Theta(P, Q)$ est au moins égale à $M - (\eta + \varepsilon)$ ainsi puisque η et ε sont arbitrairement petits :

$$N \geqq M.$$

On aura une autre inégalité :

$$M \geqq N. \qquad \text{d'où} \qquad M = N.$$

10. Nous aurons à utiliser la propriété fondamentale suivante : Soient un arc simple joignant deux points P et Q et $\Theta =$ la différence $\theta_Q - \theta_P$ comptée le long de cet arc, cette valeur se conserve dans une déformation continue de l'arc PQ, à condition naturellement qu'il ne passe pas par O, et ainsi :

$$T(\Theta) = T(\theta_Q - \theta_P) = T(\theta_Q) - T(\theta_P)$$

pour P et Q quelconques, on le voit aisément dans le plan $r.\ \theta$. Les transversales que nous considérerons, répondront toujours à cette condition, car elles se déformeront à l'intérieur de l'anneau.

Revenons maintenant à la transformation T_ε et considérons une transversale l sans points doubles joignant deux points accessibles de l'intérieur P et Q, par T_ε et ses puissances, l reste une transversale intérieure à la courbe $\mathcal{C}$ et sans points doubles, ce qui interdira à la différence des angles décrits par P et Q de devenir supérieure au maximum de l'angle compté sur l_i; soient a_k le maximum de $\theta_k - \theta_0$ et b_k son minimum, on a, par conséquent,

$$a_k - b_k < \max \Theta\, l_i, \qquad \text{c'est à dire} \quad < 2M + 2\pi,$$

nous pourrons alors écrire pour un point quelconque P

$$a_k > \theta_k - \theta > b_k \qquad \text{avec} \qquad a_k - b_k < 2M + 2\pi$$

C'est dire que $\lim \dfrac{\theta_k - \theta}{k}$, où

$$\frac{a_k}{k} > \frac{\theta_k - \theta}{k} > \frac{b_k}{k}, \qquad \frac{a_k - b_k}{k} < 2M + 2\pi,$$

a une limite bien définie et l'angle décrit par un point est donné par

$$2\pi kl - 2M - 2\pi < \theta_k - \theta < 2\pi kl + 2M + 2\pi$$

pour une puissance T_ε^k de la transformation.

11. Considérons un cercle Γ, nous pouvons représenter sur ce cercle les points radialement accessibles de $\mathcal{C}$ de façon biunivoque et continue (mais non bicontinue), on peut, par exemple, choisir pour Γ un cercle concentrique à l'anneau et intérieur à sa région intérieure et représenter le point radialement accessible du rayon r sur le point où r perce le cercle Γ, il est ainsi même possible de choisir cette représentation de façon que l'angle u définissant le point sur le cercle à partir d'un angle origine u_0 soit exactement égal à la fonction $\theta(P) - \theta_0(P)$, à condition de compter ces angles dans le même sens naturellement.

Considérons un point radialement accessible P et ses transformés $T_\varepsilon^{-1}(P)$, $T_\varepsilon^{-2}(P)$, ..., par T_ε^{-1} et ses puissances, ce sont tous des points radialement accessibles tels que leur abscisse angulaire θ soit exactement donnée par u sur le cercle Γ, or par définition, $\lim \frac{\theta n}{n}$ *existe et a une valeur bien définie l.*

Mais on a par hypothèse sur Γ,

$$u_1 = \theta_1, \qquad u_2 = \theta_2, \qquad u_n = \theta_n;$$

c'est-à-dire que $\lim \frac{u_n}{n} = \lim \frac{\theta_n}{n} = 2\pi l$.

Ainsi le coefficient de rotation défini directement sur la courbe $\mathcal{C}$ est le même que celui défini pour un certain ensemble de points du cercle Γ.

Considérons maintenant un cercle J sur l'intérieur duquel a été représenté conformément (ou topologiquement) l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$, l'ensemble des points radialement accessibles est représenté sur J par un ensemble parfait P de points, sauf qu'il peut être ouvert à gauche en une infinité dénombrable de points, ces points correspondant naturellement à des points presque radialement accessibles S définis plus haut, les autres points accessibles de $\mathcal{C}$ se représentent sur les intervalles contigus à cet ensemble (ils peuvent ne pas les remplir tous bien entendu).

Nous établissons maintenant entre J et Γ une correspondance continue de J à Γ faisant correspondre à chaque point radialement accessible, le point correspondant de Γ, et à tout intervalle contigu, extrémités comprises, à P sur J correspond sur Γ un point seulement, ce genre de correspondance a été souvent utilisée (1), l'ordre

(1) *Voir* en particulier H. Poincaré, *Journal de Mathématiques*, 1885, p. 228.

des points est le même et l'on sait que les coefficients de rotation pour J et Γ dans des transformations correspondantes sont égaux; ainsi le coefficient de rotation déterminé directement sur la courbe est bien égal au coefficient de rotation déterminé sur le cercle de représentation conforme, donc $\lim \frac{\theta_n}{n} = 2\pi\tau_i$ pour l'intérieur et $2\pi\tau_e$ pour l'extérieur.

