BULLETIN DE LA S. M. F.

J. FAVARD

La longueur et l'aire d'après Minkowski

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 63-84
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__63_0>

LA LONGUEUR ET L'AIRE D'APRÈS MINKOWSKI;

Par M. J. Favard.

1. Guidé sans doute par la relation qui existe entre l'aire limitée par une courbe plane convexe fermée et l'aire limitée par une courbe extérieurement parallèle à la première et à une distance donnée, Minkowski (¹) a donné une définition de la longueur d'un arc de courbe et il a annoncé que, dans le cas où la courbe satisfait à certaines conditions de régularité, sa définition fournissait le même nombre que le procédé habituel. Des considérations analogues lui ont permis de donner une définition de l'aire d'une surface.

Ces définitions, exposées ci-dessous avec les compléments nécessaires, se généralisent facilement aux ensembles quelconques et même aux espaces euclidiens d'ordre supérieur.

Peu de temps après la publication du travail de Minkowski, M. W. H. Young (²) donna un exemple d'un ensemble fermé, formé par la somme d'une infinité dénombrable d'arcs de cercles, et dont la longueur au sens de Minkowski était supérieure à la somme des longueurs de chacun des arcs.

Ainsi le procédé de Minkowski n'apparaissait pas comme un instrument sûr pour la détermination des longueurs, mais on aurait eu tort de le condamner avec trop de hâte car, pour étrange qu'il puisse paraître au premier abord, ses bases expérimentales sont si intuitives qu'une étude de ce procédé ne me paraît pas superflue.

J'ajouterai que les constructions qui servent de base aux définitions de Minkowski sont utilisées constamment dans les

---

(¹) H. Minkowski, *Ueber die Begriffe Länge, Oberflache und Volumen* (*Werke*, t. 2, p. 122-127).

(²) W. H. Young, *The Theory of sets of points* (Cambridge, 1906). Voir aussi le livre de M. G. Bouligand cité ci-après.

recherches de géométrie infinitésimale entreprises par M. Bouligand [1] et ses élèves.

2. Dans l'espace euclidien à trois dimensions, considérons un ensemble borné de points, soit E; et soit ρ un nombre positif, de chacun des points de E comme centre décrivons une sphère de rayon ρ, l'ensemble des points intérieurs à l'une au moins de ces sphères forme un ensemble ouvert, et par suite mesurable, E_ρ, dont la mesure sera désignée par $V_E(\rho)$.

Considérons alors les deux rapports

$$\frac{V_E(\rho)}{\pi\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{V_E(\rho)}{2\rho};$$

d'après Minkowski, on appelle *longueur* de E la limite du premier rapport, et *aire* de E la limite du second, lorsque ρ tend vers zéro et lorsque ces limites existent.

Il est immédiat que si le premier rapport reste fini, lorsque ρ tend vers zéro, le deuxième tend vers zéro; tandis que si le deuxième reste, dans les mêmes conditions, supérieur à un nombre positif, le premier augmente indéfiniment; ainsi la longueur et l'aire ne peuvent être simultanément finies que si l'aire est nulle, ce qui permet d'étudier séparément chacune de ces quantités.

Une remarque d'importance est la suivante : considérons la fermeture $F = \bar{E}$ de l'ensemble E, on voit immédiatement que l'ensemble F_ρ coïncide avec E_ρ de sorte que les deux ensembles E et F ont la même longueur ou la même aire. Ainsi, à un segment de droite, nous sommes conduit à attribuer la même longueur qu'à un ensemble dénombrable de points dense sur lui : cela est inacceptable car on est vraiment trop loin des idées de mesure relatives aux ensembles linéaires.

Ainsi, le procédé de Minkowski ne pourra donner de résultats acceptables que dans le cas des ensembles fermés, aussi, les considérations qui vont suivre seront-elles presque toutes bornées à ce cas.

---

(1) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* (Paris, Vuibert, 1932).

Présentés sous la forme précédente, les procédés de Minkowski apparaissent plutôt comme ésotériques. Pratiquement néanmoins, pour avoir la longueur d'un fil métallique homogène à section circulaire, on pourra déterminer d'abord la masse de ce fil, puis son diamètre et enfin sa densité, un calcul simple donnera la longueur cherchée; pour obtenir la surface d'une coquille d'œuf on déterminera d'abord la masse de cette coquille puis son épaisseur et enfin sa densité, le quotient de la masse par le produit de l'épaisseur et de la densité donnera l'aire de la coquille.

On peut objecter sans doute que les quantités dont je viens de parler ne sont pas définies d'une manière bien précise, mais cela importe peu car la pratique est l'art d'accommoder les approximations. J'ajouterai que la méthode expérimentale qui vient d'être exposée a d'ailleurs un titre de noblesse, puisque Archimède effectua, le premier, par une pesée, la quadrature de la cycloïde.

Mais alors, le procédé de Minkowski n'est que la sublimation du procédé expérimental précédent dans le creuset des Mathématiques car, comme on le voit facilement, dans chacun des exemples cités, on effectue préalablement la détermination d'un volume pour atteindre soit une longueur, soit une aire.

Il serait donc surprenant qu'un procédé, dont la base intuitive est si simple, n'eût pas une portée assez grande.

En fait, dans ce qui va suivre, nous montrerons que la longueur des arcs simples de Jordan au sens de Minkowski est la même que la longueur ordinaire. Quant à l'aire, le résultat obtenu est moins complet, cependant un corollaire du résultat obtenu au n° **12** et qui, peut-être, pourra être de quelque utilité, est le suivant.

Considérons la surface

$$(S) \qquad z = f(x, y) \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ 0 \leqq y \leqq 1) \qquad (f \text{ continue}).$$

s'il existe une suite de nombres $\rho_n (n = 1, 2, \ldots)$ qui tendent vers zéro et si la suite de nombres $\frac{V s(\rho_n)}{2\rho_n}$ est bornée, alors S est quarrable au sens de M. Lebesgue.

3. **Définitions.** — Dans ce qui va suivre nous n'examinerons que des ensembles bornés.

