H. KREBS

# Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 62 (1934), p. 120-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__120_0>

## SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. H. Krebs.

### Introduction.

Les recherches qui font l'objet de ce Mémoire se rapportent aux équations aux dérivées partielles. Nous nous limitons dans ce travail à la construction des équations aux dérivées partielles linéaires. Dans une première Partie nous donnons une méthode générale qui permet de déduire de toute équation linéaire intégrable et de sa solution une autre équation linéaire intégrable et sa solution. Dans une deuxième Partie nous appliquons notre méthode à la construction des équations hyperboliques intégrables et de leurs solutions. Nous nous sommes proposé de chercher toutes les équations hyperboliques qui possèdent une solution présentant deux fonctions arbitraires et leurs dérivées. Nous supposons les équations ramenées à leur forme canonique.

Nous exposerons dans d'autres Mémoires la partie de nos recherches qui se rapportent à la construction des équations elliptiques intégrables et à celle des équations paraboliques intégrables.

La méthode qui nous a permis de construire les équations linéaires intégrables à deux variables indépendantes et leurs solutions peut être appliquée à la recherche des équations intégrables non linéaires ou à plus de deux variables indépendantes et de leurs solutions.

### PREMIÈRE PARTIE.

1. Nous donnons dans ce chapitre une transformation générale qui permet de déduire de toute équation linéaire du second ordre et intégrable de sa solution une autre équation linéaire du second ordre et sa solution. La méthode permet de construire toutes les équations linéaires intégrables en partant des plus simples d'entre

elles. Dans la seconde Partie de ce Mémoire nous donnerons les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions.

2. Considérons l'équation complètement linéaire

$$(1)\qquad \varphi(u) = \mathrm{A}r + 2\mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{D}p + \mathrm{E}q + \mathrm{F}u = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, ..., F sont des fonctions de deux variables indépendantes $x$ et $y$, la fonction inconnue étant désignée par $u$. La condition pour que l'équation (1) soit la somme de deux dérivées par rapport aux variables $x$ et $y$ est que l'on ait l'identité

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial y^2} - \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} + \mathrm{F} = 0.$$

Lorsque les coefficients de l'équation (1) ne satisfont pas à l'identité (2), on peut chercher à la mettre sous la forme d'une somme de deux dérivées partielles en la multipliant par un facteur convenable $z$. La condition pour que l'équation (1) puisse être la somme de deux dérivées partielles est que la fonction $z$ satisfasse à l'équation

$$(3)\qquad \psi(z) = \frac{\partial^2 \mathrm{A}z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{B}z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathrm{C}z}{\partial y^2} - \frac{\partial \mathrm{D}z}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}z}{\partial y} + \mathrm{F}z = 0.$$

L'équation (3) s'appelle l'équation adjointe de l'équation (1). Réciproquement, l'équation (1) est l'équation adjointe de l'équation (3). Le problème de l'intégration de l'une de ces équations est équivalent à celui de l'intégration de l'autre.

Supposons que l'on connaisse une solution quelconque $z_1$ de l'équation adjointe (3). Le produit de la multiplication de l'équation (1) par la quantité $z_1$ peut se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \begin{aligned} z_1\varphi(u) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left( u\frac{\partial \mathrm{A}z_1}{\partial x} - \mathrm{A}z_1\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \mathrm{B}z_1}{\partial y} - \mathrm{B}z_1\frac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{D}z_1 u\right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial \mathrm{B}z_1}{\partial x} + \mathrm{B}z_1\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \mathrm{C}z_1}{\partial y} + \mathrm{C}z_1\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{E}z_1 u\right) = 0. \end{aligned}$$

Les expressions qui figurent dans les parenthèses peuvent être considérées comme les dérivées partielles d'une fonction U que nous appellerons la « fonction associée » à la fonction $u$.

La fonction U est définie par les relations

$$(5)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = BZ_1\frac{\partial u}{\partial x} + CZ_1\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial BZ_1}{\partial x} - u\frac{\partial CZ_1}{\partial y} + EZ_1 u.$$

$$(6)\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -AZ_1\frac{\partial u}{\partial x} - BZ_1\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial AZ_1}{\partial x} + u\frac{\partial BZ_1}{\partial y} - DZ_1 u.$$

Lorsque l'on multiplie de même l'équation (3) par une solution $u_1$ quelconque de l'équation (1), on obtient un produit qui peut se mettre sous la forme

$$(7)\qquad u_1\psi(Z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1\frac{\partial AZ}{\partial x} - AZ\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial BZ}{\partial y} - BZ\frac{\partial u_1}{\partial y} - Du_1 Z\right)$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}\left(-u_1\frac{\partial BZ}{\partial x} + BZ\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1\frac{\partial CZ}{\partial y} + CZ\frac{\partial u_1}{\partial y} + Eu_1 Z\right).$$

La fonction $\zeta$ associée à la fonction $\bar{z}$ est définie par les relations

$$(8)\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -u_1\frac{\partial BZ}{\partial x} - u_1\frac{\partial CZ}{\partial y} + BZ\frac{\partial u_1}{\partial x} + CZ\frac{\partial u_1}{\partial y} + Eu_1 Z_1,$$

$$(9)\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = u_1\frac{\partial AZ}{\partial x} + u_1\frac{\partial BZ}{\partial y} - AZ\frac{\partial u_1}{\partial x} - BZ\frac{\partial u_1}{\partial y} - Du_1 Z.$$