12. Considérons deux points voisins de $\mathcal{C}$, P et Q, l'un P, accessible de l'intérieur, l'autre Q accessible de l'extérieur, nous les unissons par un rayon PQ et nous pouvons choisir P et Q assez voisins pour que, par T_ε^k,

$$\operatorname{dist}[T_\varepsilon^k(P),\ T_\varepsilon^k(Q)] < \delta \qquad \text{ou} \qquad |\theta^{(k)}(Q) - \theta^{(k)}(P)| < \delta,$$

δ étant un nombre positif arbitraire.

Par définition même du coefficient de rotation τ_i,

$$2\pi k\tau_i - 2M - 2\pi \leqq \theta^{(k)}(P) - \theta(P) \leqq 2\pi k(\tau_i) + 2M + 2\pi$$

et

$$2\pi k\tau_e - 2N - 2\pi \leqq \theta^{(k)}(Q) - \theta(Q) \leqq + 2\pi k\tau_e + 2N + 2\pi.$$

Nous supposons ici τ_i et τ_e comptés positivement dans le même sens, il vient alors

$$\begin{aligned}2k\pi(\tau_e - \tau_i) - 2(M + N + 2\pi) \leqq \theta^{(k)}(Q) - \theta(Q) - [\theta^{(k)}(P) - \theta(P)]\\ \leqq 2k\pi(\tau_e - \tau_i) + 2M + 2N + 4\pi.\end{aligned}$$

Or, nous savons que la quantité entre les signes d'inégalité peut être rendue aussi petite que l'on veut par un choix convenable de P et Q

$$-2(M + N + 2\pi) - \varepsilon \leqq 2k\pi(\tau_e - \tau_i) \leqq 2M + 2N + 4\pi + \varepsilon$$

ou

$$|k| \leqq \frac{M + N + 2\pi}{\pi(\tau_e - \tau_i)} + \tau_i.$$

k serait donc borné pour $\tau_e - \tau_i \neq 0$ et comme précisément notre hypothèse fondamentale est $\tau_e - \tau_i \neq 0$ il faut renoncer à l'hypothèse faite ci-dessus M *borné*, puisque k est un nombre quelconque.

— G. D. Birkhoff, *Acta mathematica*, 43, (1-2), p. 87. — A. Denjoy, *Journal de Mathématiques*, 1932, p. 333.

3° Étude des bouts premiers de la courbe.

13. Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour l'étude de certains bouts premiers de la courbe $\mathcal{C}$, dans ce but nous établirons d'abord le :

Lemme. — *Si* M *n'est pas borné, il existe un domaine partiel de l'intérieur de* $\mathcal{C}$ *dont la frontière contient la courbe* $\mathcal{C}$ *tout entière.*

Nous avons vu que, dans ce cas, il est possible de trouver une courbe A faisant N tours de l'anneau, pour N aussi grand que l'on veut.

Il sera donc possible de trouver, soit *une suite* de telles courbes A [1] $[N \to \infty]$ ou *une même* courbe A pouvant être prolongée indéfiniment, dans un même domaine partiel de $\mathcal{D}$, compris par exemple entre deux rayons r_1 et r_2 aboutissant à deux points radialement accessibles R_1 et R_2 et l'arc R_1R_2 de $\mathcal{C}$. On peut même choisir r_1 et r_2 aussi voisins que l'on voudra, sinon l'on pourrait trouver une borne supérieure de N, N_{ε_n} dans chacun de ces domaines partiels d_n, chacun étant situé dans un certain angle ε_n de sommet O, mais, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, on pourrait trouver un nombre fini de tels angles ε contenant tous les rayons et ainsi N devrait être borné contrairement à l'hypothèse.

Nous considérons l'arc $\mathcal{A}(R_1R_2)$ de la courbe, s'il n'est pas identique à $\mathcal{C}$ il sera simplement connexe, ne coupera pas le plan, par conséquent on peut joindre un point A intérieur au domaine partiel d à un point B de la région extérieure à $\mathcal{C}$ par un arc simple J ne rencontrant pas $\mathcal{A}$. Nous réduisons J entre A et son dernier point L commun avec R_1OR_2, soit à la droite AL si celle-ci est intérieure à d, soit à un arc simple AL intérieur à d, LB fera un certain nombre de fois, l, le tour de l'anneau.

Le point B est accessible d'un point D d'un cercle qui contient $\mathcal{C}$ entièrement à son intérieur, par un arc simple extérieur à $\mathcal{C}$, arc simple qui fait un certain nombre de tours déterminé k.

