E. CALLANDREAU

Sur les théories comparées de poussées des terres de Coulomb et de Boussinesq

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 153-172

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__153_0>

SUR LES THÉORIES COMPARÉES DE POUSSÉES DES TERRES DE COULOMB ET DE BOUSSINESQ;

PAR M. ÉDOUARD CALLANDREAU.

J'ai donné, dans un précédent travail ([1]), en partant des idées de Boussinesq d'une mécanique des *semi-fluides*, les coefficients de poussée, qui, tout au moins, pour les hypothèses retenues, semblent les meilleurs. Mais la difficulté analytique et la complexité des calculs pour arriver aux résultats numériques sont considérables, surtout comparées à la simplicité de la solution, approchée il est vrai, proposée par Coulomb par la considération du prisme hypothétique de plus grande poussée. Le présent travail a pour objet l'étude comparative des méthodes de Coulomb et de Boussinesq, et l'examen critique de l'hypothèse du prisme de poussée. J'y recherche aussi le profil des surfaces de rupture de la théorie nouvelle.

Afin d'éviter des développements inutiles, j'ai dû utiliser comme acquis certains résultats de mon travail précité. J'y renvoie, au besoin, pour le détail. On y trouvera, en particulier au début, un examen critique des hypothèses qui servent de base à la théorie de la poussée des terres, et qui ne constituent pas la partie la moins curieuse de la question; et aussi un index bibliographique assez complet de la littérature des masses pulvérulentes.

I. — La méthode de Coulomb et la théorie de Boussinesq. Examen critique de l'hypothèse du prisme de poussée.

1. Lorsque Boussinesq eut donné, pour la première fois, les bases mathématiques de la théorie des corps semi-fluides ([2]), et en

([1]) Thèse.
([2]) BOUSSINESQ, *Recueil des savants étrangers de l'Académie Royale de Belgique*, t. XL, 1876.

indiqua l'application aux matières pulvérulentes, au problème de la poussée des terres en particulier, divers auteurs et non des moindres crurent voir une antinomie, sinon un désaccord complet entre la théorie nouvelle, et l'ancienne théorie de Coulomb basée, comme l'on sait, sur l'existence hypothétique d'un prisme de plus grande poussée. Ces auteurs ([1]) ont alors même rejeté la légitimité de l'hypothèse d'existence de ce prisme, et ont conseillé l'abandon de ce procédé, malgré sa simplicité et sa rapidité d'emploi dans la pratique.

2. Or, soit le massif indéfini, derrière la paroi qui le retient, susceptible de se renverser par rotation autour de l'arête horizontale de base. L'application que l'on ferait à cette masse supposée homogène de la théorie nouvelle, c'est-à-dire de la méthode de Boussinesq, consisterait, en fait, à supposer implicitement, au moment, où, par suite d'un commencement de renversement du mur, le massif serait prêt à s'ébouler, l'état ébouleux réalisé partout en même temps dans le massif.

Les conditions ordinaires d'équilibre y seront partout vérifiées, et aussi puisqu'il s'agit ici d'une distribution plane des pressions, la relation (où N_x, N_y, T désignent les trois composantes principales de pression relatives aux axes) :

$$\sin^2\Phi = \frac{(N_x - N_y)^2 + 4T^2}{(N_x + N_y)^2}, \tag{1}$$

exprimant la grandeur du sinus de l'angle Φ, fait en un point quelconque du massif avec la normale à l'élément plan qu'elle sollicite, par la pression qui est la plus oblique à cet élément. La surface de glissement ou de rupture S, dont le profil issu du pied de la paroi monte en s'en éloignant jusqu'à la surface libre, éprouve sur son étendue des pressions inclinées par rapport à la normale de l'angle Φ de frottement intérieur. Le même mode d'équilibre subsisterait donc si le prisme de terre, situé au-dessus de la surface S, restait seul pulvérulent, et s'éboulait en glissant contre la masse sous-jacente supposée au contraire devenue solide. Il en résulterait une poussée $\mathfrak{T}$ du prisme contre la paroi.

([1]) Résal, *Poussée des terres*, p. V et 125 (Béranger, 1910).

Considérons, avec Boussinesq, une autre surface S' de profil issu du même point au pied de la paroi, menée dans le massif jusqu'à la surface libre. Elle éprouvera sur son étendue des pressions, qui, dans le mode d'équilibre considéré, font avec les normales des angles Φ', inférieurs ou au plus égaux à l'angle Φ maximum. Si la partie sous-jacente à la surface S' devenait alors solide et soit telle que son angle de frottement contre la matière pulvérulente soit justement Φ', le même mode d'équilibre subsisterait encore dans la partie du massif au-dessus de S' restée pulvérulente ; et la poussée du prisme pulvérulent contre la paroi serait encore égale à $\mathfrak{T}$.