Lorsque l'on remplace dans ces expressions la fonction Z par une solution $Z_1$ de l'équation (3), la fonction associée $\zeta$ prend une valeur $\zeta_1$ définie par les relations

$$(10)\qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = -u_1\frac{\partial BZ_1}{\partial x} - u_1\frac{\partial CZ_1}{\partial y} + BZ_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + CZ_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + Eu_1 Z_1,$$

$$(11)\qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = u_1\frac{\partial AZ_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial BZ_1}{\partial y} - AZ_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - BZ_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - Du_1 Z_1.$$

La fonction $\zeta_1$ nous permet d'éliminer les dérivées des coefficients de l'équation (1) des relations (5) et (6). Nous obtenons pour déterminer la fonction U les expressions

$$(12)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = BZ_1\frac{\partial u}{\partial x} + CZ_1\frac{\partial u}{\partial y} - BZ_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{u}{u_1} - CZ_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{u}{u_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{u}{u_1},$$

$$(13)\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -AZ_1\frac{\partial u}{\partial x} - BZ_1\frac{\partial u}{\partial y} + AZ_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{u}{u_1} + BZ_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{u}{u_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\frac{u}{u_1}.$$

Les valeurs des dérivées de la fonction U peuvent s'écrire

$$(14)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = B u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} + C u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{u}{u_1},$$

$$(15)\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = - A u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} - B u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\frac{u}{u_1}.$$

Ces relations nous donnent

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right) = (\zeta_1 - B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} - C u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1},$$

$$(17)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right) = A u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} + (\zeta_1 + B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1}.$$

Nous posons

$$(18)\qquad U' = \frac{\zeta_1 u}{u_1} - U.$$

Les relations (16) et (17) deviennent, en remplaçant U' par U,

$$(19)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = (\zeta_1 - B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} - C u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1},$$

$$(20)\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = A u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} + (\zeta_1 + B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1}.$$

Les relations (19) et (20) définissent une transformation qui permet de déduire de toute équation (1) intégrable une autre équation intégrable et sa solution. L'élimination de la fonction $u$ nous donne l'équation

$$(21)\qquad \begin{aligned} &A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\zeta_1^2 - (B^2 - AC)u_1^2 Z_1^2}{u_1 Z_1} \\ &\times\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{A u_1 Z_1}{\zeta_1^2 - (B^2 - AC)u_1^2 Z_1^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\zeta_1 + B u_1 Z_1}{\zeta_1^2 - (B^2 - AC)u_1^2 Z_1^2}\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right. \\ &\left. + \left(-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta_1 - B u_1 Z_1}{\zeta_1^2 - (B^2 - AC)u_1^2 Z_1^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{C u_1 Z_1}{\zeta_1^2 - (B^2 - AC)u_1^2 Z_1^2}\right)\frac{\partial U}{\partial y}\right] = 0. \end{aligned}$$

**3.** Les résultats obtenus permettent de construire toutes les équations linéaires intégrables et leurs solutions. Supposons qu'une équation (1) intégrable soit donnée avec sa solution $u$. Si l'on désigne par $u_1$ une solution particulière de l'équation (1) et par $Z_1$ une solution de l'équation adjointe, les relations (10) et (11) nous permettent de calculer la fonction $\zeta_1$. Les relations (18) et (19) nous donnent une fonction U et l'équation (21) l'équation à laquelle

elle satisfait. Les coefficients des termes du second ordre de l'équation (21) sont les mêmes que ceux de l'équation (1). Les propriétés essentielles des équations linéaires sont déterminées par les termes du second ordre.

Nous pouvons continuer l'application de la méthode et déduire de l'équation (21) une autre équation intégrable et sa solution. D'après la manière dont on a calculé les expressions (19) et (20), il résulte que la fonction U peut s'obtenir par des quadratures. La méthode peut donc être appliquée indéfiniment. On ne sera jamais arrêté par des expressions qui ne sont pas intégrables.

Pour appliquer la transformation définie par les relations (19) et (20), on doit calculer une intégrale $Z_1$ de l'équation adjointe à l'équation dont on part. Ce calcul peut être simplifié en déduisant de même les équations adjointes les unes des autres ainsi que leurs solutions par la même méthode.

4. Lorsque l'on remplace dans les relations (5) et (6) la solution $u$ par la valeur particulière $u_1$ on obtient les expressions définissant une fonction $U_1$ :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = BZ_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + CZ_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - u_1\frac{\partial BZ_1}{\partial x} - u_1\frac{\partial CZ_1}{\partial y} + EZ_1 u_1, \tag{22}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = -AZ_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - BZ_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1\frac{\partial AZ_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial BZ_1}{\partial y} - DZ_1 u_1. \tag{23}$$

Nous éliminons au moyen de la fonction $U_1$ les dérivées de la fonction $u_1$ des relations (8) et (9). Nous obtenons les expressions

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -u_1\frac{\partial BZ}{\partial x} - u_1\frac{\partial CZ}{\partial y} + u_1\frac{\partial BZ_1}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} + u_1\frac{\partial CZ_1}{\partial y}\frac{Z}{Z_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{Z}{Z_1}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = u_1\frac{\partial AZ}{\partial x} + u_1\frac{\partial BZ}{\partial y} - u_1\frac{\partial AZ_1}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} - u_1\frac{\partial BZ_1}{\partial y}\frac{Z}{Z_1} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{Z}{Z_1}. \tag{25}$$

On en déduit les expressions plus simples

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -Bu_1Z_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} - Cu_1Z_1\frac{\partial}{\partial y}\frac{Z}{Z_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{Z}{Z_1}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = Au_1Z_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} + Bu_1Z_1\frac{\partial}{\partial y}\frac{Z}{Z_1} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{Z}{Z_1}. \tag{27}$$