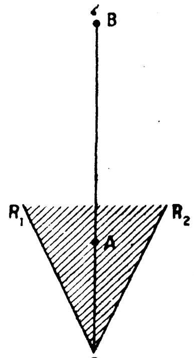
---

[1] C'est le cas pour la courbe que je construis dans mon Mémoire cité plus haut.

L'arc simple OLBD fait au plus $k+l$ fois le tour de l'anneau et il ne rencontre pas $\mathcal{A}$.

Considérons maintenant une courbe Λ de d qui tourne au

Fig. 7.



moins $k+l+2$ fois autour de l'anneau, elle devra nécessairement rencontrer l'arc OLBD, or, elle ne peut rencontrer OL qui est à l'intérieur des rayons terminés aux points radialement accessibles, ni BD qui appartient à la région extérieure à $\mathcal{C}$, donc cette courbe Λ rencontrera l'arc LB en un point P, mais P sera intérieur à d et B extérieur à d et sur l'arc PB devra exister un point de la frontière de d. Ce point qui ne peut appartenir à R_1OR_2 puisque L est le dernier point commun à R_1OR_2 et à OLBD, doit appartenir à $\mathcal{A}$, ce qui est contraire à l'hypothèse, ainsi $\mathcal{A}$ est identique à $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ n'a comme sous-continus qui coupent le plan que ses sous-continus identiques à elle-même.

Nous remarquons, immédiatement, ce qui nous sera très utile dans la suite, que le domaine partiel considéré pourrait être remplacé par un domaine partiel découpé par deux arcs simples, intérieurs, disjoints, OP_1 et OP_2, P_1 et P_2 étant par exemple [c'est le cas qui nous servira plus tard] les points accessibles extrémités d'un même intervalle d'un rayon, intérieur à $\mathcal{C}$. Si dans le domaine partiel ainsi formé le nombre de tours des courbes Λ n'est pas borné, l'arc P_1P_2 de $\mathcal{C}$ sera encore identique à $\mathcal{C}$, on le voit par un raisonnement semblable (il suffit de remplacer les rayons OR_1 et OR_2 par les arcs simples OP_1, OP_2).

14. Faisons tendre ε, angle des rayons, vers zéro. En appelant condition A la condition pour un domaine de contenir $\mathcal{C}$ dans sa frontière, nous aurons au moins une suite de domaines emboîtés satisfaisant à la condition A, dont les rayons OR_1^i, OR_2^i tendent vers un seul rayon OR; deux cas sont alors à considérer :

1° R est point de continuité de l'ensemble des points radialement accessibles, alors on peut choisir les domaines d^i de façon que les angles $R_1^i OR_2^i$ soient strictement intérieurs les uns aux autres et l'on peut choisir les transversales $R_1^i R_2^i$; $R_1^{i+1} R_2^{i+1}$, ... sans points communs, et le domaine partiel D_i (ne contenant pas O) limité par $R_1^i R_2^i$ contient le domaine partiel D_j limité par $R_1^j R_2^j$ pour $j > i$; c'est-à-dire que ces transversales forment une « chaîne » (¹) et comme elles tendent vers zéro elles définissent un *bout premier* (¹) qui, devant être la limite des domaines partiels D_i qui ont pour frontière la courbe $\mathcal{C}$ entière, quel que soit i, est identique à $\mathcal{C}$. R est le « point accessible » du bout premier qui est de seconde espèce.

2° R est point de discontinuité de K, dans ces conditions OR_1^i et OR_2^i vont tendre vers le rayon ORS mais les transversales $R_1^i R_2^i$ ne vont plus tendre vers zéro, un cas peut cependant se ramener tout de suite au précédent, c'est celui où une suite de domaines D_i satisfaisant à la condition A sont limités par une chaîne de transversales ayant un point limite unique sur le segment RS, on obtient encore un bout premier de seconde espèce contenant $\mathcal{C}$.

Si aucun de ces cas n'est réalisé, la situation est beaucoup plus compliquée; dans ce qui suit nous supposons naturellement qu'aucun des cas précédents ne se présente.

15. Soit, par conséquent, δ un intervalle d'un rayon, δ est limité à ses deux extrémités par deux points accessibles de $\mathcal{C}$ et il détermine un domaine partiel dont la frontière contient $\mathcal{C}$, ses extrémités peuvent être R et S, point radialement accessible et point limite des points radialement accessibles, situés sur le rayon support de δ, ou deux autres points de $\mathcal{C}$ situés entre R et S : étant donné un nombre N arbitrairement grand, il y aura toujours au

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Carathéodory, *Math. Ann.*, Bd 73, p. 331.

moins une courbe Λ issue de δ tournant N fois autour de l'origine sans pouvoir toucher δ à nouveau.

Considérons un rayon r quelconque. L'ensemble de toutes les courbes Λ issues de δ formera sur r un ensemble dénombrable d'intervalles ouverts E.