Mais la partie, sous-jacente à S' possède en fait un angle de frottement égal à $\overline{\Phi}$, et par conséquent supérieur à Φ', ce qui a pour conséquence d'augmenter la grandeur de la réaction du prisme sur cette partie sous-jacente et par conséquent de diminuer, puisque leur somme géométrique doit équilibrer le poids du prisme situé au-dessus de S', la poussée-limite sur le mur.

La poussée la plus grande sur la paroi émane donc du prisme pulvérulent correspondant à la surface de rupture $\mathfrak{S}$. L'hypothèse de Coulomb du prisme de plus grande poussée se trouve donc justifiée, si l'on admet l'hypothèse qui sert de base à la théorie nouvelle, à savoir l'établissement instantané de l'état ébouleux dans le prisme susceptible de se détacher.

Coulomb, d'autre part, en formulant l'hypothèse du prisme de poussée, admet par là même l'existence de deux plans de rupture, l'un en fait le long de la paroi, l'autre qui partant du pied de celle-ci s'en éloigne en montant jusqu'à la surface libre. Il admet même implicitement l'existence des plans de glissement à toute hauteur au-dessus de celui-ci, pour déterminer la position du centre de poussée. Et cette hypothèse n'est en somme pas autre que celle de l'état ébouleux partout réalisé en même temps dans le prisme de poussée ; de telle sorte que l'hypothèse du prisme de poussée de Coulomb comporte en fait l'existence de l'état ébouleux de Boussinesq. Il n'y a donc pas de désaccord, mais bien accord entre l'ancien point de vue de Coulomb et la théorie nouvelle de Boussinesq à la seule condition d'admettre dans le prisme de poussée l'établissement réalisé partout à la fois en même temps de l'état ébouleux. Et l'on peut dire alors que tout se passe comme si le prisme, limité par la surface S et dénommé prisme de plus grande poussée, était seul à agir contre la paroi.

Il y a lieu toutefois de remarquer que Boussinesq admet implicitement l'état ébouleux réalisé partout à la fois dans le massif, alors que la traduction de l'hypothèse de Coulomb ne demande la réalisation instantanée de cet état ébouleux que dans le prisme de poussée lui-même. Mais en fait, au delà de la surface S vers le gros du massif, l'effet de la poussée sur l'état ébouleux au voisinage du mur décroît rapidement pour devenir très vite insensible; et l'état ébouleux, s'il existe dans cette région, intervient de moins en moins, car l'état pulvérulent du massif y suffit de plus en plus pour y maintenir les molécules en équilibre, de sorte que la théorie nouvelle ne demande en fait, pour employer une locution de Boussinesq, la réalisation instantanée de l'état ébouleux que dans le prisme de plus grande poussée et *un peu au delà*.

3. Coulomb, pour tirer parti de son intéressante conception du prisme de plus grande poussée envisage *a priori* une forme plane de la surface de rupture. Mais il prévoit ([1]), en même temps, qu'il n'obtient ainsi qu'une approximation par défaut de la poussée, ce qui la rend difficile *en principe* à retenir pour la pratique puisque son approximation, ou plutôt le sens de celle-ci, n'est pas dans le sens de la sécurité.

Or l'hypothèse d'une rupture plane est loin d'être évidente *a priori*. Bien plus la théorie nouvelle permet d'établir que, si l'angle Φ de frottement intérieur prend une valeur *constante* dans le gros du massif, c'est-à-dire dans la portion de celui-ci comprise entre la surface libre et le plan de Maurice Lévy, il a *au contraire* — l'état d'équilibre étant toujours l'équilibre-limite du massif homogène d'angle φ — une valeur *variable* dans la partie du massif située entre ce plan particulier et le mur.

De sorte que si la surface de rupture S peut, entre le plan de Maurice Lévy et la surface libre, être plane, il y a forte présomption qu'elle ne le soit plus entre ce plan particulier et le mur.

