Bulletin de la S. M. F.

André Marchaud

Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES CHAMPS DE DEMI-DROITES ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

PAR M. ANDRÉ MARCHAUD.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire a pour objet l'étude des champs de demi-droites en vue des applications à la théorie des équations différentielles du premier ordre de variables réelles. Cette étude nous conduira pour l'existence des intégrales d'un système

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

à une condition suffisante beaucoup moins restrictive que celles données jusqu'ici. La condition obtenue peut en effet être réalisée alors même que les fonctions sont discontinues sur un ensemble partout dense, ce qui n'empêche les intégrales d'avoir une tangente partout continue.

Je vais esquisser rapidement les notions introduites et les principaux résultats obtenus. Pour fixer le langage, je me placerai dans un espace (euclidien) à trois dimensions.

On a défini un *champ* de demi-droites sur un ensemble ponctuel (R) lorsqu'à chaque point m de (R) on a fait correspondre *une* demi-droite $\Delta(m)$ issue de ce point. Considérons un domaine D, contenant des points de (R), et menons par un point fixe O les parallèles $O\delta$ aux demi-droites du champ dont le point d'application appartient à D. Si le champ n'est pas trop irrégulier dans D, il pourra se faire que l'ensemble $\{O\delta\}$ soit contenu dans un demi-cône de révolution (non plat). Je dirai alors que le champ est *borné en direction dans* D, et j'appellerai *borne convexe du champ* dans ce domaine le plus petit demi-cône convexe contenant l'ensemble $\{O\delta\}$. Cette borne convexe est définie à une translation près, on représentera par $\mathcal{B}[\Delta(m), D, O]$ celle qui a pour sommet O.

L'étude locale du champ va se faire par le procédé habituel. On dira que le champ est *borné en direction en un point* m_0 de (R), s'il l'est dans une sphère, de centre m_0, suffisamment petite. Considérons alors une suite de sphères $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, centrées sur m_0, le rayon de S_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et formons la suite des bornes convexes $\{\mathcal{B}[\Delta(m), S_n, m_0]\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. L'ensemble commun à ces demi-cônes convexes de sommet m_0 est un demi-cône convexe (la *limite* de la suite) qu'on appellera la *borne convexe du champ en* m_0. Cette borne est indépendante de la suite des sphères ([1]), elle se réduit à $\Delta(m_0)$ si le champ est *continu* en m_0, et réciproquement. On la représentera par $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$.

La proposition suivante mettra en évidence l'importance de la notion de borne convexe.

Si un arc simple $\overset{\frown}{ab}$, *situé sur* (R), *possède en chacun de ses points intérieurs une semi-tangente à droite dans la borne convexe du champ en ce point, alors partout, sauf en* b, *toutes les semi-tangentes à droite sont dans la borne convexe au point considéré.*

Avec la terminologie adoptée par M. G. Bouligand on dira : si en tout point intérieur à l'arc le contingent postérieur possède un rayon dans la borne convexe du champ en ce point, partout, sauf en b, le contingent postérieur est contenu dans la borne convexe.

Ce résultat suggère l'idée de serrer de plus près l'étude locale du champ en considérant non pas *tout* le voisinage de chaque point, mais seulement la partie comprise dans un demi-cône légèrement extérieur à la borne convexe. On est ainsi conduit à considérer des bornes convexes successives. Donnons-nous une suite Γ_1,

([1]) La limite serait la même si l'on considérait une suite de domaines, ayant chacun m_0 à son intérieur, pourvu que les diamètres de ces domaines tendent vers zéro.

$\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ de demi-cônes convexes de sommet m_0, *intérieurs* les uns aux autres, ayant pour limite $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. Appelons D_n le domaine commun à S_n et Γ_n et formons la suite $\{\mathcal{B}[\Delta(m), D_n, m_0]\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Cette suite a pour limite un demi-cône convexe $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$ contenu dans $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$, mais pas nécessairement confondu avec lui. $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$ est indépendant des suites $\{S_n\}$ et $\{\Gamma_n\}$. Or il se trouve que cette nouvelle borne $\mathcal{B}_1$ peut remplacer $\mathcal{B}$ dans la conclusion de la proposition précédente, l'hypothèse portant toujours sur $\mathcal{B}$. Il y aura donc intérêt à procéder avec $\mathcal{B}_1$ comme on l'a fait avec $\mathcal{B}$, et ainsi de suite. On formera de la sorte une suite de bornes convexes successives,

$$\mathcal{B}[\Delta(m), m_0], \quad \mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0], \quad \ldots, \quad \mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0], \quad \ldots$$

telles que chacune d'elles contient la suivante, et bien entendu $\Delta(m_0)$. Cette suite a une limite $\mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0]$, que j'appelle le *résidu convexe* du champ en m_0. C'est en quelque sorte la plus petite borne convexe du champ sur lui-même, parce qu'en recommençant sur $\mathcal{B}_\omega$ l'opération faite sur $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, ..., on retrouve $\mathcal{B}_\omega$. Si deux bornes consécutives sont identiques ou si l'une d'elles se réduit à $\Delta(m_0)$, il est évidemment inutile de continuer, $\mathcal{B}_\omega$ est obtenue. Il est facile de construire des exemples où les bornes $\mathcal{B}_p$ sont toutes différentes.

Un cas particulier important est celui où $\mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0]$ se réduit à $\Delta(m_0)$. Je dirai alors que le champ est *régulier* en m_0. On pourrait dire aussi que le champ est continu sur lui-même. Je préfère adopter la première expression parce que la « régularité » ne possède pas certaines propriétés classiques de la « continuité » : par exemple, une suite uniformément convergente de champs réguliers en m_0 n'a pas forcément pour limite un champ régulier en ce point.

Voici deux résultats choisis parmi ceux du Mémoire qui me paraissent à eux seuls justifier l'introduction des notions précédentes. Le premier est une extension de la proposition signalée plus haut.

Si un arc simple possède en chaque point intérieur une semi-tangente à droite dans la borne convexe en ce point d'un *champ régulier sur l'arc, celui-ci admet deux demi-tangentes opposées sauf peut-être sur un ensemble dénombrable et partout une demi-tangente à droite continue à droite.*

Le second donnera une condition suffisante pour l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre. Géométriquement, le problème posé par un système tel que (1) est le suivant. Étant donné un champ $\Delta(m)$ défini dans une certaine région de l'espace, trouver les courbes de cette région admettant, en chacun de leurs points $\overline{m}$, la demi-droite $\Delta(\overline{m})$ et son opposée comme demi-tangentes. Ce problème admet des solutions pourvu que le champ $\Delta(m)$ et le champ opposé [c'est-à-dire formé des demi-droites opposées à celles de $\Delta(m)$] soient *réguliers* tous les deux, hypothèse beaucoup moins restrictive que la continuité.

D'une manière précise on a l'énoncé suivant :

A. *Si un champ $\Delta(m)$ est régulier dans une sphère de centre a, il existe un arc simple, traversant a, qui admet, en chacun de ses points $\overline{m}$, $\Delta(\overline{m})$ pour demi-tangente à droite continue à droite, et sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable deux demi-tangentes opposées;*

B. *Si le champ opposé à $\Delta(m)$ est lui aussi régulier dans la sphère, l'arc possède partout deux demi-tangentes opposées continues.*

Dans tous les énoncés précédents on aurait pu ajouter que les arcs dont il s'agit sont nécessairement rectifiables.

La plupart des résultats du Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris le 20 novembre 1933 (1). Ils sont valables dans un espace euclidien quelconque.

I. — Notions préliminaires.

1. Comme les demi-cônes convexes joueront dans ce travail un rôle fondamental, je commencerai par en rappeler quelques propriétés, d'ailleurs intuitives, dont nous aurons besoin. Il s'agira

---

(1) *Comptes rendus*, t. 197, p. 1176.

d'ensembles situés dans un *espace euclidien* que, pour fixer le langage, nous supposerons *à trois dimensions*.

Un demi-cône convexe C, de sommet O, est un ensemble fermé de demi-droites issues de ce point, ne contenant aucune droite, et tel que si deux points A et B appartiennent à l'ensemble il en est de même du segment AB ([1]). Une demi-droite d'origine O est intérieure à C si elle est l'axe d'un demi-cône de révolution dont les génératrices sont dans C. Un demi-cône convexe de sommet O est intérieur à C lorsque toutes ses demi-droites le sont.

Un trièdre, un angle polyèdre convexe, l'angle de deux demi-droites non opposées sont des demi-cônes convexes ([2]). Il sera commode de considérer aussi une demi-droite unique comme un demi-cône convexe.

La définition précédente est un peu plus restrictive que celle que j'avais adoptée dans mon Mémoire *sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles* ([3]), où la condition « ne contenant aucune droite » est remplacée par « ne remplissant pas un demi-espace » (un dièdre est alors un demi-cône convexe, ce qui n'a pas lieu avec la définition donnée plus haut). Les résultats du travail cité s'appliqueront donc *a fortiori* aux demi-cônes considérés ici.

2. Soient C, C′ des demi-cônes convexes de même sommet. Pour simplifier l'écriture j'utiliserai les notations suivantes :

$$C \leqq C' \qquad \text{ou} \qquad C' \geqq C$$

exprime que C est *contenu* dans C′;

$$C < C' \qquad \text{ou} \qquad C' > C$$

exprime que C est *intérieur* à C′.

Si C et C′ sont confondus, on écrira

$$C = C'.$$

([1]) Une telle figure est appelée ordinairement un *cône* convexe. Je préfère réserver cette expression aux ensembles de *droites*.

([2]) Il s'agit bien entendu de trièdre, d'angle polyèdre solides et d'angle considéré comme portion de plan.

([3]) *Journ. de Math. pures et appl.*, t. XII, fasc. IV, 1933, p. 415.

Ce Mémoire, auquel je renverrai à plusieurs reprises, sera désigné dorénavant par A. M.

Ces relations possèdent les mêmes propriétés formelles que les égalités et inégalités ordinaires.

3. Voici les propriétés annoncées. La première est une remarque que j'ai déjà utilisée, sous une forme un peu différente, dans le Mémoire cité ([1]).

Soient Γ un demi-cône convexe de sommet ω et Γ' le demi-cône inversement homothétique de sommet ω'; si ω' est dans Γ, ω est dans Γ'.

En effet, Γ' est symétrique de Γ par rapport au milieu I de $\omega\omega'$. Il résulte de l'hypothèse que I est dans Γ; donc I, et par suite ω, sont dans Γ'.

Si l'on supposait ω' intérieur à Γ, ω serait intérieur à Γ'.