Soit F un ensemble fermé, nous appellerons *longueur infé-*

rieure de F *au sens de Minkowski*, et nous désignerons par $\underline{\lambda}(F)$ la quantité suivante

$$\underline{\lambda}(F) = \varliminf_{\rho \to 0} \frac{V_F(\rho)}{\pi\rho^2},$$

nous appellerons *longueur supérieure* de F, et nous désignerons par $\bar{\lambda}(F)$ la quantité

$$\bar{\lambda}(F) = \varlimsup_{\rho \to 0} \frac{V_F(\rho)}{\pi\rho^2}.$$

On a évidemment

$$\underline{\lambda}(F) \leqq \bar{\lambda}(F)$$

et il y aurait lieu d'examiner s'il existe des ensembles pour lesquels l'égalité n'a pas lieu, mais je ne me suis pas arrêté à cette question.

Un ensemble F sera dit *rectifiable au sens de Minkowski* si sa longueur inférieure est égale à sa longueur supérieure et si la valeur commune de ces nombres [que nous appellerons la longueur de F et que nous désignerons par $\lambda(F)$] est finie

$$\lambda(F) = \underline{\lambda}(F) = \bar{\lambda}(F) \qquad (< +\infty).$$

L'aire inférieure $\underline{\sigma}(F)$ *et l'aire supérieure* $\bar{\sigma}(F)$ se définissent de la même façon :

$$\underline{\sigma}(F) = \varliminf_{\rho \to 0} \frac{V_F(\rho)}{2\rho}; \qquad \bar{\sigma}(F) = \varlimsup_{\rho \to 0} \frac{V_F(\rho)}{2\rho} \qquad \left[\underline{\sigma}(F) \leqq \bar{\sigma}(F)\right],$$

un ensemble sera dit *quarrable* [*et d'aire* $\sigma(F)$], *au sens de Minkowski*, si l'on a

$$\sigma(F) = \underline{\sigma}(F) = \bar{\sigma}(F) \qquad (< +\infty).$$

4. **Propriétés générales.** — De ces définitions nous déduisons tout de suite les conséquences suivantes, valables aussi pour les aires, mais que j'énonce seulement pour les longueurs.

1° Soient deux ensembles fermés F_1 et F_2 et supposons que F_1 contienne F_2 ($F_1 \supset F_2$), alors

$$\underline{\lambda}(F_1) \geqq \underline{\lambda}(F_2); \qquad \bar{\lambda}(F_1) \geqq \bar{\lambda}(F_2).$$

De là on tire que la limite F, d'une suite non croissante d'ensembles fermés $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, qui est aussi un ensemble fermé, est telle que

$$\underline{\lambda}(F) \leqq \lim_{n \to \infty} \underline{\lambda}(F_n); \qquad \overline{\lambda}(F) \leqq \lim_{n \to \infty} \overline{\lambda}(F_n).$$

Pour la fermeture F de la limite d'une suite non décroissante d'ensembles fermés, on obtient de la même façon

$$\underline{\lambda}(F) \geqq \lim_{n \to \infty} \underline{\lambda}(F_n); \qquad \overline{\lambda}(F) \geqq \lim_{n \to \infty} \overline{\lambda}(F_n).$$

2° Lorsque les deux ensembles F_1 et F_2 sont disjoints ($F_1 F_2 = 0$), leur somme $F_1 + F_2$ est également un ensemble fermé et l'on a

$$\underline{\lambda}(F_1) + \underline{\lambda}(F_2) \leqq \underline{\lambda}(F_1 + F_2) \leqq \overline{\lambda}(F_1) + \underline{\lambda}(F_2),$$
$$\overline{\lambda}(F_1) + \overline{\lambda}(F_2) \geqq \overline{\lambda}(F_1 + F_2) \geqq \underline{\lambda}(F_1) + \overline{\lambda}(F_2).$$

Pour démontrer ces inégalités il suffit de remarquer que, pour ρ suffisamment petit, on a

$$V_{F_1+F_2}(\rho) = V_{F_1}(\rho) + V_{F_2}(\rho),$$

en considérant alors une suite de valeurs de ρ tendant vers zéro et supposant que, pour cette suite, $\frac{V_{F_1+F_2}(\rho)}{\pi\rho^2}$ tend vers sa plus petite ou sa plus grande limite, on en déduit facilement les résultats annoncés.

En particulier si les ensembles F_1 et F_2 sont rectifiables, il en est de même de l'ensemble $F_1 + F_2$ qui a alors pour longueur la somme des longueurs des ensembles F_1 et F_2.

Tous ces résultats s'étendent facilement au cas d'un nombre fini d'ensembles fermés disjoints.

Ainsi les longueurs (inférieure ou supérieure) sont des fonctions non décroissantes pour les ensembles fermés, la longueur inférieure est une fonctionnelle concave, tandis que la longueur supérieure est une fonctionnelle convexe.

3° Pour un nombre fini quelconque d'ensembles fermés F_1, F_2, ..., F_n, on a toujours

$$\overline{\lambda}(F_1) + \overline{\lambda}(F_2) + \ldots + \overline{\lambda}(F_n) \geqq \overline{\lambda}(F_1 + F_2 + \ldots + F_n).$$

4° Soient F un ensemble fermé donné et f l'un de ses sous-ensembles fermés. De chaque point de f, décrivons une sphère de rayon donné ε et soit F_ε le sous-ensemble fermé de F dont aucun point n'est intérieur à aucune des sphères précédentes ; si l'on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \underline{\lambda}(F_\varepsilon) = \underline{\lambda}(F) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lambda}(F_\varepsilon) = \overline{\lambda}(F),$$

on dira que la fonctionnelle correspondante de F_ε est continue sur l'ensemble f. Cette considération n'a d'intérêt que quand ces fonctionnelles sont bornées.

Il est alors facile de trouver une condition nécessaire pour que $\underline{\lambda}(F_\varepsilon)$ soit continue sur f.