Nous pouvons considérer dans E le sous-ensemble E_n formé d'intervalles atteints par une courbe Λ quelconque après n circuits autour de l'origine. Il est possible de faire ce choix, car quand deux courbes Λ différentes rencontrent un même intervalle i de E elles ont tourné exactement autant de fois autour de O [*voir* aux propriétés des courbes Λ]. Deux ensembles E_1^n et E_2^n sont disjoints pour n_1 et n_2 différents et une courbe Λ qui fait n fois le tour de l'anneau rencontre tous les ensembles E_1, E_2, ... E_{n-1}.

Pour simplifier le raisonnement, dans la suite nous ne considérerons plus l'ensemble des courbes Λ, mais celui des courbes λ définies de la façon suivante : une courbe λ est une courbe Λ qui atteint précisément son nombre de tours maximum en son extrémité. La borne supérieure M du nombre de tours de l'origine est la même pour les λ et les Λ, en effet, soit m la borne supérieure du nombre de tours des λ, comme une courbe λ est une courbe Λ on a : $m \leq M$, mais je dis que l'on a $m = M$ car si l'on avait une Λ faisant N tours [$N > m$] soit P le point où Λ atteint exactement ce nombre N de tours, on peut joindre P au premier point Q de $\mathcal{C}$ situé sur le même rayon, si PQ n'a aucun point commun avec AP(Λ), APQ forme une courbe λ faisant N tours, ce qui est impossible par hypothèse et l'on doit avoir $m = M$ (sinon on remplacerait P par le dernier point commun à Λ et à PQ ou par Q); ainsi nous pourrons nous borner dans la suite à considérer les courbes λ, ce qui nous sera plus commode.

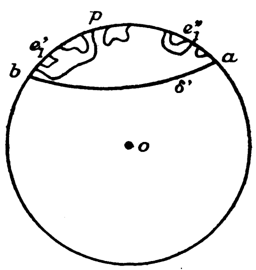
16. Considérons donc une λ qui fait N fois le tour de l'anneau, elle doit rencontrer E_1 : à E_1 correspond dans d intérieur du cercle c sur lequel on a représenté conformément le domaine $\mathcal{D}$ borné par la courbe $\mathcal{C}$ un certain ensemble de transversales deux à deux disjointes qui ne peuvent avoir de points d'accumulation à l'intérieur de d, soit e_1 cet ensemble; l'ensemble $e_1 + c$ est un ensemble fermé, continu, l'un des domaines qu'il détermine dans le plan contient O, donc l'intervalle δ de $\mathcal{K}$ d'où est issue λ. Soit P

le point accessible de $\mathcal{C}$ extrémité de λ, il lui correspond sur c un point p. Il vient alors :

Ou bien p est séparé de O par au moins une transversale de e_1 ou bien p est accessible de O par un arc simple sans points communs avec e_1.

Supposons en effet que le premier cas ne soit pas réalisé, alors les transversales de e_1 peuvent se diviser en deux classes e'_1, e''_1 suivant que leurs extrémités sont à gauche ou à droite de p. toutes appartiennent au domaine partiel d' de d séparé de O par δ' transformée de δ. Les deux ensembles $e'_1 + \overset{\smile}{bp}$ et $e''_1 + \overset{\smile}{ap}$ sont fermés et ont exactement en commun le point p, celui-ci est donc un « cut point » de la frontière de d', c est-à-dire un point tel que son omission et celle d'un autre point [de δ' par exemple] décomposerait la frontière de d' en des ensembles disjoints, par consé-

Fig. 8.



quent (¹) p est accessible de O par un arc simple intérieur à d et sans points communs avec e_1. Mais nous aboutissons ici à une contradiction, un tel arc en effet aurait pour correspondant dans $\mathcal{D}$ un arc simple intérieur à $\mathcal{D}$ aboutissant à P, arc qui doit faire N fois le tour de O à partir de δ et d'autre part, il pourrait être choisi de façon à ne pas rencontrer E_1 et de même E_2, E_3, ..., donc à ne pas rencontrer le rayon support de E, ce qui est absurde.

Il vient

THÉORÈME. — *Si une courbe λ fait N fois le tour de l'anneau elle rencontrera au moins N transversales de E formant une*

(¹) WHYBURN, *loc. cit.*

« *chaîne* », *c'est-à-dire dont les domaines partiels sont embottés et contiennent* P *le point accessible de* $\mathcal{C}$ *extrémité de* λ.