On observera que la proposition reste valable si Γ n'est pas convexe.

4. Les autres propriétés sont relatives aux suites de demi-cônes convexes de même sommet. Soit d'abord une telle suite

$$C_1 \geqq C_2 \geqq \ldots \geqq C_n \geqq \ldots \tag{1}$$

Il est immédiat que l'ensemble commun à tous les C_n est aussi un demi-cône convexe C : la *limite* de la suite. Cette limite satisfait, quel que soit n, à la relation

$$C_n \geqq C.$$

Dans le cas d'une suite

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots > \Gamma_n > \ldots$$

la limite Γ vérifie l'inégalité

$$\Gamma_n > \Gamma.$$

5. Considérons une seconde suite, de même sommet que les demi-cônes de (1).

$$C'_1 \geqq C'_2 \geqq \ldots \geqq C'_n \geqq \ldots \tag{2}$$

Si chaque C_n contient un C'_q (c'est-à-dire si, pour n donné arbitrairement, on peut trouver q de manière que $C_n \geqq C'_q$), la limite de C_n contient celle de C'_n.

([1]) A. M., n° 2.

Il résulte en effet de l'hypothèse que C_n contient C' quel que soit n. Donc C contient C'.

6. Reprenons la suite (1) et donnons-nous un demi-cône convexe de même sommet $C'' > C$ (1). pour n suffisamment grand $C_n < C''$.

En effet, si l'affirmation était fausse, chaque demi-cône $C_n (n = 1, 2, \ldots)$ posséderait une demi-droite $O\Delta_n$ non intérieure à C''. L'ensemble $\{O\Delta_n\}$ admettant au moins une demi-droite d'accumulation $O\Delta$, celle-ci appartiendrait à C, puisque C_n contenant $O\Delta_n$, $O\Delta_{n+1}$, ... contiendrait $O\Delta$, ceci quel que soit n. On aboutit à une contradiction.

7. Voici une dernière proposition qui nous sera nécessaire. Γ étant un demi-cône convexe on peut trouver une suite de demi-cônes convexes de même sommet

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots > \Gamma_n > \ldots$$

ayant pour limite Γ.

Pour le montrer considérons d'abord l'ensemble $(\Gamma)_\alpha$ des demi-cônes de révolution γ, d'angle au sommet α, dont les axes sont les demi-droites de Γ. Si α est assez petit $(\Gamma)_\alpha$ ne contient aucune droite. Je dis que c'est un demi-cône convexe. En effet, $(\Gamma)_\alpha$ est évidemment fermé. D'autre part, soient A et B deux points de cet ensemble; chacun d'eux appartient à un demi-cône γ, d'axes respectifs OA_1 et OB_1. L'ensemble des γ dont les axes sont les demi-droites de l'angle $\widehat{A_1OB_1}$ fait partie de $(\Gamma)_\alpha$ et c'est évidemment un demi-cône convexe. Ce dernier contenant A et B contient le segment AB, lequel appartient donc à $(\Gamma)_\alpha$.

Si maintenant on remarque que $(\Gamma)_{\alpha'}$ est *intérieur* à $(\Gamma)_\alpha$ pourvu que α' soit inférieur à α, on voit qu'il suffira de prendre

$$\Gamma_n = (\Gamma)_{\frac{\beta}{n}}$$

où β désigne un angle suffisamment petit.

---

(1) On verra au numéro suivant que cela est possible.

Le théorème précédent serait évidemment faux si la définition adoptée permettait à un dièdre d'être un demi-cône convexe.

8. Ces propriétés des demi-cônes convexes étant rappelées, je vais introduire deux notions fondamentales pour la suite. On dira qu'*un ensemble de demi-droites*, n'ayant pas nécessairement même origine, est ***borné en direction*** s'il existe une demi-droite fixe faisant avec chacune des demi-droites de l'ensemble, un angle au plus égal à une constante ***inférieure*** à $\frac{\pi}{2}$.

L'expression « borné en direction » peut se justifier par les considérations suivantes. Si un ensemble de demi-droites est borné en direction, il existe un trièdre de coordonnées (au moins) tel que la direction de chacune des demi-droites de l'ensemble étant caractérisée par un système de paramètres directeurs $(1, a, b)$, les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ soient *bornés*. La réciproque est évidente.

Soit E un ensemble de demi-droites borné en direction, j'appellerai *borne convexe* de E, le plus petit demi-cône convexe contenant toutes les demi-droites menées par son sommet parallèlement à celles de E. Cette borne est définie à une translation près. Je vais démontrer son existence et préciser, chemin faisant, le sens de l'expression « le plus petit ».

Par un point fixe O menons les demi-droites directement parallèles à celles de E. Soient e l'ensemble obtenu et $\bar{e}$ sa fermeture (somme de e et de son dérivé). Tout demi-cône convexe C de sommet O qui contient e renferme également $\bar{e}$ et par suite les trièdres T ayant pour arêtes les demi-droites de cet ensemble. Mais la somme $\mathcal{B}$ des trièdres T est un demi-cône convexe. En effet, tout d'abord $\mathcal{B}$ est évidemment fermé et ne contient aucune droite. Soient β_1 et β_2 deux points de $\mathcal{B}$, ils appartiennent respectivement à deux trièdres T, soient T_1 et T_2. Les arêtes de ces trièdres définissent un angle polyèdre convexe contenant T_1 et T_2 et contenu dans $\mathcal{B}$. Comme β_1 et β_2 appartiennent à cet angle polyèdre, il en est de même du segment $\beta_1\beta_2$, qui par suite est contenu dans $\mathcal{B}$.

Nous avons donc démontré que si un demi-cône convexe quelconque C contient les parallèles aux demi-droites de E menées par son sommet, on a $C \geqq \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ désigne un demi-cône bien déterminé — à une translation près — possédant la même propriété que C. $\mathcal{B}$ est le plus petit des demi-cônes C, c'est la borne convexe de E [1]. Je désignerai par $\mathcal{B}[E, a]$ celle de sommet a.

9. Il est immédiat que si un ensemble de demi-droites E_1 est contenu dans E, on a

$$\mathcal{B}[E_1, o] \leqq \mathcal{B}[E, o].$$

Considérons une suite de sous-ensembles de E : $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ chacun d'eux contenant le suivant. Il résulte de la remarque précédente que la suite

$$\mathcal{B}[E_1, o], \quad \mathcal{B}[E_2, o], \ \ldots, \ \mathcal{B}[E_n, o], \ \ldots$$

a une limite bien déterminée $\mathcal{B}_l$.

Donnons-nous alors une seconde suite de sous-ensembles de E, analogue à la précédente : $E'_1, \ldots, E'_n, \ldots$ et soit $\mathcal{B}_{l'}$ la limite de la suite

$$\mathcal{B}[E'_1, o], \quad \mathcal{B}[E'_2, o], \ \ldots, \ \mathcal{B}[E'_n, o], \ \ldots.$$

Du numéro 5 on déduit immédiatement que si chaque E_n contient un E'_n et réciproquement, les limites $\mathcal{B}_l$ et $\mathcal{B}_{l'}$ sont égales.

II. — Champs de demi-droites. Bornes convexes successives. Résidu convexe. Champs réguliers.

10. Nous pouvons aborder maintenant l'étude des champs de demi-droites qui font l'objet de ce travail. Soit (R) un ensemble de points à distance finie, mais pas nécessairement bornée. On a défini sur (R) un *champ de demi-droites* si à chaque point m de (R) on a fait correspondre une demi-droite $\Delta(m)$ bien déterminée issue de ce point. Je supposerai que (R) n'a pas de point isolé. Cette hypothèse n'a rien d'essentiel, mais les considérations qui vont suivre n'auraient aucun intérêt en un point isolé.

Donnons-nous un domaine D (c'est-à-dire un ensemble contenant des points intérieurs), ce domaine renfermant des points de (R). Je dirai que le champ $\Delta(m)$ est *borné en direction dans* D, si l'ensemble des demi-droites $\Delta(m)$ dont l'origine appartient à D

---

[1] On aurait pu aussi bien définir $\mathcal{B}$ comme l'*enveloppante convexe de* $\bar{e}$. *Voir*, par exemple, Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, 1929, p. 35.

est lui-même borné en direction. La borne convexe de cet ensemble sera appelée la *borne convexe du champ dans* D. On désignera par $\mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}, \mathrm{O}]$ celle qui a pour sommet un point donné O.

Si un domaine D′, renfermant des points de (R), est contenu dans D, on a évidemment

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}', o] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}, o].$$

On remarquera qu'un champ borné en direction dans plusieurs domaines ne l'est pas nécessairement dans leur somme.

11. Pour étudier le champ au voisinage d'un de ses points, nous emploierons le procédé habituel. Soit m_0 un point de (R), on dira que le champ $\Delta(m)$ est *borné en direction en* m_0 s'il l'est dans une sphère assez petite de centre m_0. D'après la remarque précédente un champ borné en direction en tout point d'un domaine ne l'est pas forcément dans tout le domaine.

Donnons-nous une suite de sphères $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots,$ centrées sur m_0, *intérieures* les unes aux autres, le rayon de S_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et supposons le champ $\Delta(m)$ borné en direction dans S_1. Il résulte immédiatement du nº 9 que la suite $\{\mathcal{B}[\Delta(m), S_n, m_0]\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ a une limite indépendante de la suite des sphères considérée. Cette limite sera par définition la *borne convexe de* $\Delta(m)$ *en* m_0 [1]. On la désignera par $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. On a évidemment

$$\Delta(m_0) \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), m_0],$$

Si

$$\Delta(m_0) = \mathcal{B}[\Delta(m), m_0],$$

le champ est *continu* en m_0 (l'angle de $\Delta(m)$ avec $\Delta(m_0)$ tend vers zéro avec $m_0 m$). La réciproque est évidente.

D'autre part il est immédiat que si $\Delta(m)$ est borné en direction dans un domaine D, on a pour tout point m_0 de (R) *intérieur* à D,

$$\mathcal{B}[\Delta(m), m_0] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}, m_0], \quad [\text{n}^\text{o}\ 10].$$

[1] La limite serait évidemment la même si l'on prenait une suite de domaines quelconques, intérieurs les uns aux autres, ayant pour limite m_0.