Les deux ensembles F_ε et f étant disjoints, on a en effet, quel que soit ε,

$$\underline{\lambda}(F) \geqq \underline{\lambda}(F_\varepsilon + f) \geqq \underline{\lambda}(F_\varepsilon) + \underline{\lambda}(f),$$

d'où

$$\underline{\lambda}(f) \leqq \underline{\lambda}(F) - \underline{\lambda}(F_\varepsilon),$$

le second membre de cette inégalité étant toujours non négatif, nous voyons que la continuité exige

$$\lambda(f) = 0.$$

Nous avons d'autre part

$$\overline{\lambda}(F) \geqq \overline{\lambda}(F_\varepsilon + f) \geqq \lambda(F_\varepsilon) + \overline{\lambda}(f),$$

d'où

$$\overline{\lambda}(f) \leqq \overline{\lambda}(F) - \underline{\lambda}(F_\varepsilon),$$

ainsi la continuité de $\underline{\lambda}(F_\varepsilon)$ exige de plus que

$$\overline{\lambda}(f) \leqq \overline{\lambda}(F) - \underline{\lambda}(F).$$

Quant à la continuité de $\overline{\lambda}(F_\varepsilon)$, supposée finie, elle demande également, pour être réalisée, la condition $\underline{\lambda}(f) = 0$, ainsi qu'il ressort de l'inégalité

$$\overline{\lambda}(F_\varepsilon) + \underline{\lambda}(f) \leqq \overline{\lambda}(F_\varepsilon + f) \leqq \overline{\lambda}(F).$$

En particulier, lorsque l'ensemble F est rectifiable, pour que $\underline{\lambda}(F_\varepsilon)$ soit continue sur f, il est nécessaire que f soit rectifiable et de longueur nulle [$\lambda(f) = 0$] ; mais la continuité de $\underline{\lambda}(F_\varepsilon)$ sur f entraîne celle de $\overline{\lambda}(F_\varepsilon)$ sur ce même ensemble car, de

$$\underline{\lambda}(F_\varepsilon) \leqq \overline{\lambda}(F_\varepsilon),$$

on tire

$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \underline{\lambda}(F_\varepsilon) \leqq \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda(F_\varepsilon) \leqq \overline{\lambda}(F) = \lambda(F) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \lambda(F_\varepsilon).$$

La condition nécessaire pour la continuité n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple de M. Young; une condition suffisante est la suivante : si l'on désigne par $f(\varepsilon)$ l'ensemble des points de F dont la distance à un point du moins de f ne dépasse pas ε, les deux fonctionnelles $\underline{\lambda}(F_\varepsilon)$ et $\overline{\lambda}(F_\varepsilon)$ seront continues sur f lorsque

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lambda}[f(\varepsilon)] = 0.$$

Cela résulte des inégalités

$$\underline{\lambda}(F) \leqq \underline{\lambda}(F_\varepsilon) + \overline{\lambda}[f(\varepsilon)],$$
$$\overline{\lambda}(F) \leqq \overline{\lambda}(F_\varepsilon) + \overline{\lambda}[f(\varepsilon)].$$

L'importance de cette notion résulte du théorème d'additivité suivant :

Soient F_1 *et* F_2 *deux ensembles fermés rectifiables, lorsque l'une des fonctionnelles* $\underline{\lambda}(F_{1,\varepsilon})$ *ou* $\underline{\lambda}(F_{2,\varepsilon})$ *est continue sur l'ensemble* $f = F_1 F_2$, *alors l'ensemble fermé* $F_1 + F_2$ *est rectifiable et de longueur égale à la somme des longueurs de* F_1 *et de* F_2.

En effet, si la continuité a lieu pour $\underline{\lambda}(F_{2,\varepsilon})$ par exemple, on a d'abord

$$\overline{\lambda}(F_1 + F_2) \leqq \lambda(F_1) + \lambda(F_2),$$

puis

$$\lambda(F_1 + F_2) \geqq \lambda(F_1) + \underline{\lambda}(F_{2,\varepsilon}),$$

en passant à la limite on voit immédiatement que

$$\lambda(F_1 + F_2) = \lambda(F_1) + \lambda(F_2).$$

Ce résultat s'étend sans difficulté à la somme d'un nombre fini quelconque d'ensembles fermés.

5. **Étude de la longueur**. — Nous allons maintenant limiter nos recherches relatives à la longueur aux continus, nous énoncerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — Un nombre ρ positif étant donné, à tout nombre positif ε, inférieur à ρ et aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur η telle que, lorsque deux sphères de rayons égaux à ρ ont leurs centres à une distance inférieure à η, tout plan passant entre les deux centres a en commun avec le domaine formé par la réunion des deux sphères un domaine plan d'aire au moins égale à $\pi(\rho-\varepsilon)^2$.

Il suffit en effet de prendre

$$\eta^2 \leqq \pi\varepsilon(2\rho+\varepsilon).$$

Soit alors $\mathcal{C}$ un continu contenant deux points A et B; pour ρ donné, proposons-nous d'évaluer une borne inférieure de $V_{\mathcal{C}}(\rho)$. Un nombre ε ayant été choisi ($\varepsilon<\rho$), on en déduira un nombre η par l'inégalité précédente; puis, $\mathcal{C}$ étant un continu, on peut trouver sur $\mathcal{C}$ une suite de points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ($A_0=A$, $A_n=B$) tels que les distances $|A_{i-1}A_i|$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$) soient toutes inférieures à η.

La réunion des sphères du rayon ρ, centrées sur les points A_i, est un domains $\mathcal{E}_\rho$ dont tous les points appartiennent à $\mathcal{C}_\rho$ et dont le volume ne dépasse donc pas $V_{\mathcal{C}}(\rho)$. Or, ce volume $\mathcal{V}$ peut être calculé par les moyens classiques du calcul intégral; en particulier, en choisissant pour axe des z la direction AB, et en désignant par $S(z)$ l'aire de la section des $\mathcal{E}_\rho$ par le plan de cote z, on a

$$\mathcal{V} \geqq \int_A^B S(z)\,dz.$$

Or, d'après le choix de η, on a

$$S(z) \geqq \pi(\rho-\varepsilon)^2,$$

de là

$$V_{\mathcal{C}}(\rho) \geqq \mathcal{V} \geqq \pi(\rho-\varepsilon)^2.|AB|,$$

ε étant quelconque, nous avons, par passage à la limite,

$$V_{\mathcal{C}}(\rho) \geqq \pi\rho^2.|AB|.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit ρ, nous en déduisons

$$\underline{\lambda}(\mathcal{C}) \geqq |AB|,$$

ce que nous énoncerons ([1]).