En effet, le raisonnement ci-dessus prouve qu'il existe dans E_1 au moins une transversale δ_i dont le domaine partiel (¹) est contenu dans le domaine partiel de δ et d'autre part contient P ; nous désignons par δ_1 la première de ces transversales de e_1 satisfaisant à ces conditions, à partir du dernier point commun à λ et δ_1 on peut étudier les point d'intersection de λ avec E_2 on voit de même que parmi les transversales de E_2 il en existe au moins une dont le domaine partiel contient P tout en étant contenu dans le domaine partiel de δ_1 en désignant par δ_2 la première des transversales de E_2 satisfaisant à ces conditions ou continue *et ainsi* P *appartient à un bout* [*ende*] *déterminé par une chaîne de* N *transversales.*

17. Nous appellerons *transversale irréductible* toute transversale du genre de celles définies ci-dessus, avec plus de précision μ sera une transversale irréductible pour un chemin ν allant d'un point d'une transversale pq à un point r situé entre p et q pour un certain sens déterminé sur le cercle, si ν joint un point de pr à un point de rq sans rencontrer pq, μ rencontrera toutes les ν possibles ; et en appelant $D(\mu)$, $D(pq)$ les domaines partiels limités par μ et pq,

$$P \subset D(\mu) \subset D(pq)$$

(égalité exclue).

Appliquons ces résultats à la courbe $\mathcal{C}$; il existe deux cas possibles :

1° Il existe une suite de λ_i faisant n_i fois le tour de l'anneau $(n_{i+1} > n_i + 1)$ telles que : elles aient en commun toutes leurs transversales irréductibles jusqu'à un certain rang croissant avec i, c'est-à-dire que λ_1 et λ_2 auront k_1 transversales irréductibles communes puis λ_2 et λ_3 en auront k_2 $[k_2 > k_1 + 1]$ naturellement si λ_i et λ_j ont en commun deux transversales irréductibles

(¹) Carathéodory, *Math. Ann.* Bd 73, p. 328. Le domaine partiel de la transversale δ sera systématiquement dans la suite celui des deux domaines sous-ensembles de $\mathcal{D}$ limités par δ, qui ne contient pas O.

δ_n et δ_m elles ont en commun toutes les transversales « situées entre δ_n et δ_m », ce qui a un sens tout à fait précis pour des transversales disjointes, ainsi l'inégalité ci-dessus indique que si deux λ : λ_i et λ_{i+1} ont en commun une transversale δ_{k_i}, elles ont aussi en commun toutes les transversales irréductibles *situées entre* δ et δ_{k_i} puisque d'une part elles forment une *chaîne* sur chacune des λ_i et λ_{i+1} et que celles-ci sont issues de δ.

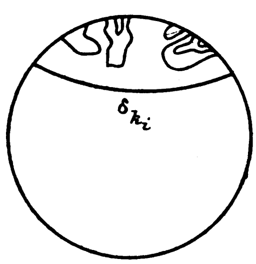
Faisons croître i indéfiniment, les transversales $\delta_1, \ldots, \delta'_k, \ldots$ forment une chaîne de transversales toutes différentes dont le nombre croît indéfiniment, nous nous rappelons maintenant qu'elles sont des intervalles disjoints d'un même segment sur le rayon r, la longueur de δ_k tend donc vers zéro quand k augmente indéfiniment et la suite $\delta_1 \ldots \delta_k \ldots$ définit un *bout premier*.

Considérons un domaine partiel limité par une δ_k, celle-ci est une transversale irréductible pour une suite infinie de λ_i dont le nombre de tours n'est pas borné, donc, d'après un théorème précédent, ce domaine partiel a pour frontière $\delta_k + \mathcal{C}$, quelque soit k, et leur ensemble limite doit contenir $\mathcal{C}$, donc être identique à $\mathcal{C}$, et il vient :

Dans ce cas I *la suite des transversales* δ_{k_i} *définit un bout premier identique à la courbe* $\mathcal{C}$.

2° *Il existe une dernière* δ_{k_i} *à partir de laquelle les* λ_i *n'ont plus aucune transversale irréductible en commun ou plutôt telle que les* $\delta_{k_{i+1}}$ *(première transversale irréductible de* $E_{k_{i+1}}$*)*

Fig. 9.



sont toutes différentes. Si, en effet, les λ_i ne satisfont pas à la condition posée au 1° on peut toujours trouver une suite partielle satisfaisant à cette condition; considérons δ, ou bien il y a une suite partielle de λ issues de δ pour lesquelles les δ_1 sont toutes différentes ou bien il y a une suite partielle admettant la même δ_1, dans ce dernier cas on recommence le raisonnement à partir de δ_1 et ainsi de suite; les deux seules alternatives possibles sont donc bien celles posées au 1° et au 2°. Considérons donc ce second cas et traçons dans le cercle de représentation conforme la transversale δ_{k_1} et la suite infinie des transversales correspondantes aux δ_{k_i+1}, d'après le choix des λ_i (le nombre de tours de l'anneau fait par λ_i où n_i est tel que $n_{i+1} \geqq n_i + 1$), le nombre de tours de l'anneau fait par les λ_i de la suite n'est pas borné; et il en est de même à l'intérieur de tout domaine partiel contenant une infinité de δ_{k_i+1}. Or ces δ_{k_i+1} [dont la longueur tend vers zéro] ont au moins un point d'accumulation P sur le cercle, *considérons une chaîne de transversales μ tendant vers le point* P.