Nous pouvons écrire ces relations sous la forme plus pratique pour les applications

$$(28)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_1 Z}{Z_1}-\zeta\right) = (U_1 + B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} + C u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{Z}{Z_1},$$

$$(29)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U_1 Z}{Z_1}-\zeta\right) = -A u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} + (U_1 - B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial y}\frac{Z}{Z_1}.$$

Nous posons

$$(30)\qquad \zeta' = \frac{U_1 Z}{Z_1} - \zeta.$$

La substitution de cette valeur dans les expressions (28) et (29) nous donne en remplaçant $\zeta'$ par $\zeta$ et en changeant le signe de $u_1$ les relations

$$(31)\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = (U_1 - B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} - C u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{Z}{Z_1},$$

$$(32)\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = A u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{Z}{Z_1} + (U_1 + B u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial y}\frac{Z}{Z_1}.$$

Lorsque l'on compare les relations (31) et (32) avec les relations (19) et (20), on remarque que l'on passe des unes aux autres en permutant $U_1$, $\zeta_1$, $u$ et $u_1$ respectivement avec $\zeta_1$, $U_1$, $Z$ et $Z_1$. L'équation à laquelle satisfait la fonction $\zeta$ s'obtient en faisant la même permutation dans l'équation (21). On obtient l'équation

$$(33)\qquad A\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{U_1^2-(B^2-AC)u_1^2Z_1^2}{u_1 Z_1}$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{A u_1 Z_1}{U_1^2-(B^2-AC)u_1^2Z_1^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{U_1 + B u_1 Z_1}{U_1^2-(B^2-AC)u_1^2Z_1^2}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{\partial}{\partial x}\frac{U_1 - B u_1 Z_1}{U_1^2-(B^2-AC)u_1^2Z_1^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{C u_1 Z_1}{U_1^2-(B^2-AC)u_1^2Z_1^2}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] = 0.$$

Pour que les transformations qui se rapportent à l'équation (1) et à son équation adjointe (3) se correspondent exactement, on doit se servir des relations (16) et (17) pour transformer l'équation (1) et des relations (28) et (29) pour l'équation adjointe (3). Les équations transformées s'obtiennent en substituant $\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U$ à U dans l'équation (21) et $\frac{U_1 Z}{Z_1} - \zeta$ à $\zeta$ dans l'équation (33). Suivant le but que l'on se propose, il y a avantage à employer des groupes différents de ces relations.

La transformation obtenue permet de construire toutes les équations linéaires intégrables et leurs solutions en partant des plus simples d'entre elles.

## DEUXIÈME PARTIE.

**5.** La transformation donnée permet de construire toutes les équations **hyperboliques** en partant de la plus simple d'entre elles. Des transformations connues **sont des** cas particuliers.

Nous considérons l'équation hyperbolique **générale**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0. \tag{34}$$

Nous prendrons pour le coefficient B de l'équation (1) la valeur $\frac{1}{2}$. Les relations (10) et (11) nous donnent pour déterminer la fonction $\zeta_1$ les expressions

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(-u_1\frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + bu_1 Z_1, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\ \ u_1\frac{\partial Z_1}{\partial y} - Z_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - au_1 Z_1. \tag{36}$$

Les relations (16) et (17) nous donnent pour déterminer la fonction U les expressions

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right) = \left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right) = \left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1}. \tag{38}$$

**6.** Nous supposons que l'équation (34) est identique à son équation adjointe. L'équation correspondante qui a été étudiée par Moutard peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \lambda u. \tag{39}$$

Les relations (36) et (37) nous montrent que la fonction $\zeta_1$ est constante. Si l'on suppose que $\zeta_1$ est nul et que l'on prenne $Z_1$ égal à $u_1$, les relations (37) et (38) nous donnent, si l'on remplace $\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U$ par $-\frac{u}{u_1}$, les expressions

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1} = \frac{u_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1}, \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1} = \frac{u_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1}. \tag{41}$$

Nous obtenons la transformation donnée par Moutard.

7. Les équations hyperboliques peuvent être construites au moyen d'autres relations qui peuvent être établies directement.

L'équation adjointe de l'équation (34) est

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial Z}{\partial x} - b\frac{\partial Z}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)Z = 0. \tag{42}$$

Supposons que l'on connaisse une solution $Z_1$ de l'équation (42). L'équation (34) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right)Z_1 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)u = 0.$$

La fonction U associée à la fonction $u$ est définie par les relations

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)u, \tag{43}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right)Z_1. \tag{44}$$

Lorsque l'on suppose que l'on connaît une solution $u_1$ de l'équation (35), par un calcul semblable à celui que nous venons de faire, on obtient pour la fonction associée $\zeta$ à la fonction Z de l'équation adjointe (42) les expressions

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - bZ\right)u_1, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + au_1\right)Z. \tag{46}$$

Ces relations permettent d'éliminer les quantités $a$ et $b$ des relations (43) et (44). Pour ne pas multiplier le nombre des fonctions que présentent ces relations, nous supposerons que Z est égal à $Z_1$ dans les expressions (45) et (46). Nous désignerons par $\zeta_1$ la valeur que prend $\zeta$. Nous avons

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)u_1, \tag{47}$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + au_1\right)Z_1. \tag{48}$$

La substitution des valeurs de $a$ et de $b$ dans les expressions (43) et (44) de U nous donne les relations

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right) = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1}, \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right) = (\zeta_1 - u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1}. \tag{50}$$