Théorème fondamental. — *La longueur inférieure, au sens*

([1]) Ce résultat aurait pu être démontré beaucoup plus facilement en appli-

de Minkowski, d'un continu contenant deux points, n'est pas inférieure à la distance de ces deux points; en particulier, elle n'est pas inférieure au diamètre de ce continu.

6. Nous allons maintenant établir le résultat suivant :

Soient $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *deux continus ayant un seul point commun* B$(\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2 = \mathrm{B})$; *soient d'autre part* A_1 *un point de* $\mathcal{C}_1$, A_2 *un point de* $\mathcal{C}_2$, *alors on a*

$$\underline{\lambda}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \geqq |\mathrm{A}_1\mathrm{B}| + |\mathrm{A}_2\mathrm{B}|.$$

Si A_1 ou A_2 coïncident avec B, le résultat est immédiat; nous supposerons donc que ni A_1 ni A_2 ne coïncident avec B.

De B comme centre décrivons un cercle de rayon δ assez petit pour que les deux points A_1 et A_2 soient à son extérieur. D'après un théorème de Janiszewski [1], on peut déterminer un sous-continu $c_1(c_2)$ de $\mathcal{C}_1(\mathcal{C}_2)$ dont aucun point n'est intérieur au cercle précédent, mais contenant, avec $\mathrm{A}_1(\mathrm{A}_2)$, un point au moins $\mathrm{B}_1(\mathrm{B}_2)$ de la circonférence. de ce cercle.

Les deux ensembles fermés c_1 et c_2 ainsi déterminés n'auront aucun point commun et de plus

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \supset c_1 + c_2.$$

D'après les résultats obtenus au n° 4 on a

$$\underline{\lambda}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \geqq \underline{\lambda}(c_1 + c_2) \geqq \underline{\lambda}(c_1) + \underline{\lambda}(c_2),$$

d'où, d'après le théorème fondamental,

$$\underline{\lambda}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \geqq |\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1| + |\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2|,$$

comme, d'autre part,

$$|\mathrm{B}_1\mathrm{B}| = |\mathrm{B}_2\mathrm{B}| = \delta,$$

on en déduit

$$\underline{\lambda}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \geqq |\mathrm{A}_1\mathrm{B}| + |\mathrm{A}_2\mathrm{B}| - 2\delta,$$

---

quant la formule de réduction des intégrales multiples (*voir* par exemple DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue*, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1916) ainsi que nous le ferons à propos de l'aire; mais j'ai voulu donner une démonstration aussi élémentaire que possible.

(1) S. JANISZEWSKI, *Sur les continus irréductibles entre deux points* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 16e cahier, 1912, p. 79-170; *voir* en particulier la page 100).

δ étant aussi faible que l'on veut, le résultat annoncé s'en déduit par passage à la limite.

Par un raisonnement analogue, on montre facilement que si l'on a un nombre fini de continus $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$, tels que

$$\mathcal{C}_i \mathcal{C}_k = 0 \qquad \text{si } |i-k| \neq 0 \text{ ou } 1,$$
$$\mathcal{C}_i \mathcal{C}_{i+1} = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où par A_i nous désignons un point, on a en désignant par A_0 un point quelconque de $\mathcal{C}_1$ et par A_n un point quelconque de $\mathcal{C}_n$

$$\underline{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i\right) \geqq \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1} A_i|.$$

Si l'on garde toutes les hypothèses précédentes sauf $\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_n = 0$ que l'on remplace par $\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_n = A_0$, on a le même résultat en posant $A_n = A_0$.

7. Examinons en particulier, et c'est uniquement cela que l'on fait presque toujours, le cas d'un arc simple de Jordan $\widehat{AB}$. L'arc simple $\widehat{AB}$ peut être décomposé, quel que soit n, en n sous-continus $\mathcal{C}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ par des points de division $A_1, \ldots, A_{n-1}$ situés sur lui $A_0 = A$, $A_n = B$) soit $\mathcal{C}_i = \widehat{A_{i-1} A_i}$. Ces n continus satisfont aux conditions du résultat précédent, et l'on a alors

$$\underline{\lambda}(\widehat{AB}) \geqq \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1} A_i|.$$

Quand l'arc $\widehat{AB}$ n'est pas rectifiable au sens ordinaire, le second membre de l'inégalité précédente augmente indéfiniment avec n, le diamètre de chacun des arcs $\widehat{A_{i-1} A_i}$ tendant vers zéro, mais la longueur inférieure de Minkowski de $\widehat{AB}$ est elle-même infinie, d'après l'inégalité précédente.

Quand l'arc $\widehat{AB}$ est rectifiable $\big($sa longueur du sens habituel étant désignée par $\text{long}\,\widehat{AB}\big)$ cette inégalité donne, par passage à la limite,

$$\underline{\lambda}(\widehat{AB}) \geqq \text{long}\,\widehat{AB},$$

et cette dernière relation peut être écrite dans tous les cas, en convenant de poser : $\operatorname{long}\widehat{AB} = \infty$ lorsque l'arc $\widehat{AB}$ n'est pas rectifiable.

Pour une courbe de Jordan s fermée sans point double, on a de même, en vertu de la fin du paragraphe précédent,

$$\underline{\lambda}(s) \geqq \operatorname{long} s.$$

8. Pour aller un peu plus loin dans la comparaison entre la longueur habituelle et la longueur de Minkowski, nous ferons une remarque :

Soit une ligne polygonale L, c'est-à-dire la somme d'un nombre fini, soit n, de segments de droite $A_{i-1}A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; il est facile de voir que

$$V_L(\rho) \leqq \pi\rho^2 \operatorname{long} L + \frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

l'égalité n'ayant lieu que si les segments $A_{i-1}A_i$ sont placés bout à bout.

En considérant l'ensemble des segments comme un système articulé aux sommets de la ligne, il est évident que les domaines de Minkowski de rayon ρ relatifs à deux côtés consécutifs ont en commun un domaine qui comprend la sphère de rayon ρ et de centre le point commun à ces deux côtés et que ce domaine ne comprend que cette sphère seulement dans le cas où les deux côtés consécutifs sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Revenons maintenant à l'arc simple de Jordan $\widehat{AB}$. D'après la propriété de Sierpinski [1], quel que soit le nombre positif ε, on peut décomposer cet arc en un nombre fini, soit n, d'arcs $\widehat{A_{i-1}A_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ A_0 = A,\ A_n = B)$, dont le diamètre est inférieur à ε.