Les correspondantes ν dans $\mathcal{D}$ des transversales μ ne vont peut-être pas tendre vers zéro mais le « Bout » qu'elles définissent, laissera échapper tous les points accessibles de $\mathcal{C}$ correspondant à tous les points du cercle qui ne sont pas le point P, il ne sera donc pas « *divisible* » au sens de M. Carathéodory (*loc. cit.*) et sera un *Bout premier*.

Mais chacun des domaines partiels limités par les μ contient une infinité de δ_{k_i+1}, le nombre de tours de l'anneau effectués par les λ qu'il contient n'est donc pas borné et sa frontière doit contenir toute la courbe $\mathcal{C}$; ainsi donc le bout premier défini par les μ est identique à $\mathcal{C}$.

Le bout premier sera ici de seconde ou quatrième espèce.

Remarquons que le résultat pourrait s'obtenir en appliquant le théorème ci-dessous, théorème très voisin d'un théorème de M. Carathéodory :

Si une suite de transversales d'un domaine $\mathcal{D}$ tend vers un point la suite des domaines partiels limité par ces transversales a son ensemble limite contenu dans un bout premier qui correspond au point du cercle qui est limite des transversales du cercle correspondant aux transversales considérées dans $\mathcal{D}$.

Il vient donc

Théorème. — *Si le nombre des circuits autour de l'origine des* *courbes* A *n'est pas borné, il existe un bout premier contenant toute la courbe*,

et nous avons le résultat fondamental :

Une courbe de M. Birkhoff admet au moins un bout premier auquel elle est identique.

18. Je dois maintenant rappeler la notion de continu indécomposable [1]. Un continu étant par définition un ensemble fermé et connexe [2] nous dirons qu'un continu Γ est indécomposable s'il est impossible de trouver deux continus Γ_1 et Γ_2 tels que leur somme forme Γ et que ni Γ_1 ni Γ_2 ne soit identiques à Γ. Un continu de condensation K d'un continu $\mathcal{C}$ étant par définition soumis à la condition

$$\overline{\mathcal{C} - K} \supset K,$$

on sait que tout sous-continu de Γ non identique à Γ entier est continu de condensation de Γ.

J'ai démontré [3] que lorsqu'une courbe fermée (frontière commune à deux domaines) admet un bout premier qui la contient tout entière cette courbe fermée est formée soit d'un, soit de deux continus indécomposables. Nous allons voir que dans le cas des courbes de M. Birkhoff même cette seconde alternative doit être écartée.

Le raisonnement sera différent dans le premier et le second cas considérés ci-dessus.

1° Considérons un point P de la courbe $\mathcal{C}$, situé sur un rayon r, supposons-le accessible de l'intérieur par une certaine courbe j. Choisissons un point Q_i accessible de l'extérieur situé également sur r au-dessus de P, à une distance $= \varepsilon$ de P, Q_i sera aussi accessible de l'extérieur par une courbe g_i; la courbe $j + PQ + g_i$ joint O à un cercle extérieur à la courbe $\mathcal{C}$ en tournant un nombre N_i de fois autour de l'origine. Supposons pour

---

(1) *Voir* Janiszewski, *Thèse*, Paris, 1911. — Janiszewski et Kuratowski, *Fund. Math.*, t. I, p. 210. — Kuratowski, *Fund Math., etc.*

(2) Un ensemble est connexe quand il ne peut être décomposé en deux sous-ensembles sans points communs ou plutôt tels que $E_1 \times \overline{E}_2 + E_2 \times \overline{E}_1 = 0$.

(3) *C. R. Acad. Sc.* t. 196, 1933, p. 1195.

commencer que P n'appartienne pas à ce domaine partiel de $\mathcal{D}$ qui contient justement le bout premier; dans ce cas les courbes λ ne rencontrent pas j, elles ne rencontrent évidemment pas g_i, elles vont donc rencontrer PQ_i en une infinité de transversales irréductibles qui devront s'intercaler dans les transversales définissant le bout premier, par conséquent sur PQ il y a au moins un point limite des transversales définissant le bout premier, donc au moins un point principal du bout premier. Mais ε peut être choisi aussi petit que l'on voudra, ainsi P est limite de points principaux et comme l'ensemble de ceux-ci est fermé, il est lui-même un point principal.