8. Nous appliquons les relations obtenues à la recherche des équations qui ont leurs invariants égaux à l'ordre près et auxquelles correspondent des suites de Laplace présentant un nombre pair d'équations. Nous avons étudié ces équations dans notre Thèse de doctorat (Paris, 1925). Les équations peuvent se mettre sous la forme réduite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0. \tag{51}$$

L'équation adjointe de cette équation est égale à sa première transformée de Laplace et est

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x\,\partial y} - \lambda\right) Z = 0. \tag{52}$$

Les solutions des équations (51) et (52) sont reliées entre elles par la relation

$$Z = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{53}$$

Les relations (47) et (48) nous donnent pour les dérivées de $\varphi_1$ les valeurs

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = u_1^2, \tag{54}$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2. \tag{55}$$

L'élimination de $u_1$ entre ces relations nous donne pour l'équation à laquelle satisfait $\zeta_1$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4\lambda \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}. \tag{56}$$

La valeur de la fonction $\zeta_1$ est

$$\zeta_1 = \int u_1^2\,dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{57}$$

La fonction $\zeta$ déterminée par les relations (45) et (46) satisfait aussi à l'équation (56) lorsque l'on suppose que Z et $u_1$ sont reliées par la relation (53). La fonction U déterminée par les relations (43) et (46) satisfait de même à l'équation (56) lorsque l'on suppose que $Z_1$ et $u_1$ sont reliées par la relation (53). Nous pouvons exprimer $u_1$ et $Z_1$ au moyen de $\zeta_1$ dans les relations (49) et (50). Nous posons

(58) $$\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U = \frac{\zeta_1}{u_1} U'.$$

Les relations (49) et (50) peuvent s'écrire en remplaçant U' par U,

(59) $$\frac{\partial}{\partial x} \frac{U}{\sqrt{\dfrac{\partial \frac{1}{\zeta_1}}{\partial x}}} = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{u}{\sqrt{\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x}}},$$

(60) $$\frac{\partial}{\partial y} \frac{U}{\sqrt{\dfrac{\partial \frac{1}{\zeta_1}}{\partial x}}} = - \frac{\zeta_1^3 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{\zeta_1}}{\partial x\, \partial y}}{\dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x\, \partial y}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{u}{\sqrt{\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x}}}.$$

Nous retrouvons la transformation de M. Goursat que nous avons utilisée pour construire les équations qui ont leurs invariants à l'ordre près et auxquelles correspondent des suites de Laplace présentant un nombre pair d'équations. Les relations (59) et (60) ne changent pas si l'on remplace $\zeta_1$ par $\frac{\zeta_1}{1}$ et que l'on permute $u$ et U.

9. Les termes de l'équation hyperbolique peuvent être groupés autrement. Les expressions qui définissent les fonctions associées correspondant à $u$ et $z$ s'obtiennent en permutant $x$ et $y$ et $a$ et $b$ dans les relations (43) et (44). La fonction $U_1$ associée à $u$ est définie par les relations

(61) $$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right) Z_1,$$

(62) $$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right) u.$$

Les relations (43) et (44) et les relations (61) et (62) montrent que les fonctions U et $U_1$ associées à la fonction $u$ ne sont pas indépendantes. Ces relations montrent que U et $U_1$ sont reliées par la condition

$$U + U_1 = Z_1 u + C. \tag{63}$$

La quantité C est une constante arbitraire.

La fonction $\zeta'$ associée à la fonction Z est définie par les relations

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + b u_1\right) Z_1, \tag{64}$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - a Z\right) u_1. \tag{65}$$

Les quantités $\zeta$ et $\zeta'$ sont reliées par la relation

$$\zeta + \zeta' = u_1 Z + C_1. \tag{66}$$

La quantité $C_1$ est une constante arbitraire.

Lorsque l'on remplace dans les expressions de U, $U_1$, $\zeta$ et $\zeta'$, $u$ par $u_1$ et Z par $Z_1$, ces fonctions prennent des valeurs

$$(U) = \zeta_1, \tag{67}$$

$$(U_1) = (\zeta'). \tag{68}$$

10. Les relations que nous avons obtenues nous permettent de construire les équations hyperboliques intégrables en partant de la plus simple d'entre elles et leurs solutions. Ces relations nous permettent également de montrer que l'on peut ramener une équation d'un certain rang par rapport aux variables à une équation de rang inférieur. Par conséquent on peut ramener une équation hyperbolique d'un rang quelconque par rapport aux variables à la plus simple de ces équations.

11. Pour simplifier l'écriture et rendre plus claires les démonstrations qui vont suivre, nous poserons quelques définitions.

Nous dirons que les relations (61) et (62) définissent une transformation en $x$ et nous la désignerons par $T_x$.

Nous dirons de même que les relations (43) et (44) définissent une transformation en $y$ que nous désignerons par $T_y$. La fonction U que l'on obtient par l'application de cette transformation sera désignée dorénavant par $U_{-1}$.

Nous dirons encore que les relations (16) et (17) définissent une transformation en $x$ et en $y$ et nous la désignerons par $T_{x,y}$.

Les fonctions que l'on obtient par l'application de ces transformations sont désignées par $U_1$ et $U_{-1}$ pour les distinguer des fonction $u_1$ et $u_{-1}$ que l'on obtient par l'application des transformations de Laplace.

12. Les transformations $T_x$ en $x$ élèvent le rang d'une intégrale par rapport à la variable $x$ d'une unité en règle générale et laissent dans la règle le rang de l'intégrale par rapport à $y$ sans changement. C'est ce que nous allons d'abord montrer.