Cela étant, tous les points du domaine $(\widehat{AB})_\rho$ sont intérieurs aux sphères de rayon $\rho + \varepsilon$ ayant pour centres les points A_{i-1} ; or la réunion de ces n sphères est elle-même comprise dans le domaine de Minkowski relatif à la ligne polygonale L_n formée par la réunion

---

[1] *Voir* par exemple G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe.*

des segments de droites $A_{i-1}A_i$; on a donc, d'après la remarque précédente,

$$V_{\widehat{AB}}(\rho) \leqq \pi(\rho+\varepsilon)^2 . \log L_n + \frac{4}{3}\pi(\rho+\varepsilon)^3.$$

Or

$$\log L_n = \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} \log \widehat{A_{i-1}A_i} = \log \widehat{AB},$$

de là nous tirons

$$V_{\widehat{AB}}(\rho) \leqq \pi(\rho+\varepsilon)^2 \left[\log \widehat{AB} + \frac{4}{3}(\rho+\varepsilon)\right],$$

ε étant aussi faible que l'on veut, nous obtenons en définitive, après division par $\pi\rho^2$,

$$\frac{V_{\widehat{AB}}(\rho)}{\pi\rho^2} \leqq \log \widehat{AB} + \frac{4}{3}\rho$$

et, par suite, en faisant tendre ρ vers zéro,

$$\bar{\lambda}(\widehat{AB}) \leqq \log \widehat{AB}.$$

En comparant avec l'inégalité trouvée au numéro précédent, nous voyons que

$$\lambda(\widehat{AB}) = \underline{\lambda}(\widehat{AB}) = \bar{\lambda}(\widehat{AB}) = \log \widehat{AB}.$$

Ce résultat s'étend facilement à la ligne simple fermée (1), ainsi :

Tout arc simple, ou toute ligne simple fermée de Jordan, rectifiable au sens ordinaire l'est aussi au sens de Minkowski et avec une longueur égale à la longueur habituelle.

9. Pour un ensemble fermé plan, on peut donner une autre définition de la longueur d'après Minkowski; soit F un tel ensemble, de chaque point de F comme centre, décrivons, dans le plan de cet ensemble, un cercle de rayon donné ρ, l'ensemble des points intérieurs à l'un de ces cercles au moins, sera encore un ensemble ouvert plan dont nous désignerons la mesure par $S_F(\rho)$.

---

(1) Dans ce cas, en désignant par s la ligne

$$\frac{V_s(\rho)}{\pi\rho^2} \leqq \log s.$$

Considérons le rapport

$$\frac{S_F(\rho)}{2\rho},$$

la plus petite limite $\underline{l}(F)$ de ce rapport, lorsque ρ tend vers zéro, sera appelée la longueur inférieure de F, sa plus grande limite $\bar{l}(F)$, la longueur supérieure de F; un ensemble sera dit rectifiable et de longueur $l(F)$ si

$$l(F) = \underline{l}(F) = \bar{l}(F) \qquad (< +\infty).$$

Comparons les quantités que nous venons de définir avec celles que nous avons considérées dans les paragraphes précédents.

Nous avons, en prenant un axe des z perpendiculaire au plan de F

$$V_F(\rho) = 2\int_0^\rho S_F(\sqrt{\rho^2 - z^2})\,dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} S_F(\rho\cos\theta)\cos\theta\,d\theta.$$

De là

$$\frac{V_F(\rho)}{\pi\rho^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{S_F(\rho\cos\theta)}{2\rho\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta.$$

Or, à tout nombre ε positif donné, on peut faire correspondre un nombre η tel que, pour $\rho < \eta$, on ait

$$\underline{l}(F) - \varepsilon \leqq \frac{S_F(\rho\cos\theta)}{2\rho\cos\theta} \leqq \bar{l}(F) + \varepsilon,$$

l'égalité précédente donnera alors

$$\underline{l}(F) - \varepsilon \leqq \frac{V_F(\rho)}{\pi\rho^2} \leqq \bar{l}(F) + \varepsilon,$$

En faisant tendre vers zéro et en remarquant que ε est aussi faible que l'on veut, nous obtenons

$$\underline{l}(F) \leqq \underline{\lambda}(F) \leqq \bar{l}(F),$$
$$\underline{l}(F) \leqq \bar{\lambda}(F) \leqq \bar{l}(F),$$

et ces inégalités nous montrent que *si un ensemble* F *est rectifiable dans le plan, il l'est aussi dans l'espace et l'on a*

$$l(F) = \lambda(F).$$

Comme on le voit facilement, en employant des méthodes analogues à celles exposées dans les paragraphes précédents, la réciproque de cette proposition est vraie quand F est un arc simple ou une ligne simple de Jordan [1].

Cependant la méthode de démonstration fait apparaître, comme fort douteuse, l'exactitude de cette réciproque dans le cas général; les études sur ce sujet demanderaient des résultats très complets sur l'équation fonctionnelle d'Abel.

10. Étude de l'aire. — Soit un ensemble fermé, nous appellerons projection $F^{(\pi)}$ de F sur un plan donné (π), l'ensemble fermé des points de ce plan qui sont la projection orthogonale d'un point au moins de F; soit $m(F^{(\pi)})$ la mesure de $F^{(\pi)}$, nous allons montrer que

$$\sigma(F) \geqq m(F^{(\pi)}).$$

Considérons en effet la fonction caractéristique $f(P)$ de l'ensemble F_ρ, elle est définie de la façon suivante : elle est égale à 1 lorsque le point P est dans F_ρ et à zéro ailleurs, on a

$$V_\rho(F) = \int\int\int f(P)\,dx\,dy\,dz.$$

Prenons pour axe des z une droite perpendiculaire à (π) et pour plan des (x, y) ce plan; en intégrant d'abord le long d'une perpendiculaire (x, y) à ce plan, on a

$$\int f(P)\,dz \geqq 2\rho \qquad \text{si } (x, y) \text{ appartient à } F^{(\pi)},$$

$$\int f(P)\,dz \geqq 0 \qquad \text{si } (x, y) \text{ n'appartient pas à } F^{(\pi)},$$

d'où

$$V_\rho(F) \geqq 2\rho \int\int_{F^{(\pi)}} dx\,dy = 2\rho\, m(F^{(\pi)}).$$

---

[1] Pour un arc ou une ligne fermée simple de longueur L on obtient comme précédemment

$$\frac{S(\rho)}{2\rho} \leqq L + \frac{\pi}{2}\rho.$$

M. Errera a également obtenu cette inégalité dans son travail : *Un problème de géométrie infinitésimale* (*Mémoires Acad. Belgique*, t. 12, 1932).

en divisant par 2ρ et en faisant tendre ρ vers zéro on a le résultat annoncé.