12. Nous allons serrer de plus près l'étude locale du champ et introduire les notions de bornes convexes successives, notions auxquelles nous serons amenés par l'étude du problème suivant :

Soit $\widehat{ab}$ un arc simple contenu dans (R) *et possédant en chacun de ses points intérieurs $\overline{m}$ une semi-tangente* (¹) *à droite dans la borne convexe $\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}]$ en ce point. Que peut-on dire de l'ensemble des semi-tangentes à droite en un point m_0?*

Je vais montrer que *cet ensemble est contenu dans un demi-cône convexe $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$, contenu lui-même dans $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$*, mais pas forcément égal à ce dernier.

13. Pour faire la démonstration j'utiliserai un résultat de mon Mémoire sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles. Un cas très particulier du théorème (A) (²) de ce travail peut s'énoncer ainsi :

Soient Γ *un demi-cône convexe et* F *un ensemble (ponctuel) fermé; si pour tout point m de* F, *sauf pour le point* O, *le demi-cône de sommet m déduit de* Γ *par translation renferme à son intérieur des points de* F, *cet ensemble est contenu dans le demi-cône de sommet* O *inversement homothétique à* Γ.

De là nous allons déduire le corollaire suivant, qui sera plus directement utilisable pour notre objet :

Soient C *un demi-cône convexe et $\widehat{\alpha\beta}$ un arc simple, μ étant un point quelconque de l'arc, désignons par $(C)_\mu$ [par $-(C)_\mu$] le demi-cône de sommet μ directement [inversement] homothétique à* C.

Si pour toute position de μ, intérieure à l'arc, il existe une semi-tangente à droite dans $(C)_\mu$, $\widehat{\alpha\beta}$ est contenu tout entier dans $(C)_\alpha$ et $-(C)_\beta$.

(¹) On dit ordinairement « demi-tangente ». Pour éviter toute ambiguïté, je préfère réserver cette expression pour le cas où la demi-tangente est *unique*.

(²) A. M., n° 7.

En effet, donnons-nous une suite de demi-cônes convexes de même sommet

$$C_1 > C_2 > \ldots > C_n > \ldots$$

ayant pour limite C [n° 7], et considérons deux points de l'arc μ et μ', $(\alpha < \mu < \mu' \leqq \beta)$. D'après le théorème cité l'arc $\widehat{\mu\mu'}$ appartient à $-(C_n)_\mu$. En faisant tendre μ vers α, on voit qu'il en est de même de $\widehat{\alpha\mu'}$. Il résulte alors de la proposition du n° 3 que $\mu'(\mu' \leqq \beta)$ appartient à $(C_n)_\alpha$. L'arc $\widehat{\alpha\beta}$ tout entier est donc contenu dans ce cône. Comme ceci a lieu quel que soit n, $\widehat{\alpha\beta}$ est dans $(C)_\alpha$.

D'après ce qui précède $\widehat{\alpha\beta}$ appartient à $-(C_n)_\beta$, quel que soit n. L'arc est donc contenu dans $-(C)_\beta$.

13 *bis*. Avant d'aller plus loin, je vais montrer par un exemple que la proposition qui vient d'être établie serait fausse pour un demi-cône *non* convexe.

Soit i le milieu d'un segment $\alpha\beta$. Choisissons un point j en dehors de la droite qui porte $\alpha\beta$, et considérons l'arc simple $\widehat{\beta\alpha}$ formé par le contour $\beta j i$ et ses transformés par les homothéties de centre α et de rapports 2^{-1}, 2^{-2}, ... 2^{-n}, ..., auxquels on adjoint le point α.

Menons par α les demi-droites $\alpha\lambda$ et $\alpha\lambda'$ respectivement parallèles à $\overrightarrow{j\beta}$ et $\overrightarrow{ij}$ et désignons par C l'ensemble de deux demi-cônes de révolution Γ et Γ', de sommet α, et d'axes respectifs $\alpha\lambda$ et $\alpha\lambda'$. En tout point μ intérieur à $\widehat{\alpha\beta}$ cet arc possède une *demi*-tangente à droite intérieure à $(C)_\mu$. Pourtant l'arc n'a aucun point dans $(C)_\alpha$ lorsque Γ et Γ' sont suffisamment déliés [1]. Si l'on prend Γ assez grand pour contenir $\alpha\beta$, mais pas assez pour renfermer αj, et Γ' très délié, l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ possède en μ une semi-tangente à droite dans $(C)_\mu$, même lorsque μ est en α, néanmoins il y a des points de $\widehat{\alpha\beta}$ en dehors de $(C)_\alpha$ aussi près qu'on veut de α.

Bien entendu on pourrait dans les deux cas raccorder Γ et Γ' de manière à obtenir pour C un demi-cône d'un seul tenant, et ceci sans changer les conclusions.

---

[1] Il n'est pas non plus contenu dans $-(C)_\beta$.

14. Revenons au problème posé au n° 12. Soit m_0 un point de $\widehat{ab}$, distinct de b. Donnons-nous, comme au n° 11, une suite de sphères S_1, S_2, ..., S_n, ..., centrées sur m_0, intérieures les unes aux autres, le rayon de S_n ayant pour limite zéro. S_n choisi, on peut trouver à droite de m_0 un arc $\widehat{m_0 m'}$ intérieur à S_n. $\overline{m}$ désignant un point quelconque de cet arc, on a

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), S_n, \overline{m}], \quad [\text{n}^\text{o}\ 11].$$

Mais alors $\widehat{m_0 m'}$ possède en tout point intérieur $\overline{\overline{m}}$ une semi-tangente à droite dans $\mathcal{B}[\Delta(m), S_n, \overline{\overline{m}}]$, il est donc tout entier dans $\mathcal{B}[\Delta(m), S_n, m_0]$, [n° 13]. En donnant à n les valeurs 1, 2, ..., on voit que *toutes les semi-tangentes à droite en m_0 sont dans la borne convexe en ce point $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$.*

Ce résultat n'est pas encore celui que nous avions en vue, mais il va nous mettre sur la voie.

Au voisinage de m_0 l'arc $\widehat{m_0 b}$ est intérieur à tout demi-cône convexe Γ, de sommet m_0, ayant à son intérieur $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. Il y a donc intérêt à poursuivre l'analyse du champ au voisinage de m_0 en *se limitant aux points contenus dans des demi-cônes tels que* Γ *et très voisins de* $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$.

Pour exploiter cette idée, donnons-nous une suite de demi-cônes convexes de sommet m_0,

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots > \Gamma_n > \ldots,$$

ayant pour limite $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. Nous savons que ceci est possible [n° 7]. Appelons D_n le domaine commun à S_n et Γ_n, ($n = 1, 2, \ldots$).

Toutes les semi-tangentes à droite en m_0 appartenant à $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$; on peut, D_n étant donné, trouver à droite de m_0 un arc $\widehat{m_0 m''}$ ayant tous ses points sauf m_0 intérieurs à D_n — ceci parce que $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$ est intérieur à Γ_n. On a donc pour tout point $\overline{m}$. intérieur à $\widehat{m_0 m''}$

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), D_n, \overline{m}] \quad [\text{n}^\text{o}\ 11].$$

Il résulte alors du n° 13 que l'*arc* $\widehat{m_0 m''}$ *est dans le demi-cône* $\mathcal{B}[\Delta(m), D_n, m_0]$.

On en déduit que toutes les semi-tangentes à droite en m_0 sont dans cette borne — et ceci quel que soit n. Mais chaque domaine D_n contenant le suivant, on a

$$\mathcal{B}[\Delta(m), D_1, m_0] \geqq \ldots \geqq \mathcal{B}[\Delta(m); D_n; m_0] \geqq \ldots$$

Cette suite a donc une limite $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$. Comme d'autre part S_n contient D_n, quel que soit n, on a

$$\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), m_0], \quad [\text{n}^{\text{os}}\ 10 \text{ et } 5].$$

Si le champ est moins tourmenté dans la borne $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$ qu'à l'extérieur — bien entendu au voisinage de m_0 — il est à prévoir que $\mathcal{B}_1$ sera effectivement contenu dans $\mathcal{B}$ et non pas confondu avec lui.

En définitive, nous avons bien établi que toutes les semi-tangentes à droite en m_0 sont dans un demi-cône convexe $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$ contenu dans $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. On voit que nous avons un résultat plus précis que celui que nous avions obtenu primitivement. Mais rien n'empêche d'opérer sur $\mathcal{B}_1$ comme on l'a fait sur $\mathcal{B}$, et ainsi de suite. On est amené de la sorte à considérer ce que j'appelle les bornes convexes successives du champ sur lui-même.

14 *bis*. Avant de continuer l'étude locale du champ dans le sens qui vient d'être indiqué, je vais montrer qu'il est indispensable de considérer des demi-cônes *convexes*.

Soient toujours m_0 un point de (R) et $\{S_n\}$ une suite de sphères centrées sur m_0 dont les rayons tendent vers zéro. Désignons par G_n l'ensemble des demi-droites, issues de m_0, directement parallèles aux demi-droites du champ dont les points d'application appartiennent à S_n. Il pourrait sembler plus avantageux de faire intervenir la fermeture de G_n au lieu du plus petit demi-cône convexe le contenant : $\mathcal{B}[\Delta(m), S_n, m_0]$ et de considérer l'ensemble $\mathcal{G}[\Delta(m), m_0]$ commun à ces fermetures pour $n = 1, 2, \ldots$ au lieu de $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. Il est certain que $\mathcal{G}[\Delta(m), m_0]$ est l'ensemble fermé de demi-droites qui représente le mieux le champ au voisinage de m_0. Malheureusement $\mathcal{G}$ ne possède pas les propriétés de $\mathcal{B}$. Reprenons l'exemple du n° 13 *bis* et considérons le champ $\Delta(m)$ défini comme suit :

En tout point $\overline{m}$ intérieur à $\widehat{\alpha\beta}$, $\Delta(\overline{m})$ est la demi-tangente à droite à l'arc, partout ailleurs $\Delta(m)$ est parallèle à $\alpha\beta$.

Il est immédiat que, en tout point $\overline{\overline{m}}$ de $\widehat{\alpha\beta}$ distinct de β, il y a une semi-tangente dans $\mathcal{G}\left[\Delta(m), \overline{\overline{m}}\right]$, pourtant l'arc possède en α une infinité de semi-tangentes extérieures à $\mathcal{G}[\Delta(m), \alpha]$. Ce système se réduit en effet aux trois demi-droites $\alpha\beta$, $\alpha\lambda$ et $\alpha\lambda'$. L'obligation de faire intervenir des demi-cônes convexes tient donc à la nature des choses.