Considérons donc l'équation (34) et supposons que sa solution soit de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$. Nous pouvons représenter cette solution par l'expression

$$u = \lambda X + \lambda_1 X' + \ldots + \lambda_m X^{(m)} + \mu Y + \mu_1 Y' + \ldots + \mu_n Y^{(n)}. \tag{69}$$

Pour simplifier l'écriture et les démonstrations nous posons

$$f(u) = \lambda u + \lambda_1 u' + \ldots + \lambda_m u^{(m)}, \tag{70}$$

$$f_1(u) = \mu u + \mu_1 u' + \ldots + \mu_n u^{(n)}. \tag{71}$$

La solution $u$ représentée par l'expression (69) peut donc s'écrire avec ces notations

$$u = f(X) + f_1(Y). \tag{72}$$

Nous désignerons par $g(u)$ et $g_1(u)$ les équations adjointes des équations (70) et (71). Nous avons les relations

$$v f(u) - u g(v) = \frac{\partial}{\partial x} B(u, v), \tag{73}$$

$$v f_1(x) = u g_1(v) = \frac{\partial}{\partial y} B_1(u, v), \tag{74}$$

les expressions $B(u, v)$ et $B_1(u, v)$ étant bilinéaires par rapport à $u$ et à $v$.

Lorsque l'on remplace dans les relations (61) et (62) $u$ par l'expression (72), on obtient deux groupes de termes qui contiennent respectivement la fonction X et ses dérivées et la fonction Y et ses dérivées. Nous désignerons les parties correspondantes de la fonction $U_1$ par $(U_1)x$ et $(U_1)y$. Nous avons donc par définition la relation

$$(75)\qquad U_1 = (U_1)_x + (U_1)_y.$$

Nous calculerons séparément les valeurs des fonctions $(U_1)_x$ et $(U_1)_y$.

Nous avons d'abord, lorsque l'on remplace dans les relations (61) et (62) la fonction $u$ par l'expression $f(X)$, la valeur de $(U_1)_x$ :

$$(76)\qquad (U_1)_x = \int \left[\frac{\partial f(X)}{\partial x} + b f(X)\right] Z_1\, dx + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - a Z_1\right) f(X)\, dy.$$

Nous pouvons intégrer par parties et mettre cette relation sous la forme

$$(77)\qquad (U_1)_x = Z_1 f(X) - \int \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) f(X)\, dx + \left[\frac{\partial f(X)}{\partial y} + a f(X)\right] Z_1\, dy.$$

L'expression sous le signe d'intégration étant par définition une différentielle exacte pour toutes les valeurs de la fonction arbitraire X, nous pourrons lui appliquer le théorème qu'a donné Darboux pour les expressions de ce genre (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 165). Nous pouvons remplacer dans la relation (73) $u$ par X et $v$ par $\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right)$.

La relation devient

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) f(X) = X g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) + \frac{\partial}{\partial x} B\left(X_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right).$$

La substitution de cette valeur dans la relation (77) nous donne pour déterminer $(U_1)_x$ l'expression

$$(78)\qquad (U_1)_x = Z_1 f(X) - B\left(X_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) - \int X g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) dx + \left[\frac{\partial f(X)}{\partial y} + a f(X) - \frac{\partial}{\partial y} B_1\left(X_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right)\right] dy.$$

L'expression sous le signe d'intégration devant être une différentielle exacte, d'après le théorème de Darboux on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) = 0, \tag{79}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(X)}{\partial y} + a f(X) - \frac{\partial}{\partial y} B\left(X_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right)\right] = 0. \tag{80}$$

L'intégrale Z de l'équation adjointe à l'équation (34) est de rang $n+1$ par rapport à $x$ et de rang $m+1$ par rapport à $y$. Par conséquent si l'on désigne par $X_1$ et $Y_1$ des valeurs particulières des fonctions arbitraires que comporte la solution $Z_1$ de l'équation adjointe à l'équation (34), le polynome $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right)$ doit être indépendant de $y$ et l'ordre de la dérivée de $X_1$ qu'il présente est $m+n+1$. Ce polynome n'est pas nul en général comme on peut s'en rendre compte en calculant le coefficient du terme qui présente la plus haute dérivée de $X_1$.

Nous posons

$$X g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right) = X'_2. \tag{81}$$

La fonction $(U_1)_x$ a donc pour valeur, si nous substituons X à $X_2$,

$$(U_1)_x = Z_1 f\left[\frac{X'}{g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right)}\right] - B\left[\frac{X'}{g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right)} \frac{\partial Z_1}{\partial x} - b Z_1\right] - X. \tag{82}$$

La fonction $f(u)$ présentant les dérivées de $u$ par rapport à $x$ jusqu'à l'ordre $m$, la quantité $(U_1)x$ contient les dérivées de X jusqu'à l'ordre $m+1$.

Nous calculerons maintenant la valeur de la fonction $(U_1)_y$.

Nous obtenons la valeur de $(U_1)_y$ si nous substituons dans les relations (61) et (62) $f_1(Y)$ à $u$. Nous avons

$$(U_1)_y = \int\left[\frac{\partial f_1(Y)}{\partial x} + b f_1(Y)\right] Z_1\, dx + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - a Z_1\right) f_1(Y)\, dy. \tag{83}$$

La relation (74) donne lorsque l'on remplace $u$ par Y et $v$ par $\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - a Z_1\right)$ l'expression

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - a Z_1\right) f_1(Y) = Y g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - a Z_1\right) + \frac{\partial}{\partial y} B_1\left(Y_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} - a Z_1\right).$$

Nous obtenons donc $(U_1)_y$ en intégrant par parties la valeur

$$(84)\quad (U_1)_y = B_1\left(Y_1\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right) + \int\left[\frac{\partial f_1(Y)}{\partial x} - bf_1(Y) - \frac{\partial}{\partial x}B_1\left(Y_1\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)\right]dx + Yg_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)dy.$$

La quantité sous le signe d'intégration étant une différentielle exacte, le théorème de Darboux nous donne les équations de condition

$$(85)\quad \frac{\partial}{\partial x}g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right) = 0,$$

$$(86)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f_1(Y)}{\partial x} + bf_1(Y) - \frac{\partial}{\partial x}B_1\left(Y_1\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)\right] = 0.$$

La quantité $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ ne dépend donc pas de $x$ et l'on montrerait par un raisonnement semblable à celui qui a été donné pour la fonction $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)$ que cette quantité n'est pas nulle en général.