Soit $\mu(F)$ la borne supérieure de $m(F^{(\pi)})$ pour tous les plans (π) de projection, on a, plus précisément,

$$\underline{\sigma}(F) \geqq \mu(F).$$

Nous obtiendrons un deuxième résultat général de la façon suivante : un axe des z ayant été choisi, supposons que tous les points de F soient compris entre les deux plans de cote z_1 et z_2 perpendiculaires à l'axe des $z (z_1 \leqq z_2)$; soit $F^{(z)}$ l'ensemble des points de F qui sont dans le plan de cote z ; la section de F_ρ par ce plan comprend l'ensemble $F_\rho^{(z)}$ des points du plan intérieurs à un cercle au moins de rayon ρ et ayant pour centre un point de $F^{(z)}$. Soit $S_{F(z)}(\rho)$ la mesure de cet ensemble de points. D'après la remarque que nous venons de faire on a

$$V_F(\rho) \geqq \int_{z_1}^{z_2} S_{F(z)}(\rho)\, dz,$$

de là

$$\frac{V_F(\rho)}{2\rho} \geqq \int_{z_1}^{z_2} \frac{S_{F(z)}(\rho)}{2\rho}\, dz.$$

Soit alors $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ une suite de nombres positifs qui tendent vers zéro et tels de plus que

$$\underline{\sigma}(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{V_F(\rho_n)}{2\rho_n},$$

on sait que la fonction

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{S_{F(z)}(\rho_n)}{2\rho_n},$$

est mesurable (¹) et que

$$\underline{\sigma}(F) \geqq \int_{z_1}^{z_2} \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{S_{F(z)}(\rho_n)}{2\rho_n}\, dz.$$

D'autre part, on montre facilement que la fonction $S_{F(z)}(\rho)$ est continue par rapport à ρ lorsque z est donné (²), il s'ensuit que la fonction

$$\underline{l}(F^{(z)}) = \underline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{S_{F(z)}(\rho)}{2\rho}$$

(¹) *Voir* par exemple Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire* (Paris, Gauthier-Villars, 1916).

(²) *Voir*, par exemple, G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe* (Paris, Vuibert, 1932 (en particulier page 201).

est mesurable et que l'on a

$$\int_{z_1}^{z_2} \varliminf_{n \to \infty} \frac{S_{F(z)}(\rho_n)}{2\rho_n} dz \geqq \int_{z_1}^{z_2} \underline{l}(F^{(z)})\, dz.$$

En comparant avec l'inégalité précédente, nous avons en définitive

$$\underline{\sigma}(F) \geqq \int_{z_1}^{z_2} \underline{l}(F^{(z)})\, dz.$$

11. Après avoir établi ces résultats généraux, nous allons les appliquer aux surfaces de Jordan.

Considérons deux morceaux de surface de Jordan S_1 et S_2 ayant en commun un arc de courbe rectifiable C de longueur L, je dis que l'on a

$$\underline{\sigma}(S_1 + S_2) \geqq \mu(S_1) + \mu(S_2).$$

Soient en effet $S_1^{(\varepsilon)}$ et $S_2^{(\varepsilon)}$ l'ensemble des points de S_1 et de S_2 qui sont respectivement à une distance de C au moins égale à ε, on a

$$\underline{\sigma}(S_1 + S_2) \geqq \underline{\sigma}(S_1^{(\varepsilon)}) + \underline{\sigma}(S_2^{(\varepsilon)}) \geqq \mu(S_1^{(\varepsilon)}) + \mu(S_2^{(\varepsilon)}).$$

Or un plan (π) de projection ayant été choisi, on a, d'après la note du n° 9 :

$$m\left(S_i^{(\varepsilon,\pi)}\right) \geqq m\left(S_i^{(\pi)}\right) - 2\varepsilon L - \pi\varepsilon^2 \qquad (i = 1, 2)$$

et par suite

$$\mu\left(S_i^{(\varepsilon)}\right) \geqq \mu(S_i) - 2\varepsilon L - \pi\varepsilon^2 \qquad (i = 1, 2),$$

de là

$$\underline{\sigma}(S_1 + S_2) \geqq \mu(S_1) + \mu(S_2) - 4\varepsilon L - 2\pi\varepsilon^2.$$

Cette inégalité ayant lieu quel que soit ε, le résultat annoncé s'en déduit immédiatement. Ce résultat s'étend naturellement à la réunion d'un nombre fini quelconque de morceaux de surfaces de Jordan.

Considérons à présent une surface S donnée et décomposons-la en un nombre fini de morceaux $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ayant deux à deux en commun au plus un arc de courbe rectifiable (1)

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$

---

(1) On peut démontrer l'existence de courbes rectifiables, et légitimer par

nous aurons

$$\sigma(S) \geqq \mu(S_1) + \mu(S_2) + \ldots + \mu(S_n).$$

La borne supérieure du second membre de cette inégalité, quel que soit le nombre fini n des morceaux et pour toutes les décompositions possibles de S, sera désignée par P(S) (1); en définitive, on a

$$\sigma(S) \geqq P(S).$$

En particulier, lorsque la surface S est rectifiable, P(S) est au moins égale à l'aire de S au sens de M. Lebesgue, soit L(S), ainsi que l'a démontré M. Radó (2), et l'on a

$$\sigma(S) \geqq L(S).$$

12. Considérons maintenant une surface S représentée, en coordonnées x, y, z rectangulaires par l'équation

$$(S) \qquad z = f(x, y) \qquad [0 \leqq x \leqq 1;\ 0 \leqq y \leqq 1] \ (f \text{ continue}).$$

Soit $l_y(x)$ la longueur (finie ou infinie) de la courbe section de cette surface par le plan parallèle à yz et d'abscisse x; désignons de même par $l_x(y)$ la longueur de la section par le plan parallèle

---

suite la décomposition en morceaux que nous postulons ici, sur toute surface S telle que $\sigma(S)$ est fini. Cela peut se faire en raisonnant ainsi que le fait M. Lebesgue dans sa Thèse à propos des surfaces quarrables (*Annali di Mat.*, 3e série, t. 7, p. 307 et suiv.).