Il reste à considérer le cas où P appartient précisément au même domaine partiel que la suite λ_i, mais alors deux cas seulement sont possibles : ou bien P appartient à tous les domaines partiels qui définissent le bout premier ou bien il ne leur appartient plus à partir d'un certain rang, s'il ne leur appartient plus à partir de δ_{k_i}, à partir de δ_{k_i} les λ_i peuvent être limitées à leur partie *après* δ^{k_i} et ne pourront par conséquent rencontrer l'arc simple intérieur OP et de même que précédemment P est un point principal du bout premier.

L'autre cas doit être écarté, en effet P devrait être alors le point accessible du bout premier et par conséquent l'arc simple OP qui le rend accessible rencontrerait une suite de transversales définissant le bout premier, ce qui est tout à fait impossible car δ_k par exemple ne peut être rencontrée que par une courbe faisant au moins k fois le tour de l'anneau et ceci est vrai quel que soit k tandis que OP fait un nombre de tours fixe.

Donc *tout point* P *accessible de l'intérieur est un point principal du bout premier.*

Il vient, puisque tous les points P sont partout denses sur $\mathcal{C}$ et que l'ensemble des points principaux est fermé (M. Carathéodory *loc. cit.*).

Tout point de $\mathcal{C}$ est un point principal [Hauptpunkt] du bout premier, celui-ci est alors de troisième espèce.

Le résultat cherché s'obtient maintenant sans peine, puisque j'ai démontré que, si le bout premier contenant la courbe est de troisième espèce, la possibilité de la décomposition de *la courbe en deux continus indécomposables doit être écartée.*

19. 2° Considérons dans le cercle c une entaille E [1] aboutissant en un point P, sa correspondante E′ dans le domaine D contient toujours dans son ensemble d'accumulation tous les points principaux du bout premier qui correspond à P, cela est immédiat puisque E′ rencontre toutes les transversales qui définissent le bout premier, nous allons d'autre part établir le lemme suivant :

Lemme. — *Si la frontière* K *d'un domaine est décomposable en deux vrais sous-continus* K_1 *et* K_2 *et si* Q *est un point de* K_2 *qui n'appartient pas à* K_1, *il est possible de tracer autour de* Q *un petit cercle* γ *tel qu'on puisse choisir une entaille, dont la correspondante aboutit à un point* P *du cercle correspondant au bout premier contenant* K *tout entier, sans aucun point commun avec* γ.

Il suffit de choisir γ assez petit pour ne contenir aucun point de K_1, dans ces conditions toutes les transversales découpées dans le domaine intérieur à K par γ ont pour correspondantes des transversales situées d'un même côté de P et assez petites [en réduisant encore γ s'il le faut] pour ne contenir le point O dans aucun de leurs domaines partiels, ainsi O, P peuvent être joints par un arc simple sans point commun avec l'ensemble fermé $\left(\sum_1^\infty \delta'_i\right) + c$, en désignant par δ_i une transversale de γ, δ'_i sa transformée dans le cercle, c le cercle de réprésentation conforme.

20. Si donc $\mathcal{C}$ est formée de deux continus distincts, chacun d'eux contient des points secondaires, soient K_1 et K_2 ces deux continus. Reportons-nous au raisonnement qui nous a servi à établir l'existence du bout premier, nous pouvons choisir une suite partielle infinie de δ_{k_i} (dans le cercle) tendant vers P *en restant d'un même côté de* P, désignons cette suite par $\delta_{n_1}, \ldots, \delta_{n_m}, \ldots$, supposons-la à gauche de P, par exemple.

[1] P. Montel, *Leçons sur les familles normales*, p. 215-216.

Soit Q un point secondaire situé sur le seul composant K_2 de $\mathcal{C}$ qui est à droite de P (toujours par rapport à l'intérieur). Nous pouvons tracer autour de Q un petit cercle de rayon $\eta > 0$ qui n'ait aucun point commun avec K_1 le second composant de $\mathcal{C}$, il nous est alors possible d'après le lemme de choisir une entaille OP qui n'ait pas de point dans ou sur ce cercle ([1]).

Soient q_n une des transversales de la chaîne définissant le bout premier, a_n son extrémité gauche, n peut être choisi assez grand N pour que a_N appartienne à K_1 seul, désignons par L le dernier point commun à partir de O à OP et à q_N et considérons le domaine Δ, domaine partiel limité par a_NL (de q_n), puis l'entaille OP à partir de L et l'arc de $\mathcal{C}$ à partir de a_n.

Tous les points accessibles de l'intérieur de ce domaine Δ vont être :

a. les points de a_NL ;

b. les points de OP à partir de L;

c. les points accessibles de $\mathcal{C}$ correspondants aux points du cercle situés entre le correspondant de a_n et le point P, qui correspond au bout premier, tous ces points appartiennent évidemment à K_1.