Nous posons donc

$$(87)\quad Yg_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right) = Y'_2.$$

La relation (84) donne pour la quantité $(U_1)_y$ lorsque l'on remplace $Y_2$ par $Y$ la valeur

$$(88)\quad (U_1)_y = B_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)}\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right] + Y.$$

Le polynome $B_1(u, v)$ présentant les dérivées de $u$ et de $v$ jusqu'à l'ordre $n-1$, la fonction $(U_1)y$ est donc de rang $n+1$ par rapport à la fonction Y.

Lorsque l'on remplace dans la relation (75) les fonctions $(U_1)_x$ et $(U_1)_y$ par les valeurs données par les relations (82) et (88), on obtient pour la fonction $U_1$ associée à la fonction $u$ qui est la solution de l'équation (34) l'expression

$$(89)\quad U_1 = Z_1 f\left[\frac{X'}{g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)}\right] - B\left[\frac{X'}{g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)}\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right] - X$$
$$+ B_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)}\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right] + Y.$$

Comme nous l'avons démontré en règle générale le rang de la fonction $U_1$ par rapport à la fonction arbitraire X dépasse celui de la fonction $u$ d'une unité et son rang par rapport à la fonction arbitraire Y n'a pas changé.

Nous concluons donc de ce qui précède qu'une transformation $T_x$ définie par les relations (61) et (62) permet de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution une autre équation hyperbolique intégrable et sa solution, le rang de la solution de la nouvelle équation par rapport à la fonction arbitraire X ayant en général augmenté d'une unité et son rang par rapport à la fonction arbitraire Y n'ayant pas changé.

Les transformations $T_x$ nous permettent de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution une suite d'équations hyperboliques intégrables et leurs solutions. Le rang de ces solutions par rapport à la fonction arbitraire X augmente d'une unité d'une équation à l'autre et leur rang par rapport à la fonction arbitraire Y reste constant en général.

**13.** Des considérations semblables à celles que nous avons faites sur la transformation $T_x$ pourraient être données sur la transformation $T_y$ définie par les relations (43) et (44). Nous pouvons donc nous borner à donner les résultats. De toute équation hyperbolique intégrable et de sa solution une transformation $T_y$ permet de déduire une autre équation hyperbolique intégrable et sa solution. Le rang de la solution de la nouvelle équation par rapport à la fonction arbitraire X n'a pas changé et son rang par rapport à la fonction arbitraire Y a augmenté d'une unité en général.

**14.** La conclusion qui résulte des considérations précédentes est que l'application répétée des transformations $T_x$ et $T_y$ permet de déduire de toute équation hyperbolique intégrable et de sa solution une suite d'équations hyperboliques et leurs solutions. Le rang de ces solutions par rapport aux fonctions arbitraires X et Y augmente en général indéfiniment. Par conséquent si l'on part de l'équation hyperbolique la plus simple l'application répétée des transformations $T_x$ et $T_y$ permet d'en déduire une suite d'équations intégrables et leurs solutions, le nombre caractéristique de ces équations augmentant indéfiniment.

Pour démontrer que les transformations $T_x$ et $T_y$ permettent de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions, il reste à prouver que ces transformations permettent de passer inversement d'une équation intégrable quelconque et de sa solution à l'équation la plus simple et à sa solution.

15. Le rang de la solution de l'équation (34) a été supposé égal à $m+1$ par rapport à $x$ et à $n+1$ par rapport à $y$. Cette solution peut être représentée, ainsi que Darboux l'a montré (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 48), par un déterminant :

$$(90)\quad u = \mathrm{M}\begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(m)} & Y & Y' & \dots & Y^{(n)} \\ x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m+n+1} & x'_{m+n+1} & \dots & x^{(m)}_{m+n+1} & y_{m+n+1} & y'_{m+n+1} & \dots & y^{(n)}_{m+n+1} \end{vmatrix},$$

dans lequel les quantités $x_i$ sont des fonctions de $x$, les quantités $y_j$ des fonctions de $y$ et M une fonction de $x$ et de $y$ qui ne joue pas de rôle dans la démonstration. Lorsque l'on donne aux fonctions $x_i$ et $y_j$ toutes les valeurs possibles, on obtient toutes les équations dont le nombre caractéristique est $m+n$.

Nous pouvons vérifier d'abord au moyen de cette expression de $u$ qu'une transformation $T_x$ nous permet de déduire d'une équation hyperbolique une autre équation hyperbolique dont le rang de la solution est augmenté d'une unité par rapport à $x$ et dont le rang par rapport à $y$ n'a pas changé. La valeur de $u$ permet de préciser la démonstration.