Je ne reproduis pas ici cette démonstration car, comme nous l'avons annoncé, le résultat que nous allons obtenir est moins complet que celui relatif à la longueur.

(1) Une quantité analogue à P(S) mais inférieure a été appelée par M. Radó l'aire de Peano de S (*voir* le travail cité ci-dessous). A vrai dire M. Radó considère des décompositions de S un peu plus générales que celles du texte mais pour les surfaces rectifiables, l'auteur démontre que, pour obtenir P(S), il suffit de considérer les décompositions de S par des lignes rectifiables.

(2) T. Radó, *Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen* (*Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 445-479). La surface étant représentée par

$$(S) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

où u et v varient dans un domaine D du plan des (uv) et satisfont à des conditions de Lipschitz pour assurer la rectifiabilité, M. Radó démontre aussi que P(S) ou L(S) sont données par la formule

$$\iint_D \left[\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} du\, dv.$$

à xz et d'ordonnée y. D'après ce que nous avons établi à la fin du paragraphe 10, on a

$$\underline{\sigma}(S) \geqq \int_0^1 l_y(x)\,dx,$$

$$\underline{\sigma}(S) \geqq \int_0^1 l_x(y)\,dy.$$

Ainsi, pour que $\underline{\sigma}(S)$ soit borné, il est nécessaire que les intégrales des seconds membres le soient, or, M. L. Tonelli [1] a démontré que, dans ce cas, et dans ce cas seulement, la surface S était quarrable au sens de M. Lebesgue; ainsi :

La surface S sera quarrable lorsque son aire inférieure de Minkowski sera finie.

13. Je n'ai pu aller plus loin sans faire d'hypothèses supplémentaires et voici pourquoi : on voit bien facilement que l'aire d'une surface polyédrale au sens de Minkowski est égale à la somme des aires de chacune des faces, mais si l'on effectue la construction de Minkowski sur une surface polyédrale P d'aire A et limitée par une ou plusieurs courbes fermées dont la somme des longueurs sera désignée par l, on n'a pas toujours

$$V_P(\rho) \leqq 2\rho A + \pi\rho^2 l.$$

Chacun des sommets de cette surface, qui n'appartient pas à la frontière, peut apporter une contribution dans $V_P(\rho)$, contribution de l'ordre de ρ^3 il est vrai, mais contribution qui ne nous permettra pas en général de comparer l'aire de Lebesgue avec l'aire supérieure de Minkowski d'une surface limitée par une courbe rectifiable, cas auquel on pourrait, à la rigueur, se borner.

Des exemples simples mettent en évidence l'existence des termes en ρ^3 dans $V_P(\rho)$, nous déduirons cette existence de la remarque suivante.

Considérons une sphère S de rayon R et une suite de surfaces polyédrales fermées P_n ($n = 1, 2, \ldots$) qui tendent vers la sphère lorsque n augmente indéfiniment et dont les aires A_n tendent vers l'aire de la sphère, si l'on avait, quel que soit ρ,

$$V_{P_n}(\rho) \leqq 2\rho A_n,$$

---

[1] L. Tonelli, *Sulla quadratura delle superficie* (*Atti dei Lincei*, 6e série, t. 3, 1926, p. 357-362).

en raisonnant comme au n° **8**, on en déduirait, pour $\rho < R$,

$$V_S(\rho) \leqq 2\rho . 4\pi R^2,$$

or on trouve de suite

$$V_S(\rho) = 2\rho . 4\pi R^2 + \frac{8}{3}\pi\rho^3,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité précédente.

Dans le cas général, pour une surface polyédrale, nous écrirons donc

$$V_P(\rho) \leqq 2\rho A + \pi\rho^2 l + \rho^3 \omega.$$

Autour d'un sommet, une surface polyédrale étant localement à deux côtés, le coefficient de ρ^3 dans la contribution de ce sommet ne dépassera pas le double du volume du plus petit angle solide convexe qui, sur une sphère de rayon unité, contient toutes les images sphériques des normales aux différentes faces de la surface qui passent par ce sommet, normales orientées suivant un côté bien déterminé de la surface polyédrale.

Soit alors $P_n (n = 1, 2, \ldots)$ une suite de surfaces polyédrales qui tendent sur une surface de Jordan donnée S et dont les aires A_n tendent vers l'aire de S; si les quantités l_n et ω_n relatives à P_n sont bornées respectivement par l et ω, on obtiendra, en raisonnant comme au n° **8**,

$$V_S(\rho) \leqq 2\rho L(S) + \pi\rho^2 l + \rho^3 \omega,$$

de là on déduit

$$\bar{\sigma}(S) \leqq L(S).$$

Il en sera ainsi pour les morceaux S quarrables de surfaces cylindriques ou coniques, ou, plus généralement, développables, ou pour des morceaux de surfaces convexes limités par des courbes rectifiables. Car, dans les trois premiers cas, l'approximation peut être faite avec des surfaces polyédrales dont tous les sommets appartiennent à la frontière ($l_n < l$ et $\omega_n = 0$) et dans le dernier cas pour des surfaces polyédrales convexes $\left(\omega_n < \frac{8}{3}\pi\right)$. D'ailleurs, dans chacun de ces cas, on a

$$L(S) = P(S),$$

de là nous déduisons, en nous référant au n° **11**,

$$\sigma(S) = \underline{\sigma}(S) = \sigma(S) = L(S),$$

les surfaces considérées sont donc quarrables au sens de Minkowski et avec la même aire que celle de M. Lebesgue.