D'autre part, démontrons ce lemme : *Étant donnés deux points* S *et* R *intérieurs à* $\mathcal{D}$ *ou accessibles de* $\mathcal{D}$ *et un point frontière* Q *on peut toujours tracer autour de* Q *un cercle assez petit pour que l'on puisse choisir une transversale* RS *sans points communs avec ce cercle.*

Supposons le lemme non vérifié : nous considérons encore l'ensemble des transversales de $\mathcal{D}$ constituées par des intervalles du cercle c_n de centre Q et de rayon η_n, l'une au moins d'entre elles δ_n^n sépare les points R et S, il existe ainsi une suite de transversales δ_i^i, δ_j^j séparant les points R et S, elles sont toutes sans points communs deux à deux puisqu'elles appartiennent à des cercles de centre P de rayons différents, et forment donc une *chaîne*. Comme elles tendent vers zéro, elles définissent un bout premier dont P est un point principal, mais l'un des points R ou S

([1]) OP n'est pas dans le domaine une entaille, mais correspond à une entaille dans le cercle c.

est point accessible de tous les domaines partiels emboîtés il est donc le *point accessible du bout premier*, mais alors il doit en être l'unique point principal, nous aboutissons donc à une contradiction et le lemme est établi.

Ainsi $a_N L$ peut être choisi de façon à n'avoir aucun point dans un cercle de centre Q de rayon η, pourvu que η soit assez petit et nous voyons qu'aucun point accessible du domaine Δ ne peut appartenir à ce cercle.

Mais le nombre de tours, autour de l'origine des courbes λ contenues dans Δ ne peut être borné par hypothèse et par conséquent Δ a pour frontière la courbe $\mathcal{C}$ tout entière, donc Q appartient à la frontière de Δ, tout en étant une distance positive de tous les points accessibles de Δ, ce qui est absurde.

L'hypothèse de l'existence d'un point Q appartenant à un vrai sous-continu de $\mathcal{C}$ est ainsi prouvée impossible et $K_1 = K_2 = \mathcal{C}$ et il vient :

Théorème. — *Une courbe de M. Birkhoff est un continu indécomposable.*

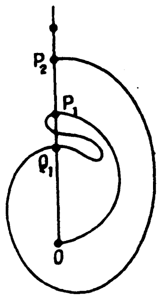
21. Je désirerais seulement ajouter quelques mots sur les possibilités de formes affectées par ces courbes. Nous avons vu qu'il y a deux cas essentiellement différents suivant que le bout premier est de troisième espèce ou non.

On pourra dans le deuxième cas essayer de construire une courbe $\mathcal{C}$ avec une infinité de boucles issues d'un certain ensemble radialement accessible; chacune de ces boucles est de longueur finie mais chacune est un peu plus longue que la précédente, cette construction devra être faite alternativement à partir de l'extérieur et à partir de l'intérieur puisque la limite de nombre de tours n'existe pas plus pour les courbes ϖ que pour les courbes Λ, je n'insiste pas sur ce point, car je renverrai à un Mémoire sur la construction d'une courbe de ce genre, qui va être publié incessamment.

Je considérerai donc le premier cas, alors nous voyons qu'il est possible de prolonger indéfiniment la même courbe λ sans la faire passer deux fois par la même transversale irréductible, ce serait par exemple la transformée du rayon du cercle aboutissant au point correspondant au bout premier.

Nous considérons l'ensemble des points de rencontre de cette courbe λ particulière avec un rayon, soit P_1 son premier point, P_2 sera son premier point avec R, après avoir tourné une fois autour de l'origine et Q_1 le dernier point commun avec R avant P_2. Considérons la suite des P_n, Q_n ainsi formés; on voit que la

Fig. 10.



suite $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ toujours croissante tend vers le point le plus haut possible, puisque l'ensemble des points de rencontre de λ avec R est partout dense sur R, relativement à $\mathcal{C}$ (c'est au fond le sens du théorème démontré ci-dessus), c'est-à-dire vers le point radialement accessible de l'extérieur de R, soit A.

L'ensemble de Q_n est aussi croissant mais ne peut avoir pour limite A, en effet les domaines simplement connexes limités par $\overline{OQ_i} + \overset{\frown}{Q_iP_{i+1}} + \overline{P_{i+1}Q_i}$ emboîtés auraient pour limite la frontière $\mathcal{F}$ d'un domaine qui les contiendrait tous.

Mais cette limite est aussi limite de points de $\mathcal{C}$, car entre deux arcs de λ correspondant à des tours différents existent toujours des points de $\mathcal{C}$ (*voir* propriétés des courbes λ), ainsi nous obtiendrons comme ensemble $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ qui ne pourrait être identique à $\mathcal{C}$, car il contiendrait à l'intérieur du domaine qu'il borne des points de $\mathcal{C}$ et cependant il couperait le plan. Cette hypothèse est donc à repousser puisque $\mathcal{C}$ est une coupure irréductible du plan.

Ainsi la suite des Q tend vers une limite bien déterminée qui est différente de A.