La solution de l'équation adjointe à l'équation (34) peut être représentée par un déterminant du même ordre que celui de la solution $u$, les nombres $m$ et $n$ devant être permutés. Nous représenterons la solution de l'équation adjointe par le déterminant

$$(91) \qquad Z = N \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(n)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_1 & \xi'_1 & \dots & \xi_1^{(n)} & \eta_1 & \eta'_2 & \dots & \eta_1^{(m)} \\ \xi_2 & \xi'_2 & \dots & \xi_2^{(n)} & \eta_2 & \eta'_1 & \dots & \eta_2^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{m+n+1} & \xi'_{m+n+1} & \dots & \xi_{m+n+1}^{(n)} & \eta_{m+n+1} & \eta'_{m+n+1} & \dots & \eta_{m+n+1}^{(m)} \end{vmatrix},$$

les quantités $\xi_i$ sont des fonctions de $x$, les quantités $\eta_j$ des fonctions de $y$ et N une fonction de $x$ et de $y$.

Lorsque l'on remplace dans la valeur de $u$ (90) les fonctions X et Y par l'un quelconque des $m+n+1$ couples de valeurs $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_{m+n+1}, y_{m+n+1})$, cette fonction $u$ s'annule. Les relations (61) et (62) nous montrent que, en négligeant une constante d'intégration, la fonction $U_1$ s'annule également pour ces mêmes valeurs de X et de Y. La relation (89) montre que la fonction $U_1$ s'annule encore lorsque l'on remplace X et Y par l'unité. Pour établir la relation (89), nous avons supposé que le polynome en $X_1$, $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)$, et le polynome en $Y_1$, $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$, ne sont pas nuls. Nous pouvons montrer que ce n'est pas le cas en général.

La solution de l'équation adjointe à l'équation (34) que nous avons désignée par $Z_1$ s'obtient en donnant à X et à Y dans l'expression (91) des valeurs particulières $X_1$ et $Y_1$. Lorsque l'on remplace les fonctions X et Y par l'un quelconque des couples de valeurs $(\xi_1, \eta_1)$, $(\xi_2, \eta_2)$, ..., $(\xi_{m+n+1}, \eta_{m+n+1})$ la valeur de Z est nulle.

Nous poserons

$$(92) \qquad g\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - bZ\right) = \varphi(x).$$

Lorsque la fonction Z est nulle, la fonction $g\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - bZ\right)$ qui est linéaire par rapport à $\frac{\partial Z}{\partial x} - bZ$ s'annule aussi et comme elle ne dépend pas de $y$, il suffit de remplacer dans cette fonction X par une des valeurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n+1}$ ou par une combinaison linéaire de ces valeurs, pour qu'elle s'annule. La fonction $\varphi(x)$

admet donc les racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n+1}$ et les combinaisons linéaires de ces valeurs que nous pouvons représenter par l'expression

$$(93) \qquad \xi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_{m+n+1} \xi_{m+n+1},$$

les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+n+1}$ étant des constantes. Par conséquent, lorsque la quantité $X_1$ n'est pas égale à l'une des expressions $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n+1}$ ou $\xi$, la fonction $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)$ n'est pas nulle et la valeur de $(U_1)_x$ a bien la forme donnée par la relation (82).

Des considérations semblables à celles que nous avons données pour la fonction $(U_1)x$ peuvent être faites sur la fonction $(U_1)y$. Nous poserons

$$(94) \qquad g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right) = \psi(y).$$

La fonction $\psi(y)$ s'annule lorsque la quantité $Y_1$ de la fonction $Z_1$ est égale à l'une des valeurs $\eta_1, \eta_2, \eta_{m+n+1}$ ou à une combinaison linéaire de ces valeurs

$$(95) \qquad \eta = \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2 + \ldots + \beta_{m+n+1} \eta_{m+n+1},$$

les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+n+1}$ étant des constantes.

Lorsque la quantité $Y_1$ n'est pas égale à l'une des expressions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+n+1}$ ou $\eta$, la fonction $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ n'est pas nulle et la valeur de $(U_1)y$ a bien la forme donnée par la relation (88).

La conclusion qui résulte de ce qui précède est que lorsque les quantités $X_1$ et $Y_1$ que présente la fonction $Z_1$ ont été choisies de manière que les fonctions $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)$ et $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ ne s'annulent pas, la fonction $U_1$ s'annule pour les $m+n+2$ couples de valeurs $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{m+n+1}, y_{m+n+1}), (1, 1)$ et est de rang $m+2$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$.

Les transformations que nous avons désignées par $T_x$ permettent donc de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une équation hyperbolique intégrable dont la solution est en général de rang $m+a$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$.

Des considérations entièrement semblables à celles que nous avons données sur les transformations $T_x$ pourraient être faites sur les transformations que nous avons désignées par $T_y$. Nous pouvons donc nous contenter de donner le résultat.

Les transformations $T_y$ permettent de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une équation hyperbolique intégrable dont la solution est en général de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+a$ par rapport à $y$.

Par des applications successives des transformations $T_x$ et $T_y$, on peut donc déduire d'une équation hyperbolique et de sa solution une série d'équations hyperboliques et leur solution, le rang de ces solutions par rapport à $x$ et leur rang par rapport à $y$ devenant de plus en plus grand.

**16.** Les considérations précédentes permettent de démontrer facilement que les transformations $T_x$ et $T_y$ permettent de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ d'autres équations hyperboliques intégrables dont les solutions sont de rang plus petit que $m+1$ par rapport à $x$ et de rang plus petit que $n+1$ par rapport à $y$.

Pour éviter les répétitions nous nous occupons seulement des transformations $T_x$. Le raisonnement serait tout à fait semblable pour les transformations $T_y$.