14. Un cas particulièrement simple est celui d'une surface S dont le plan tangent ainsi que les rayons de courbure principaux existent en chaque point et varient d'une façon continue. M.F. Sibirani (¹) s'est déjà occupé de cette question, et il a énonçé que les surfaces de cette sorte étaient quarrables au sens de Minkowski et avec l'aire habituelle, mais les considérations qui le conduisent à cette conclusion ne me semblent pas inattaquables et, de plus, l'extension du résultat au cas où la surface présente des points doubles ou des lignes singulières est faite avec trop de hâte, à mon avis.

Soit S un morceau de surface à deux côtés et de cette sorte limité par une courbe rectifiable de longueur l. Nous supposerons que chacun des rayons de courbure principaux de S garde toujours le même signe et aussi que la borne inférieure du module de chacun d'eux est positive. A chaque point de la surface nous ferons correspondre son image sphérique sur une sphère de rayon un, cette image étant définie au moyen d'une direction sur la normale à la surface, direction dirigée suivant un côté choisi de la surface, le même pour tous les points. Enfin nous admettrons qu'à deux points différents de S correspondent deux images sphériques différentes; en désignant par ω l'aire de l'image sphérique de S on a donc $\omega < 4\pi$.

Un calcul élémentaire montre alors facilement que, pourvu que ρ soit suffisamment petit,

$$V_S(\rho) \leqq 2\rho L(S) + \pi\rho^2 l + \frac{2\rho^3}{3}\omega,$$

ainsi nous obtenons, après une division par 2ρ et un passage à la limite,

$$\bar{\sigma}(S) \leqq L(S).$$

Or, dans ce cas, on sait que

$$L(S) = P(S)$$

(¹) F. Sibirani, *Sulla lunghezza delle linee e sull'area delle superficie* (*Rendiconti Istituto Lombardo,* 2ᵉ série, t. 47, 1914, p, 383-398).

et le résultat obtenu au n° 11 nous donne alors

$$\underline{\sigma}(S) = \sigma(S) = \bar{\sigma}(S) = L(S),$$

ainsi ce morceau de surface est quarrable au sens de Minkowski et avec l'aire habituelle.

Pour deux morceaux de surface de cette sorte qui ont en commun un arc rectifiable, on aura

$$\underline{\sigma}(S_1 + S_2) \geqq P(S_1 + S_2) = P(S_1) + P(S_2),$$
$$\bar{\sigma}(S_1 + S_2) \leqq \bar{\sigma}(S_1) + \bar{\sigma}(S_2) = L(S_1) + L(S_2).$$

de là on déduit que l'assemblage de ces deux morceaux est quarrable et d'aire égale à l'aire habituelle et ce résultat s'étend naturellement au cas d'un nombre quelconque, mais fini, de morceaux.

Dans le cas où la surface S présente des points singuliers où l'un des rayons de courbure principaux devient nul, ou bien où le plan tangent cesse d'exister ; si l'on désigne par F l'ensemble de ces points et par S_ε l'ensemble des points de S dont la distance à f est au moins ε et si $\bar{\sigma}(S_\varepsilon)$ est continue sur f, alors, d'après le n° 4 (propriété 4°), on aura encore

$$\bar{\sigma}(S) \leqq L(S)$$

et l'on pourra conclure comme précédemment.

Il en sera ainsi, par exemple, lorsque S présentera une ligne singulière rectifiable f (ou un point singulier) telle que dans S_ε la borne inférieure de la valeur absolue de chacun des rayons de courbure dépassera $k\varepsilon$, où k désigne une constante et lorsque l'aire de l'image sphérique de S_ε sera bornée indépendamment de ε. Ce résultat peut naturellement se généraliser en utilisant la décomposition en morceaux, mais on ne peut aller bien loin dans cette voie. Comme ce résultat est très facile à démontrer et que son intérêt me paraît bien limité, je ne crois pas utile de donner une démonstration [1].

---

[1] J'ai tenu cependant à l'indiquer car je considère comme douteux les résultats énoncés par M. F. Sibirani (*loc. cit.*). Autant que j'en puis juger, il semble que cet auteur admette sans discussion des faits qui reviennent à la continuité de $\sigma(S_\varepsilon)$ sur une ligne singulière.

15. **Remarques.** — Indépendamment des définitions précédentes de la longueur et de l'aire, la Note de Minkowski contient la définition de l'aire relative d'un morceau de surface à partir d'une surface étalon convexe: cette quantité joue un rôle fort important dans la théorie des corps convexes, théorie particulièrement visée par Minkowski. Un point curieux, que je veux signaler, c'est la marque des idées d'Archimède sur la mesure de l'étendue que porte encore ce mémoire, idées abandonnées depuis les travaux de M. Lebesgue.

Ainsi, pour une surface convexe S, Minkowski définit une *aire relative extérieure* et une *intérieure*, par exemple l'aire extérieure (intérieure) en prenant la sphère comme surface étalon est la limite, lorsque ρ tend vers zéro, du rapport $\frac{V_{S+}(\rho)}{\rho}\left[\frac{V_{S-}(\rho)}{\rho}\right]$ où $V_{S+}(\rho)[V_{S-}(\rho)]$ désigne le volume de la partie de S_ρ extérieure (intérieure) à S; l'aire extérieure et l'aire intérieure sont d'ailleurs égales dans ce cas. Ces définitions se transposent sans grande difficulté aux surfaces de Jordan à deux côtés et d'ailleurs on pourrait aussi, dans ce cas, définir une aire extérieure et une aire intérieure au sens de M. Lebesgue, mais les applications de la notion d'aire d'une surface courbe ne semblent pas nécessiter à l'heure actuelle de telles considérations.

Une notion plus simple que celle d'aire : celle de *variation suivant une direction* dont je montrerai prochainement l'importance dans la théorie des intégrales de surface, admet également une définition suivant les idées de Minkowski. Soit F un ensemble fermé, chaque point de F étant le centre d'un segment de longueur 2ρ donnée, parallèle à une direction choisie, soit $v_F(\rho)$ la mesure de l'ensemble des points qui appartiennent à l'un au moins de ces segments, on appellera variation de F suivant la direction donnée la quantité

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{v_F(\rho)}{2\rho},$$

lorsque cette limite existe. Dans la terminologie de Minkowski, la variation de F est donc son aire relative en prenant un segment de droite pour étalon.