15. Reprenons l'étude du champ $\Delta(m)$. Soit m_0 un point de (R). Considérons la suite des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ du n° 11 et celle des demi-cônes convexes de sommet m_0,

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \ldots \Gamma_n > \ldots$$

ayant pour limite $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$, et désignons toujours par D_n l'ensemble commun à S_n et Γ_n. Comme on l'a vu plus haut, la suite $\{\mathcal{B}[\Delta(m), D_n, m_0]\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a une limite bien déterminée $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$. Je vais montrer que celle-ci est indépendante des suites $\{S_n\}$ et $\{\Gamma_n\}$.

Soient $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n, \ldots$ une suite de sphères et

$$\Gamma'_1 > \Gamma'_2 > \ldots > \Gamma'_n > \ldots$$

une suite de demi-cônes convexes, analogues aux précédentes. Désignons par D'_n le domaine commun à S'_n et Γ'_n. D'après le n° 9 il suffira d'établir que chaque D_n contient un D'_n, et réciproquement. Donnons-nous D_n par exemple. Comme $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$ est intérieur à Γ_n, on pourra trouver dans la suite $\{\Gamma'_n\}$ un demi-cône intérieur à Γ_n [n° 6], soit Γ'_p ce demi-cône. Le domaine D' dont l'indice est égal au plus grand des deux nombres n et p est nécessairement contenu dans D_n.

Le demi-cône $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$ est donc bien indépendant des suites, on l'appellera la première borne convexe du champ sur lui-même. Cette borne satisfait aux relations

$$(3) \qquad \Delta(m_0) \leqq \mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), m_0].$$

La première est évidente, la seconde a été établie au n° 14.

16. De la même manière que pour $\mathcal{B}_1$ on définira de proche en

proche les bornes convexes successives du champ sur lui-même en m_0, $\mathcal{B}_2[\Delta(m), m_0]$, $\mathcal{B}_3[\Delta(m), m_0]$, ...

Supposons que $\mathcal{B}_p$ ait été défini. Considérons une suite de demi-cônes convexes de sommet m_0,

$$\Gamma_1^p > \Gamma_2^p > \ldots > \Gamma_n^p > \ldots$$

ayant pour limite $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$ et désignons par D_n^p le domaine commun à S_n et Γ_n^p. $\mathcal{B}_{p+1}[\Delta(m), m_0]$ est la limite de la suite $\mathcal{B}[\Delta(m), D_n^p, m_0]$. En raisonnant comme au numéro précédent on verra que $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, ... sont indépendantes des suites de sphères et de demi-cônes Γ_n^p. $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$ contient évidemment $\Delta(m_0)$, quel que soit p. Je vais montrer que l'on a

$$(4) \qquad \mathcal{B}[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0] \geqq \ldots \geqq \mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0] \geqq \ldots.$$

La première inégalité est satisfaite [relations (3)]. Supposons que l'on ait

$$(5) \qquad \mathcal{B}_{p-1}[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0].$$

Donnons-nous Γ_n^{p-1}, $\mathcal{B}_{p-1}[\Delta(m), m_0]$ lui est intérieur, donc $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$. On pourra par suite choisir q assez grand pour avoir

$$\Gamma_q^p < \Gamma_n^{p-1} \qquad [\text{n}^\text{o}\ 6].$$

Soit alors r le plus grand des deux nombres q et n. Le domaine D_n^{p-1} contiendra D_r^p, on en déduit

$$\mathcal{B}[\Delta(m), D_n^{p-1}, m_0] \geqq \mathcal{B}[\Delta(m), D_r^p, m_0].$$

D'où il résulte, d'après le n° 5,

$$\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_{p+1}[\Delta(m), m_0].$$

Comme la relation (5) est vérifiée pour $p = 1$ (en convenant que l'absence d'indice équivaut à un indice nul) les inégalités (4) sont complètement établies.

17. D'après ces relations la suite $\{\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]\}$ a une limite bien déterminée $\mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0]$, que j'appellerai la *résidu convexe* du champ en m_0. On a évidemment

$$(6) \qquad \Delta(m_0) \leqq \mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), m_0].$$

On pourrait avoir l'idée de procéder sur $\mathcal{B}_\omega$ comme on l'a fait successivement sur $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, ... Je vais montrer que c'est inutile car on retrouverait $\mathcal{B}_\omega$. En effet, donnons-nous une suite de demi-cônes convexes de sommet m_0,

$$\Gamma_1^{\omega} > \Gamma_2^{\omega} > \ldots > \Gamma_n^{\omega} > \ldots,$$

ayant pour limite $\mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0]$. Désignons par D_n^ω le domaine commun à S_n et Γ_n^ω. Il s'agit d'établir que la limite $\mathcal{B}_{\omega+1}[\Delta(m), m_0]$ de la suite $\{\mathcal{B}[\Delta(m), D_n^\omega, m_0]\}$ est confondue avec $\mathcal{B}_\omega$.

Donnons-nous d'abord D_n^p. $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$ est intérieur à Γ_n^p, d'autre part $\mathcal{B}_p$ contient $\mathcal{B}_\omega$.

On a donc

$$\Gamma_n^p > \mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0].$$

Mais la suite $\{\Gamma_n^\omega\}$ a pour limite $\mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0]$, on pourra donc. choisir q assez grand pour avoir

$$\Gamma_n^p > \Gamma_q^\omega \qquad [\text{n}^\text{o}\ 6].$$

Si r désigne le plus grand des nombres n et q, D_n^p contient D_r^ω. On a par suite

$$\mathcal{B}[\Delta(m), D_n^p, m_0] \geqq \mathcal{B}[\Delta(m), D_r^\omega, m_0] \geqq \mathcal{B}_{\omega+1}[\Delta(m), m_0].$$

Considérons les termes extrêmes et, laissant p fixe, donnons à n les valeurs 1, 2, ..., on aura

$$\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_{\omega+1}(\Delta(m), m_0].$$

Cette relation ayant lieu quel que soit p on en déduit

$$(7) \qquad \mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_{\omega+1}[\Delta(m), m_0].$$

Donnons-nous maintenant D_n^ω. Des relations

$$\Gamma_n^\omega > \mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0] \qquad \text{et} \qquad \lim\{\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]\} = \mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0].$$

On déduit la possibilité de choisir p assez grand pour avoir

$$\Gamma_n^\omega > \mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0] \qquad [\text{n}^\text{o}\ 6].$$

Pour la même raison, puisque la suite $\{\Gamma_n^p\}$ a pour limite $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$, on pourra trouver q assez grand pour avoir

$$\Gamma_n^\omega > \Gamma_q^p.$$

Si l'on désigne encore par r le plus grand des entiers n et q, D_n^{ω} contient D_r^{p}. On peut donc écrire

$$\mathcal{B}[\Delta(m), D_n^{\omega}, m_0] \geqq \mathcal{B}[\Delta(m), D_r^{p}, m_0];$$

et par suite, en vertu du n° 5,

$$\mathcal{B}_{\omega+1}[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0].$$

D'où enfin

$$(8) \qquad \mathcal{B}_{\omega+1}[\Delta(m), m_0] \geqq \mathcal{B}_{\omega}[\Delta(m), m_0].$$

Des relations (7) et (8) on déduit $\mathcal{B}_{\omega+1} = \mathcal{B}_{\omega}$. La démonstration est achevée.

18. Champ régulier en un point. — Dans la détermination de $\mathcal{B}_{\omega}$ nous avons raisonné comme si les demi-cônes de la suite $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, ..., $\mathcal{B}_p$, ... étaient tous différents. Nous verrons au n° **25** que cela est possible. Il est évident que si deux demi-cônes consécutifs étaient égaux ou si l'un d'eux se réduisait à $\Delta(m_0)$, $\mathcal{B}_{\omega}$ serait déterminée. Quoi qu'il en soit, toutes les fois que l'on aura

$$\mathcal{B}_{\omega}[\Delta(m), m_0] = \Delta(m_0),$$

je dirai que le champ $\Delta(m)$ est *régulier* en m_0. Un champ régulier en tout point d'un ensemble sera dit régulier sur cet ensemble. Un champ continu est régulier. La réciproque n'a pas lieu en général. Nous donnerons au n° **26** l'exemple d'un champ régulier partout et discontinu sur un ensemble partout dense. L'intérêt de la notion de « régularité » c'est qu'elle peut remplacer celle de continuité dans bien des questions et en particulier dans la théorie des équations différentielles.

19. Comme première application je vais reprendre le problème posé au n° **12**.

Soient $\Delta(m)$ *un champ défini sur un ensemble* (R) *et* $\widehat{ab}$ *un arc simple de* (R). Je supposerai le *champ borné en direction en tout point de* $\widehat{ab}$ *et que pour tout point* $\overline{m}$ *intérieur à l'arc il existe une semi-tangente à droite appartenant à* $\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}]$.

Nous avons démontré au n° **14** qu'en tout point m_0 de l'arc, distinct de b, toutes les semi-tangentes à droite sont dans $\mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0]$. Je vais maintenant établir qu'elles sont toutes dans $\mathcal{B}_\omega[\Delta(m), m_0]$. Il en résultera que *si le champ est régulier en tout point de l'arc celui-ci possède partout, sauf en b, une demi-tangente à droite unique*. Nous verrons même que cette demi-tangente est continue à droite.

Pour montrer que toutes les semi-tangentes à droite en m_0 appartiennent à $\mathcal{B}_\omega$ il suffira de prouver qu'elles sont toutes dans $\mathcal{B}_{p+1}$ pourvu qu'elles appartiennent à $\mathcal{B}_p$.

Supposons donc que toutes les semi-tangentes à droite en un point m_0 de l'arc, distinct de b, appartiennent à $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$. Conservant les notations du n° 16, considérons un domaine D_n^p. Puisque $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$ est *intérieur* à Γ_n^p, on peut trouver à droite m_0 un arc partiel $\widehat{m_0 m'}$ ayant tous ses points sauf m_0 intérieurs à D_n^p. En chacun de ces points $\overline{m}$ on aura

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), D_n, \overline{m}] \quad [\text{n° } 12].$$

Il résulte alors de la proposition du n° 13 que $\widehat{m_0 m'}$ est dans $\mathcal{B}[\Delta(m), D_n, m_0]$. En donnant à n les valeurs 1, 2, ... on voit que toutes les semi-tangentes à droite en m_0 appartiennent à $\mathcal{B}_{p+1}[\Delta(m), m_0]$. C. Q. F. D.