Nous démontrerons que par un choix convenable des fonctions $X_1$ et $Y_1$ que présente la solution $Z_1$ de l'équation adjointe de l'équation hyperbolique donnée, la transformation $T_x$ correspondante permet de déduire de cette équation et de sa solution que nous supposons de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une équation hyperbolique dont la solution est de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n$ par rapport à $y$.

Lorsque l'on prend pour $X_1$ une valeur donnée par la relation (93), la fonction $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)$ est nulle et la quantité sous le signe d'intégration de l'expression donnant la valeur de la fonction $(U_1)_x$ est une différentielle exacte. Nous obtenons donc pour la fonction $(U_1)_x$ une expression dont le rang est $m+1$ par rapport à $x$.

Lorsque l'on prend de même pour $y_1$ une valeur donnée par la relation (95), la fonction $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ est nulle et la quantité sous le signe d'intégration de l'expression (83) donnant la valeur de la fonction $(U_1)_y$ est une différentielle exacte. Les valeurs prises pour $X_1$ et $Y_2$ ne doivent pas être les mêmes combinaisons des fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n+1}$ et des fonctions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+n+1}$, parce que la fonction $Z_1$ serait nulle. La transformation $T_x$ et toutes les relations que nous en avons déduites n'auraient plus de sens. La fonction $(U_1)_y$ est donc de rang $n-1$ par rapport à $y$.

La fonction $U_1$ est donc de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n$ par rapport à $y$ et notre proposition démontrée.

**17.** Les propriétés des transformations $T_x$ que nous avons données peuvent être combinées de diverses manières. Nous avons montré que dans la règle, ces transformations permettent de déduire une équation hyperbolique intégrale et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une équation intégrable dont la solution est de rang $m+2$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$. Lorsque l'on choisit convenablement la quantité $X_1$, on peut conserver le rang $m+1$ de la solution de la nouvelle équation par rapport à $x$ et la transformation donne une autre équation dont la solution est de même rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ que l'équation d'où l'on est parti. Par un choix convenable de la quantité $Y_1$ le rang de la solution de l'équation transformée peut être rendu plus petit.

Nous avons donc deux nouvelles transformations qui donnent deux nouvelles équations. Lorsque la quantité $X_1$ est quelconque, la transformation nous donne une nouvelle équation dont la solution est de rang $m+2$ par rapport à $x$ et de rang $n$ par rapport à $y$. Le nombre caractéristique de l'équation n'a pas changé. Lorsque l'on choisit convenablement les fonctions $X_1$ et $Y_1$, nous avons démontré que la solution de la nouvelle équation peut être de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n$ par rapport à $y$.

**18.** Des considérations semblables à celles qui précèdent peuvent être données sur les transformations $T_y$. Nous ne donnons que les résultats.

Les transformations $T_y$ permettent de déduire ainsi que nous l'avons déjà énoncé d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une équation hyperbolique dont la solution est en général de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+2$ par rapport à $y$.

Lorsque l'on choisit convenablement la fonction $X_1$ on peut construire une transformation $T_y$ qui permet de déduire d'une équation hyperbolique et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une nouvelle équation hyperbolique dont la solution est de rang $m$ par rapport à $x$ et de rang $n+2$ par rapport à $y$.

Lorsque l'on choisit au contraire convenablement la fonction $Y_1$, on peut construire une transformation $T_y$ qui permet de déduire d'une équation hyperbolique et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une autre équation hyperbolique dont la solution est de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$. Le rang des solutions de l'équation dérivée et de l'équation transformée par rapport à $x$ et leur rang par rapport à $y$ sont donc les mêmes.

Lorsque la valeur des fonctions $X_1$ et $Y_1$ est choisie convenablement, on peut construire une transformation $T_y$ qui permet de déduire d'une équation hyperbolique et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$ une équation hyperbolique dont la solution est de rang $m$ par rapport à $x$ et de rang $n+1$ par rapport à $y$.

19. Des transformations $T_x$ convenablement choisies permettent donc de déduire d'une équation hyperbolique donnée et de sa solution des équations hyperboliques dont le rang des solutions par rapport à $y$ devient de plus en plus petit.

Des transformations $T_y$ convenablement choisies permettent de même de déduire d'une équation hyperbolique et de sa solution des équations hyperboliques dont le rang des solutions par rapport à $x$ devient de plus en plus petit.

Par conséquent par l'application des transformations $T_x$ et $T_y$, on peut déduire, d'une équation hyperbolique donnée et de sa solution, des équations hyperboliques dont les solutions sont de rang de plus en plus petit par rapport à $x$ et de rang de plus en plus petit par rapport à $y$. Ces rangs peuvent être diminués jusqu'à devenir égaux à l'unité. Les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions peuvent être ramenées à l'équation hyperbolique la plus simple et à sa solution.

La conclusion qui résulte des considérations précédentes est que les transformations $T_x$ et les transformations $T_y$ permettent de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions en partant de la plus simple d'entre elles et de sa solution. Nous avons démontré en effet que ces transformations permettent de déduire de la plus simple des équations hyperboliques et de sa solution des équations hyperboliques dont les solutions sont de rang de plus en plus grand par rapport à $x$ et de rang de plus en plus grand par rapport à $y$. Nous avons démontré de plus que ces transformations permettent de déduire d'une équation hyperbolique donnée et de sa solution des équations hyperboliques dont les solutions sont de rang de plus en plus petit par rapport à $x$ et de rang de plus en plus petit par rapport à $y$. Ces rangs peuvent être diminués jusqu'à devenir égaux à l'unité. L'équation hyperbolique correspondante est évidemment l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions peuvent donc toutes être déduites de la plus simple d'entre elles et de sa solution.

(*A suivre.*)