De l'hypothèse faite sur $\widehat{ab}$ on peut encore tirer des conclusions relatives aux semi-tangentes à gauche et à la rectificabilité. Considérons d'abord les semi-tangentes à gauche. Supposons m_0 sur $\widehat{ab}$ en dehors de a. Si l'on se donne S_n on pourra trouver à gauche de m_0 un arc partiel $\widehat{m'' m_0}$ intérieur à S_n. En tout point $\overline{\overline{m}}$ intérieur à cet arc, on a

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{\overline{m}}] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), S_n, \overline{\overline{m}}].$$

Il en résulte que $\widehat{m'' m_0}$ est dans le demi-cône de sommet m_0 inversement homothétique à $\mathcal{B}[\Delta(m), S_n, m_0]$. En raisonnant comme plus haut on en déduit que *toutes les semi-tangentes à gauche en m_0 appartiennent au demi-cône inversement homothétique de $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$ de sommet m_0.*

Occupons-nous maintenant de la rectificabilité. Dans mon Mémoire sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles j'ai démontré le résultat suivant :

Une courbe de Jordan qui possède en chaque point, sauf peut-être aux extrémités, une semi-tangente (pour un côté variable ou non) faisant avec un axe fixe un angle au plus égal à une constante moindre que $\frac{\pi}{2}$ est la somme de deux arcs simples rectifiables placés bout à bout chacun d'eux se projetant sur l'axe d'une manière biunivoque (¹).

Il est immédiat qu'à l'intérieur de chacun de ces deux arcs la semi-tangente considérée est forcément semi-tangente pour un côté invariable.

Donnons-nous un point m_0 de $\widehat{ab}$. Le champ est borné en direction dans une certaine sphère S centrée sur m_0. D'autre part on peut trouver un arc partiel de $\widehat{ab}$ intérieur à S, cet arc contenant m_0 à son intérieur ou bien ayant ce point comme extrémité s'il est confondu avec a ou b. En chaque point $\overline{m}$ de cet arc, on a

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}] \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), S, \overline{m}],$$

Comme les demi-droites de ce dernier demi-cône font avec une demi-droite fixe un angle au plus égal à une constante inférieure à $\frac{\pi}{2}$, l'arc partiel en question est rectifiable. Le lemme de Borel-Lebesgue permet alors d'affirmer que *l'arc $\widehat{ab}$ est rectifiable.*

Faisons en passant une remarque qui nous sera utile au nº 21. Conservons toutes les hypothèses faites au début du présent numéro, mais supposons que la semi-tangente dont il s'agit soit semi-tangente pour un côté *variable ou non*. Le raisonnement précédent permet d'affirmer que $\widehat{ab}$ est la somme d'un nombre fini d'arcs simples bout à bout à l'intérieur desquels la semi-tangente en question est semi-tangente pour un côté invariable.

20. Les hypothèses étant toujours celles du début du numéro

(¹) A. M., nº 15 (*voir* aussi la remarque qui suit la proposition énoncée).

précédent, supposons de plus que le champ soit régulier sur $\widehat{ab}$, sauf peut-être en b.

Comme on l'a remarqué plus haut $\widehat{ab}$ admet en tout point m, distinct de b, une demi-tangente à droite $\Delta(m)$. Je vais montrer que celle-ci est continue à droite.

Soit m_0 un point de $\widehat{ab}$, distinct de b. Donnons-nous un nombre positif ε aussi petit qu'on voudra et considérons le demi-cône de révolution C de sommet m_0, d'axe $\Delta(m_0)$ et de demi-angle au sommet ε. Comme la suite $\{\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]\}$ a pour limite $\Delta(m_0)$, on peut choisir p assez grand pour avoir

$$\mathcal{B}_{p+1}[\Delta(m), m_0] < \mathrm{C} \quad [\text{n}^\circ\ 6].$$

Mais, p étant fixé, $\mathcal{B}_{p+1}$ est la limite de la suite

$$\{\mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}_n^p, m_0]\}$$

(les notations sont toujours celles du n° 16); on aura donc

$$\mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}_n^p, m_0] < \mathrm{C},$$

pourvu que n soit assez grand. D'autre part $\mathcal{B}_p[\Delta(m), m_0]$ est *intérieur* au demi-cône Γ_n^p de D_n^p. Par suite $\Delta(m_0)$ est intérieur à Γ_n^p. On pourra donc trouver à droite de m_0 un arc partiel $\widehat{m_0 m''}$ ayant tous ses points dans D_n^p. Soit $\overline{m}$ l'un quelconque d'entre eux, on a

$$\Delta(\overline{m}) \leqq \mathcal{B}[\Delta(m), \mathrm{D}_n^p, \overline{m}].$$

Il résulte alors de la précédente inégalité que $\Delta(\overline{m})$ est intérieur au demi-cône de sommet $\overline{m}$ déduit de C par translation. En définitive, étant donné ε, on peut trouver à droite de m_0 un arc partiel $\widehat{m_0 m''}$ tel que l'on ait

$$\text{angle}\,[\Delta(\overline{m}), \Delta(m_0)] < \varepsilon,$$

quel que soit le point $\overline{m}$ de $\widehat{m_0 m''}$.

Il est donc bien établi que la demi-tangente à droite est continue à droite. Mais il résulte d'un théorème de M. W.-H. Young, qu'une fonction $f(t)$ continue à droite en tout point d'un intervalle, ouvert à droite, possède au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité (¹). On en déduit immédiatement que la demi-tangente à droite à $\widehat{ab}$ est continue à gauche sauf sur un ensemble $\mathcal{D}$. vide ou dénombrable. Prenons alors m_0 sur le complémentaire de $\mathcal{D}$. On peut trouver à gauche de m_0 un arc partiel tel qu'en chacun de ses points $\overline{m}$ la demi-tangente à droite appartienne au demi-cône de sommet $\overline{m}$ déduit de C par translation. D'après la proposition du n° 13 cet arc est dans le demi-cône opposé par le sommet à C. Comme ε est aussi petit qu'on veut, $\widehat{ab}$ admet en m_0 une demi-tangente à gauche (unique), opposée à la demi-tangente à droite.

En rassemblant les résultats des n^{os} 19 et 20 nous obtenons les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soient un arc simple $\widehat{ab}$ et un champ de demi-droites défini sur un ensemble contenant $\widehat{ab}$ et borné en direction en tout point de cet arc.*

Si $\widehat{ab}$ possède en tout point intérieur une semi-tangente à droite dans la borne convexe du champ en ce point :

1° *$\widehat{ab}$ est rectifiable ;*

2° *Toutes les semi-tangentes à droite en chaque point distinct de b appartiennent au résidu convexe du champ en ce point ;*

3° *Toutes les semi-tangentes à gauche en chaque point, sauf a, appartiennent au demi-cône opposé par le sommet à la borne convexe du champ en ce point.*

Théorème II. — *Soient $\widehat{ab}$ un arc simple et un champ de demi-droites défini sur un ensemble contenant $\widehat{ab}$, régulier sur cet arc sauf peut-être en b, mais alors borné en direction en ce point.*

Si $\widehat{ab}$ possède en tout point intérieur une semi-tangente à droite dans la borne convexe du champ :

1° *$\widehat{ab}$ est rectifiable ;*

(¹) W. H. Young, *La symétrie de structure des fonctions de variables réelles* (*Bull. des Sc. math.*, juillet 1928, p. 270). — *Voir* aussi T. Viola, *Funzioni continua da una parte...* (*Annali di Math.*, 4ᵉ série, t. IX, 1931, p. 252).

2° $\widehat{ab}$ *admet partout, sauf en b, une demi-tangente à droite continue à droite : la demi-droite du champ;*

3° $\widehat{ab}$ *admet deux demi-tangentes opposées sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable* (1).

21. Jusqu'à présent nous avons toujours supposé (sauf dans la remarque faite à la fin du n° 19) qu'il s'agissait de semi-tangentes pour un côté *invariable*. Nous allons voir maintenant ce que devient le théorème II, par exemple, lorsqu'il s'agit de semi-tangentes quelconques.

D'une manière précise, soit $\Delta(m)$ un champ régulier *en tout point de* $\widehat{ab}$ et supposons qu'en tout point intérieur à l'arc celui-ci possède une semi-tangente pour un côté variable ou non dans la borne convexe du champ au point considéré.

D'après la remarque rappelée à l'instant, $\widehat{ab}$ est la somme d'un nombre fini d'arcs partiels $\widehat{aa_1}$, $\widehat{a_1a_2}$, ..., $\widehat{a_{p-1}b}$, à l'intérieur desquels la semi-tangente considérée est semi-tangente pour un côté invariable. A chacun de ces arcs on peut appliquer le théorème II (en choisissant convenablement le sens du parcours). On en déduit que $\widehat{ab}$ est rectifiable et possède partout deux demi-tangentes opposées, sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable. Il est possible d'obtenir un résultat plus précis. Pour cela je distinguerai deux cas :

1° $\Delta(m)$ est demi-tangente à droite pour $\widehat{aa_1}$.

Soit $\widehat{a_ka_{k+1}}$ le premier arc pour lequel $\Delta(m)$ est demi-tangente à gauche. D'après le théorème I (3°) toutes les semi-tangentes à gauche en a_k appartiennent au demi-cône $-\mathcal{B}[\Delta(m), a_k]$ opposé par le sommet à la borne convexe en a_k. D'autre part, appliqué à l'arc $\widehat{a_{k+1}a_k}$, ce même théorème montre que toutes les semi-tangentes à gauche en a_k à cet arc, c'est-à-dire toutes les semi-tangentes à droite à $\widehat{ab}$ appartiennent au même demi-cône $-\mathcal{B}[\Delta(m), a_k]$. Il y a impossibilité car aucune semi-tangente

(1) Je rappelle qu'une demi-tangente est unique par définition.

en a_k ne pourrait appartenir à $\mathcal{B}[\Delta(m), a_k]$. Il faut donc que $\Delta(m)$ soit demi-tangente à droite pour tout l'arc $\widehat{ab}$.

2° $\Delta(m)$ est demi-tangente à gauche pour $\widehat{aa_1}$.

Un raisonnement analogue au précédent montre que ou bien $\Delta(m)$ est demi-tangente à gauche pour tout l'arc, ou bien demi-tangente à gauche pour un arc partiel $\widehat{ac}$ et demi-tangente à droite pour $\widehat{cb}$. Les conclusions de ce numéro donnent le

Théorème III. — *Soient $\widehat{ab}$ un arc simple et un champ de demi-droites défini sur un ensemble contenant $\widehat{ab}$ et régulier en tout point de cet arc.*

Si $\widehat{ab}$ possède en tout point intérieur une semi-tangente, pour un côté variable ou non, dans la borne convexe du champ en ce point :

1° *$\widehat{ab}$ est rectifiable et possède deux demi-tangentes opposées sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable ;*

2° *Ou bien la demi-droite du champ est partout, sauf en b, la demi-tangente à droite (continue à droite), ou bien elle est la demi-tangente à gauche (continue à gauche) depuis a excepté jusqu'à un point c bien déterminé, et la demi-tangente à droite (continue à droite) depuis c inclus jusqu'à b.*

Dans ce dernier cas l'arc a un point de rebroussement en c.

22. Champs (de demi-droites) opposés. — Soit $\Delta(m)$ un champ de demi-droites. Il est naturel d'appeler *champ opposé* celui formé par les demi-droites directement opposées à celles de $\Delta(m)$. Je désignerai par $-\Delta(m)$ la demi-droite opposée à $\Delta(m)$. C'est d'ailleurs la notation utilisée plus haut pour les demi-cônes opposés.

Il est immédiat que si le champ $\Delta(m)$ est borné en un point m_0 le champ opposé l'est aussi et que l'on a

$$\mathcal{B}[-\Delta(m), m_0] = -\mathcal{B}[\Delta(m), m_0].$$

L'analogie ne peut évidemment pas se poursuivre pour les bornes convexes successives. Par suite deux champs opposés ne sont pas forcément réguliers simultanément en un même point. Au contraire, si un des champs est continu, l'autre l'est nécessairement.

Les conclusions des théorèmes II et III deviennent particulièrement simples lorsqu'on suppose *les deux champs* $\Delta(m)$ et $-\Delta(m)$ *réguliers* sur $\widehat{ab}$. Considérons d'abord le théorème II, c'est-à-dire supposons que $\widehat{ab}$ possède en tout point intérieur $\overline{m}$ une semi-tangente à droite dans $\mathcal{B}[\Delta(m), \overline{m}]$.

La conclusion 3° du théorème I s'applique, par suite $\widehat{ab}$ admet en tout point intérieur une semi-tangente à gauche dans la borne convexe de $-\Delta(m)$. On déduit alors du théorème II que $-\Delta(m)$ est partout la demi-tangente à gauche, laquelle est continue à gauche. L'arc $\widehat{ab}$ possède donc partout deux demi-tangentes opposées continues.

En rapprochant ce dernier résultat du théorème III on obtient immédiatement le

THÉORÈME IV. — *Soient $\widehat{ab}$ un arc simple et deux champs de demi-droites opposés définis sur un ensemble contenant $\widehat{ab}$ et réguliers sur cet arc.*

Si $\widehat{ab}$ possède en tout point intérieur une semi-tangente, pour un côté variable ou non, dans la borne convexe (en ce point) de l'un des champs LE MÊME POUR TOUT L'ARC,

$\widehat{ab}$ possède partout deux demi-tangentes opposées continues, sauf peut-être en un point de rebroussement unique, ce qui ne peut avoir lieu que si la semi-tangente considérée l'est pour un côté variable (¹).

Bien entendu l'arc est toujours rectifiable (cela résulte d'ailleurs immédiatement de la conclusion).

La restriction soulignée ne peut être supprimée *même s'il s'agit de semi-tangentes pour un côté invariable*. En effet, rapportons l'espace à trois axes $Oxyz$ et prenons pour $\Delta(m)$ le champ défini en chaque point par la parallèle à la demi-droite Oy. Les champs $\Delta(m)$ et $-\Delta(m)$ sont partout continus et, *a fortiori*, réguliers. Considérons alors l'arc simple $\widehat{\alpha\beta}$

$$y = \sum_{1}^{\infty} b^n \cos \pi a^n x, \qquad z = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

(¹) Cet énoncé est une extension du théorème du n° 19 de mon Mémoire A. M.

où a désigne un nombre entier impair et b une constante positive moindre que 1, avec $ab > 1 + 3\frac{\pi}{2}$.

On reconnaît la fonction sans dérivée de Weierstrass. Or cette fonction admet partout un dérivé droit et un dérivé gauche infinis (¹). L'arc $\widehat{\alpha\beta}$ possède donc, sauf en β; une semi-tangente à droite confondue avec $\Delta(m)$ ou $-\Delta(m)$. D'autre part, les conclusions du théorème ne sont évidemment pas vérifiées.

23. L'exemple précédent montre aussi pourquoi il est indispensable de considérer des champs de *demi*-droites et non pas des champs de droites.

$\widehat{\alpha\beta}$ possède partout, sauf en β, une semi-tangente à droite dont le support appartient à un champ continu de droites, et, sauf en α, une semi-tangente à gauche dont le support appartient au même champ. Pourtant $\widehat{\alpha\beta}$ n'a de tangente nulle part.

En raisonnant sur des droites on laisse échapper une hypothèse d'*orientation* locale des semi-tangentes *dans l'espace*, qui ne peut être remplacée par une hypothèse d'orientation *sur l'arc*.

24. Il est immédiat que les notions de bornes convexes, de résidus convexes et de champs réguliers ainsi que les théorèmes précédents sont valables pour un espace euclidien quelconque. Dans le cas de deux dimensions les demi-cônes convexes sont des angles. Cette circonstance rend la détermination des bornes convexes beaucoup plus facile.

III. — Exemples de champs.

25. Je vais donner maintenant quelques exemples de champs, le premier pour montrer qu'en un même point les bornes convexes successives peuvent être toutes distinctes. Pour plus de simplicité nous nous placerons dans le cas du plan.

Soient Ox et Oy deux demi-droites rectangulaires. Considérons une suite de demi-droites Oz_0, Oz_1, ..., Oz_p, ..., intérieures à l'angle $\widehat{xOy}$ et telles que Oz_{p+1} soit intérieure à $\widehat{xOz_p}$. Oz_p a une certaine limite Oz_ω.

(¹) *Voir*, par exemple, Goursat, *Cours d'Analyse*, 5ᵉ édition, t. I, p. 73.

Définissons un champ de demi-droites $\Delta(m)$ de la manière suivante :

Sur Oy, sauf en O, $\Delta(m)$ est parallèle à Oz_0.

Sur Oz_p, sauf en O, $\Delta(m)$ est parallèle à Oz_{p+1}, ceci pour $p = 0, 1, 2, \ldots$; enfin partout ailleurs $\Delta(m)$ est parallèle à Ox.

On voit immédiatement que

$$\mathcal{B}\ [\Delta(m), 0] = \widehat{xOz_0},$$

$$\mathcal{B}_1\ [\Delta(m), 0] = \widehat{xOz_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathcal{B}_p\ [\Delta(m), 0] = \widehat{xOz_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathcal{B}_\omega\ [\Delta(m), 0] = \widehat{xOz_\omega}.$$

Si Oz_ω est confondu avec Ox, le résidu convexe en O se réduit à $\Delta(O)$. Le champ $\Delta(m)$ est alors régulier en O.

26. Le deuxième exemple est relatif à *deux champs opposés réguliers partout et discontinus sur un ensemble dénombrable partout dense*. Comme précédemment il s'agira de champs plans.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires OD et OD′ les demi-droites ayant respectivement pour paramètres directeurs $(-1, -2)$ et $(1, -2)$. Nous considérerons d'abord la fonction $g(x, y)$ ainsi définie : dans l'angle $\widehat{DOD'}$, *sauf à l'origine*,

$$g(x, y) = 1 + 2\frac{|x|}{y},$$

partout ailleurs

$$g(x, y) = 0.$$

Cette fonction possède les propriétés suivantes :

1° Elle est constante dans le domaine obtenu en retranchant du plan l'intérieur de l'angle $\widehat{DOD'}$;

2° Elle est continue partout, sauf à l'origine; en ce point on a pour toute valeur *positive* de δ

$$g(0, -\delta) = +1 + g(0, 0); \tag{7}$$

3° Elle est non croissante par rapport à y :

4° Elle est bornée.

Les trois premières sont immédiates. Examinons la quatrième. Dans l'angle $\widehat{DOD'}$, sauf en O, on a

$$-1 \leqq 2\frac{|x|}{y} \leqq 0.$$

On en déduit

$$(8) \qquad 0 \leqq g(x, y) \leqq 1.$$

Relation vérifiée *a fortiori* dans tout le plan.

Donnons-nous maintenant un ensemble ponctuel dénombrable partout dense, par exemple celui des points de coordonnées rationnelles $\{a_n, b_n\}$, et construisons la fonction

$$(9) \qquad f(x, y) = \sum_{1}^{+\infty} 2^{-n-1}\, g(x - a_n, y - b_n).$$

Il résulte immédiatement des propriétés de $g(x, y)$ que $f(x, y)$ est *non croissante* par rapport à y et *bornée*. Les relations (8) et (9) donnent

$$(10) \qquad 0 < f(x, y) < 1.$$

Les signes $=$ sont exclus car il n'est pas possible que les $g(x - a_n, y - b_n)$ soient en un même point toutes nulles ou toutes égales à 1.

Enfin $f(x, y)$ est *discontinue* en tout point de $\{a_n, b_n\}$. Soit, en effet, (a_k, b_k) un point de cet ensemble. On a, d'après (7),

$$g(a_k - a_k, b_k - \delta - b_k) = 1 + g(a_k - a_k, b_k - b_k)$$

et, pour $n \neq k$,

$$g(a_k - a_n, b_k - \delta - b_n) \geqq g(a_k - a_n, b_k - b_n).$$

De ces relations on déduit

$$f(a_k, b_k - \delta) \geqq 2^{-k-1} + f(a_k, b_k).$$

Ceci posé, considérons le champ $\Delta(m)$ défini en chaque point $m(x, y)$ par la demi-droite de paramètres directeurs $[1, f(x, y)]$, et le champ opposé $-\Delta(m)$. Ces deux champs sont *discontinus en tout point* de $\{a_n, b_n\}$. Je vais montrer qu'*ils sont partout réguliers*.

Soit $m_0(x_0, y_0)$ un point quelconque du plan. Considérons l'angle Γ formé par les demi-droites d'origine m_0 et de paramètres directeurs $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, et l'angle Γ' opposé par le sommet. Les relations (10) montrent que les bornes convexes $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$ et $\mathcal{B}[-\Delta(m)m_0]$ sont respectivement *intérieures* à Γ et Γ'. Soient alors S un cercle de centre m_0 et Σ l'ensemble des deux secteurs limités dans S par Γ et Γ'. En se reportant à la définition de $\mathcal{B}_1$, on voit que pour établir les relations

$$(11) \qquad \mathcal{B}_1[\Delta(m), m_0] = \Delta(m_0), \qquad \mathcal{B}_1[-\Delta(m), m_0] = -\Delta(m_0),$$

il suffira de démontrer que le nombre positif ε étant donné arbitrairement petit, on pourra trouver S assez petit pour avoir, quel que soit m dans Σ,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Ceci est immédiat parce que la série est uniformément convergente, et que, pour chacun de ses termes, on peut trouver S de manière à avoir dans Σ

$$|2^{-k-1} g(x - a_k, y - b_k) - 2^{-k-1} g(x_0 - a_k, y - b_k)| < \varepsilon_k,$$

ε_k étant arbitrairement donné. En effet, si $x_0 - a_k$, et $y_0 - b_k$ sont différents de zéro $g(x - a_k, y - b_k)$ est continue en m_0 et s'ils sont nuls tous les deux $g(x - a_k, y - b_k)$ est constante dans Σ quel que soit S.

Les relations (11) montrent alors que $\Delta(m)$ et $-\Delta(m)$ *sont réguliers partout.*

Dans l'exemple qui vient d'être construit la régularité du champ a été obtenue, si l'on peut dire, assez rapidement puisque dès $\mathcal{B}_1$ on a eu la demi-droite du champ. Il est probable qu'on pourrait obtenir des champs réguliers beaucoup plus discontinus que le précédent. A ce propos il serait intéressant de savoir s'il existe des champs à la fois réguliers et discontinus partout. Je n'ai pu jusqu'à présent répondre à la question.

27. *Suites uniformément convergentes de champs.* — Les expressions « suite convergente », « suite uniformément convergente de champs de demi-droites » ont un sens évident. Il est d'autre part immédiat qu'*une suite uniformément convergente* *de champs continus en un point m_0 a pour limite un champ continu en m_0*. Je vais montrer par un exemple que la *propriété ne s'étend pas aux suites de champs réguliers.*

Nous nous placerons encore dans l'espace à deux dimensions. Soient Ox, Oy deux demi-droites rectangulaires et Oz la bissectrice de leur angle. Définissons un champ $\Delta(m)$ comme suit : en tout point m de Ox, *sauf à l'origine*, $\Delta(m)$ est parallèle à Oz, partout ailleurs $\Delta(m)$ est parallèle à Ox. On a évidemment

$$\mathcal{B}[\Delta(m), o] = \mathcal{B}_1[\Delta(m), o] = \ldots = \widehat{xOz}.$$

Ceci posé, pour chaque valeur de l'entier positif n, considérons le champ $\Delta_n(m)$ obtenu en chaque point $\overline{m}$ en faisant tourner $\Delta(\overline{m})$ de l'angle $\frac{1}{n}$ dans le sens positif (celui qui amène Ox sur Oy après rotation d'un angle droit). Il est évident que la borne convexe $\mathcal{B}[\Delta_n(m), o]$, s'obtient en faisant tourner $\mathcal{B}[\Delta(m), o]$ de l'angle $\frac{1}{n}$ dans le sens positif. Mais si n est assez grand on pourra construire un angle de sommet O, ayant $\mathcal{B}[\Delta_n(m), o]$ à son intérieur et Ox à son extérieur. Comme dans cet angle $\Delta_n(m)$ est parallèle à une demi-droite fixe, on a forcément

$$\mathcal{B}_1[\Delta_n(m), o] = \Delta_n(o).$$

Le champ $\Delta_n(m)$ est donc (pour n assez grand) régulier en O, ce qui n'a pas lieu pour sa limite $\Delta(m)$, atteinte uniformément.

Dans l'exemple précédent la borne convexe de $\Delta_n(m)$ en un point a pour limite la borne convexe de $\Delta(m)$. Cette propriété est générale. On l'établirait sans peine. Il faudrait d'abord donner un sens précis à l'expression « limite » d'une suite de demi-cônes convexes pas nécessairement emboîtés. Pour cela on ferait intervenir la notion d'écart (entfernung) de deux ensembles [1] de demi-droites de même origine. Une suite $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ a pour limite C si l'écart de C et C_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On constatera aisément que les limites considérées au n° 4 satisfont à cette définition.

Comme nous n'aurons pas à utiliser la propriété des bornes con-

---

[1] *Voir*, par exemple, F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, p. 145 et suiv.

vexes, qui vient d'être signalée, il m'a paru inutile de faire intervenir la notion générale de limite.

IV. — Application aux équations différentielles.

28. Les notions de champ borné en direction, de champ régulier, ainsi que les théorèmes obtenus à la section II trouvent leur application naturelle dans la théorie des équations différentielles du premier ordre à fonctions et variables réelles.

Donnons-nous un tel système de deux équations (pour rester dans un espace à trois dimensions) :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= g(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons les fonctions f et g définies et *bornées* dans le domaine $(R) = \{ 0 \leqq x \leqq 1 \}$. D'après la remarque faite au n° 8 le champ $\Delta(m)$, défini en chaque point $m(x, y, z)$ de (R) par la demi-droite de paramètres directeurs $[1, f(x, y, z), g(x, y, z)]$, est *borné en direction* dans (R), ainsi que le champ opposé $-\Delta(m)$.

Le problème classique de la détermination des intégrales du système (12) est un *problème de géométrie :* trouver les courbes de (R) admettant en chacun de leurs points $\overline{m}$ les demi-droites $\Delta(\overline{m})$ et $-\Delta(\overline{m})$ respectivement comme demi-tangente à droite et à gauche.

Je vais montrer, en utilisant la méthode de Gauchy-Lipschitz, que le système (12) admet au moins une intégrale passant par tout point donné de (R) pourvu seulement que les champs $\Delta(m)$ et $-\Delta(m)$ soient réguliers.

29. Supposons d'abord que les fonctions f et g soient *seulement bornées*. Soit a un point donné de (R). Pour chaque valeur du nombre naturel n construisons vers la droite et vers la gauche respectivement deux contours polygonaux de Cauchy-Lipschitz d'origine a, dont les côtés se projettent sur Ox suivant des longueurs moindres que $\frac{1}{n}$. Ces contours sont définis, le premier jusque dans $x = 1$,

le second jusque dans $x = o$. Si a est dans l'un de ces plans un des contours se réduit à un point. Dans tous les cas leur réunion est un contour L_n représenté par des fonctions $y_n(x)$ et $z_n(x)$ définies dans $(o, 1)$. Il est immédiat que les familles $\{y_n(x)\}$ et $\{z_n(x)\}$ sont « également continues » dans cet intervalle. On peut donc extraire de la suite $\{L_n\}$ une suite partielle convergeant *uniformément* vers une limite L. Il est évidemment permis de supposer que c'est la suite $\{L_n\}$.

Soit m_0 le point d'abscisse x_0, $o < x_0 < 1$, situé sur L. Traçons une sphère S de centre m_0 et intérieure à (R). On peut trouver sur L un arc $x_1 x_2$, $x_1 < x_0 < x_2$, tout entier à l'intérieur de S. Il résulte alors de l'uniformité de la convergence que, pour n assez grand, l'arc $x_1 x_2$ de L_n est lui-même tout entier intérieur à S. Donnons-nous alors un nombre x'_2 compris entre x_0 et x_2, en prenant n assez grand L_n aura nécessairement un sommet d'abscisse comprise entre x_1 et x_0, et un autre d'abscisse comprise entre x'_2 et x_2. Si donc n satisfait aux deux conditions précédentes l'arc $\widehat{x_0 x'_2}$ de L_n possédera nécessairement en tout point intérieur $\overline{m}$ une demi-tangente à droite dans $\mathcal{B}[\Delta(m), S, \overline{m}]$, il est par suite contenu dans le demi-cône convexe $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0^n]$, en désignant par m_0^n le point d'abscisse x_0 de L_n [n° 13]. De là résulte immédiatement que l'arc $\widehat{x_0 x'_2}$ de L est tout entier dans le demi-cône $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0]$, déduit du précédent par la translation $\overrightarrow{m_0^n m_0}$. Par suite toutes les semi-tangentes à droite en m_0 à L appartiennent à $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0]$, et ceci quel que soit S, elles sont donc toutes dans la borne convexe $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$ du champ.

En définitive, en chaque point intérieur de L toutes les semi-tangentes à droite sont dans la borne convexe du champ en ce point et par suite dans le *résidu convexe*, [th. I].

30. La conclusion précédente, rapprochée des théorèmes I, II et III, donne immédiatement le théorème d'existence suivant :

Théorème V. — *Soit* $\frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$, $\frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$, *un système d'équations différentielles où les fonctions f et g sont définies et bornées dans le domaine* $(R) = \{o \leq x \leq 1\}$, *et telles* *que le champ de demi-droites* $\Delta(m)$, *défini en chaque point* $m(x, y, z)$ *par la demi-droite, issue de ce point, de paramètres directeurs* $[1, f(x, y, z), g(x, y, z)]$, *soit régulier dans* (R).

A. *Par tout point de* (R) *passe au moins une intégrale* L $[y = y(x),\ z = z(x)]$ *définie dans* (0, 1) *possédant les propriétés suivantes :*

1° L *est continue et rectifiable* ;

2° *En tout point* $\overline{m}$ *de* L (*d'abscisse différente de* 1), $\Delta(\overline{m})$ *est la demi-tangente à droite, et celle-ci est continue à droite;*

3° *Sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable* L *possède deux demi-tangentes opposées.*

[Si en un point $\overline{\overline{m}}$ la demi-tangente à gauche n'est pas unique, toutes les semi-tangentes à gauche sont dans le résidu convexe de $-\Delta(m)$ en $\overline{\overline{m}}$].

B. *Si le champ* $-\Delta(m)$ *est lui aussi régulier dans* (R), L *possède partout deux demi-tangentes opposées continues* ([1]).

Ce théorème s'étend, comme les précédents, au cas d'un espace euclidien quelconque, c'est-à-dire à un système analogue à (12) comprenant un nombre quelconque d'équations.

30. Dans un autre travail ([2]), j'ai donné des critères très généraux pour l'unicité ou la multiplicité des intégrales à droite d'un système d'équations différentielles telles que (12). En se reportant aux n^{os} 5 à 9 du travail cité le lecteur constatera aisément que le critère d'unicité subsiste intégralement dans l'hypothèse où le champ $\Delta(m)$ est régulier dans (R). Pour le critère de multiplicité — toujours dans la même hypothèse sur $\Delta(m)$ — il faut supprimer le signe « ou égal » dans l'inégalité qui l'exprime. (Cela tient

---

([1]) Les conclusions du théorème subsistent évidemment lorsque les hypothèses de régularité sont satisfaites seulement sur L.

([2]) A. Marchaud, *Sur les équations différentielles de 1er ordre. — Critère d'unité et critère de multiplicité* [*Mathematica* (Cluj), t. X, p. 5]. Pour les énoncés de ces critères on pourra consulter ma Note des *C. R. Acad. Sc.*, t. 196, 27 février 1933, p. 597.

au fait qu'une modification uniforme et infiniment petite effectuée sur un champ régulier ne donne pas forcément un champ régulier.) On s'en assurera en se reportant aux n^{os} 10 à 13 du même travail.

Un cas particulier du critère d'unicité rappelé plus haut peut s'énoncer ainsi :

Soient $G(x, u)$ une fonction continue dans $\{0 \leq x \leq 1\}$ nulle pour $u = 0$ et telle que l'équation

$$\frac{du}{dx} = G(x, u)$$

admette zéro comme seule intégrale à droite issue de l'origine, et $\vec{V}(m)$ le vecteur de composantes $[1, f, g]$.

Si l'on a, quels que soient m et m' de même abscisse x,

$$\overrightarrow{mm'}\left|\vec{V}(m') - \vec{V}(m)\right| \leq \left|\overrightarrow{mm'}\right| G\left[x, \left|\overrightarrow{mm'}\right|\right],$$

par tout point a de $x = 0$ passe une intégrale unique du système (12) définie dans $(0, 1)$.

Le critère s'applique à un nombre quelconque d'équations, il se réduit à la condition de Peano dans le cas d'une seule équation lorsque G est identiquement nulle.

Revenons à l'exemple du n° 26 et considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \sum_{1}^{\infty} 2^{-n-1} g(x - a_n, y - b_n).$$

Le champ $[1, f]$ et le champ opposé sont réguliers partout; d'autre part $f(x, y)$ est non croissante par rapport à y. On peut donc affirmer que *par tout point du plan passe une intégrale* $y = y(x)$ *admettant une dérivée continue quel que soit* x. De plus *l'intégrale à droite en chaque point est unique* [1]. Pourtant comme on l'a vu, *la fonction* $f(x, y)$ *est discontinue en tout point de coordonnées rationnelles.*

31. Dans l'exemple précédent la fonction $f(x, y)$ est partout

---

[1] Cette unicité est d'ailleurs facile à établir directement à partir de la non-croissance par rapport à y.

continue par rapport à x. Je vais construire un exemple où $f(x, y)$ sera discontinue par rapport à x pour toute valeur constante de y et discontinue par rapport à y pour toute valeur constante de x, ces discontinuités ayant lieu sur un ensemble partout dense de droites. La fonction sera encore non croissante par rapport à y, mais seul le champ $[1, f]$ sera partout régulier.

Posons

$$f(x, y) = \sum_{1}^{\infty} f_n(x, y),$$

les fonctions f_n étant définies comme suit :

Soient $\{a_n\}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\{D_n\}$ les droites $y = \left(2 + \frac{1}{n}\right)(x - a_n)$, on a

$$f_n(x, y) = 0 \qquad \text{(au-dessus de } D_n\text{)},$$
$$f_n(x, y) = 2^{-n-1} \qquad \text{(au-dessous de } D_n \text{ et sur elle)}.$$

Le lecteur démontrera aisément que $f(x, y)$ possède bien les propriétés annoncées. Pour établir la régularité du champ il suffira encore de considérer la borne $\mathcal{B}_1$.

Avec cette dernière fonction l'équation

$$y' = f(x, y)$$

possède les mêmes propriétés que celle du numéro précédent sauf que les intégrales n'ont peut-être pas une dérivée à gauche égale à la dérivée à droite aux points d'un ensemble dénombrable. La dérivée à droite existe partout.

32. Reprenons l'hypothèse du n° **29**, c'est-à-dire supposons f et g seulement bornées. On peut appeler *intégrale* du système (12) tout arc simple $\widehat{\alpha\beta}$ ayant en chaque point m distinct de β, toutes ses semi-tangentes à droite dans le résidu convexe du champ en $\overline{m}$. Nous avons démontré que *par tout point a de* (R) *passe au moins une intégrale*, définie dans (0, 1).

La méthode utilisée au n° **29** va nous permettre d'établir que tout ensemble borné de ces intégrales est compact en soi. Nous obtiendrons même une propriété un peu plus générale.

Soient $f_n(x, y, z)$ et $g_n(x, y, z)$ deux suites de fonctions uniformément convergentes dans (R) ayant respectivement pour limites $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$. Pour n assez grand f_n et g_n sont bornées dans (R). Considérons pour chacune de ces valeurs de n une intégrale $\widehat{\alpha_n\beta_n}$ située à distance bornée, du système

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_n(x, y, n), \\ \dfrac{dz}{dx} = g_n(x, y, z), \end{cases}$$

où α_n et β_n sont respectivement dans $x = 0$ et $x = 1$. Je dis qu'on *peut extraire de la suite* $\{\widehat{\alpha_n\beta_n}\}$ *une suite partielle ayant pour limite une intégrale de* (12).

$\widehat{\alpha_n\beta_n}$ est représentée par des fonctions $y_n(x)$ et $z_n(x)$ également continues dans (0, 1). On peut donc extraire de la suite $\{\widehat{\alpha_n\beta_n}\}$ une suite partielle uniformément convergente vers une limite $\widehat{\alpha\beta}$. Il s'agit de montrer que c'est une intégrable de (12).

Il est évidemment permis de supposer que la suite partielle est la suite $\{\widehat{\alpha_n\beta_n}\}$.

Soit m_0 un point de $\widehat{\alpha\beta}$ d'abscisse x_0, $0 < x_0 < 1$. Donnons-nous une sphère S de centre m_0 et intérieure à $(R) = \{0 \leq x \leq 1\}$. On peut trouver sur $\widehat{\alpha\beta}$ un arc partiel x_0x_1 $(x_1 > x_0)$ intérieur à S. En vertu de la convergence uniforme l'arc x_0x_1 de $\{\widehat{\alpha_n\beta_n}\}$ sera lui aussi intérieur à S pourvu que n soit assez grand.

Considérons la borne convexe $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0]$ du champ $\Delta(m)$ dans S. Soit $\mathcal{C}_\varepsilon$ l'ensemble des demi-cônes de révolutions de sommet m_0 ayant pour axes les demi-droites de $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0]$ et pour demi-angle au sommet ε. Désignons par $\Delta_n(m)$ le champ défini par f_n et g_n. En vertu de la convergence uniforme de $\Delta_n(m)$ vers $\Delta(m)$, on pourra choisir n assez grand pour que

$$\mathcal{B}[\Delta_n(m), S, m_0]$$

soit contenue dans $\mathcal{C}_\varepsilon$. Si donc n est pris assez grand pour satisfaire aux deux conditions précédentes, l'arc x_0x_1 de $\widehat{\alpha_n\beta_n}$ appartiendra au demi-cône ayant pour sommet le point x_0 de $\widehat{\alpha_n\beta_n}$ et déduit de $\mathcal{C}_\varepsilon$ par translation [nº **13**].

On en déduit que l'arc x_0x_1 de $\widehat{\alpha\beta}$ appartient à $\mathcal{C}_\varepsilon$. Comme ε

peut être choisi aussi petit qu'on veut cet arc appartient à $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0]$, [n° 7]. Par suite toutes les semi-tangentes à droite en m_0 appartiennent à $\mathcal{B}[\Delta(m), S, m_0]$ et ceci quel que soit S; elles sont donc dans $\mathcal{B}[\Delta(m), m_0]$. L'arc $\widehat{\alpha\beta}$ est donc une intégrale de (12), [th. I].

La conclusion précédente est *a fortiori* valable si f_n et g_n sont constamment égales à f et g. On en déduit immédiatement que *si l'intégrale à droite [à gauche] issue d'un point a est unique, toute intégrale à droite [à gauche] issue d'un point a_n tend vers la précédente quand $a_n \to a$.*

Cette proposition est l'extension du théorème d'Osgood-Montel au cas où les fonctions f et g sont *seulement bornées*.

Il résulte aussi des considérations du présent numéro que, *si $\{\widehat{\alpha_n\beta_n}\}$ est une suite convergente d'intégrales de* (12), *sa limite est une intégrale de système*. En effet on peut extraire de la suite une suite partielle uniformement convergente.

33. Il est facile de mettre le théorème d'existence des intégrales sous une forme purement géométrique. Soit $\Delta(m)$ un champ régulier dans une sphère de centre a. Il existe alors une sphère S dans laquelle le champ est borné en direction. On pourra donc, en choisissant convenablement l'unité de longueur, trouver un système d'axes rectangulaires $Oxyz$ tels que : 1° S soit dans le domaine $(R) = \{0 \leqq x \leqq 1\}$; 2° si $[1, f, g]$ sont les composantes du champ les fonctions f et g soient bornées dans S.

Définissons alors dans (R) un champ $\bar{\Delta}(m)$, de composantes $[1, \bar{f}, \bar{g}]$ de la manière suivante. $\bar{\Delta}(m)$ coïncide avec $\Delta(m)$ dans S, à l'extérieur de cette sphère $\bar{\Delta}(m)$ est parallèle à Ox. Les fonctions $\bar{f}$ et $\bar{g}$ seront alors bornées dans (R).

Le raisonnement du n° 29 prouve l'existence d'un arc $\widehat{\alpha\beta}$, $\alpha < a < \beta$, intérieur à S ayant en chacun de ses points (sauf β) toutes ses semi-tangentes à droite dans la borne convexe de $\bar{\Delta}(m)$, et par suite de $\Delta(m)$, puisque ces deux champs coïncident dans S.

Il suffit de se reporter encore une fois aux théorèmes I, II et III pour obtenir le

Théorème VI. — A. *Soit $\Delta(m)$ un champ régulier dans une* *sphère de centre a, il existe dans la sphère un arc simple* $\widehat{\alpha\beta}$, *traversant a, qui possède les propriétés suivantes :*

1° $\widehat{\alpha\beta}$ *est rectifiable ;*

2° *En tout point m de l'arc* (sauf en β), $\Delta(m)$ *est la demi-tangente à droite et celle-ci est continue à droite ;*

3° *Sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable* $\widehat{\alpha\beta}$ *possède deux demi-tangentes opposées.*

B. *Si le champ opposé à* $\Delta(m)$ *est lui aussi régulier dans la sphère,* $\widehat{\alpha\beta}$ *possède partout deux demi-tangentes opposées continues.*

Sous cette forme le théorème d'existence des intégrales est non seulement indépendant des axes de coordonnées mais du nombre des dimensions de l'espace, à condition de donner au mot « sphère » un sens évident.