D'autre part, dans l'hypothèse de Coulomb d'un *plan* de rupture, les lignes de glissement émanées d'un point du massif ne font

([1]) *Savants étrangers de l'Ac. Sc. Paris*, t. VII, 1773, p. 359.

pas entre elles, tout au moins dans le voisinage du mur, l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ qu'assigne la théorie de la répartition plane des pressions. En particulier, le long de la paroi où l'écart est le plus grand, celles-ci sont inclinées l'une sur l'autre d'un angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ moitié de l'angle théorique. Au même point, les lignes de rupture, dans la théorie nouvelle, se coupent sous un angle $\frac{\pi}{2} - \Phi$ très voisin de $\frac{\pi}{2} - \varphi$ puisque l'angle alors variable Φ voisin et supérieur à φ ne le dépasse pas de plus de 5° pour les valeurs usuelles de l'argument.

Ces diverses réflexions sembleraient donc inciter à regarder à première vue, pour l'hypothèse commune de base de l'état ébouleux retenue, les résultats de la théorie nouvelle comme plus complets, et vraisemblablement plus proches de la réalité que ceux de Coulomb.

4. Boussinesq a recherché l'équation du profil de la surface S [1] mais seulement dans un cas particulier en considérant un mode d'équilibre-limite acceptant des formules *approchées* des pressions, telles en particulier que le rapport de N_y à N_x soit constant et égal à $e^2 = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. Il s'est borné, de plus, au cas du seul talus horizontal. Il suppose enfin que la quantité e est toujours petite devant l'unité, ce qui, du reste, ne semble pas être bien légitime, car ceci revient à n'admettre pour φ que des valeurs voisines de $\frac{\pi}{2}$. Or la pratique enseigne que l'angle de terre coulante des masses pulvérulentes non cohérentes ne saurait dépasser 45° à 50°.

Je veux ici reprendre la question sous un jour plus général. Je considère les expressions exactes des pressions. J'envisage la surface libre à surface inclinée; je laisse l'angle φ susceptible de prendre toutes les valeurs, et seulement celles que la pratique lui assigne, soit entre 18° et 50° environ.

Je rappelle aussi que la poussée, dans la théorie nouvelle, vaut la moyenne arithmétique de deux approximations, du reste voisines, l'une par défaut, l'autre par excès, correspondant respectivement à deux massifs hétérogènes quant à l'angle de frottement intérieur

---

[1] *Ann. Éc. Normale*, 1918.

dont les poussées sur la paroi sont alors plus faibles et plus fortes que celle du massif homogène considéré. L'angle de frottement intérieur du second massif correspondant à l'approximation par excès, constant dans le gros du massif, est inférieur à l'angle φ de terre coulante du massif homogène sans que l'écart dépasse du reste 2°. Variable en deçà du plan de Maurice Lévy, il atteint cette valeur φ contre la paroi. L'angle sur le mur de frottement extérieur est φ_1. Le premier massif, qui fournit l'approximation par défaut a même valeur φ de l'angle de terre coulante du massif homogène, pour l'angle de frottement intérieur de sa partie principale qui atteint contre le mur une valeur Φ dépassant de 5° environ φ et pour son angle de frottement extérieur.

Il est clair qu'à chacun de ces massifs hétérogènes correspondrait, issue du pied du mur, une ligne de rupture définissant le prisme de poussée correspondant. Il va de soi que ces lignes voisines l'une de l'autre sont d'allure identique. Je me bornerai donc à l'étude de l'une d'elles, celle qui correspond à l'approximation par défaut, pour laquelle les calculs se présentent d'une manière plus simple.

II. — Équation différentielle des lignes de rupture dans la théorie nouvelle.

5. Le problème traité est plan. La ligne de plus grande pente de la surface libre, inclinée d'un angle ω sur l'horizon est prise comme axe des y; la perpendiculaire à cette direction en son point de rencontre O avec le profil du mur supposé vertical est prise comme axe des x, le sens des x croissant étant dirigé vers le bas.

L'équation différentielle du profil de rupture s'écrit de suite

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\alpha, \tag{2}$$

où α représente l'angle que fait avec Ox la trace du plan tangent en M à la surface de rupture. Or d'après les propriétés connues de la répartition plane des pressions en ce point M, l'élément chargé fait l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$ avec la ligne de rupture, ou mieux avec la trace du plan tangent en M à la surface; de sorte que si θ représente l'angle polaire correspondant au rayon OM, on aura en grandeur et en signe, φ' désignant l'angle de frottement intérieur

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi',$$

d'où

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi' - \theta. \tag{3}$$

L'angle de frottement intérieur φ' variable dans la partie du massif située entre le mur et le plan Lévy, et qui, au delà de ce plan et jusqu'à la surface libre, devient égal à l'angle constant φ de terre coulante, est relié du reste à celui-ci par l'expression (1) où l'on fait Φ égal à φ', qui exprime, somme toute, que l'état ébouleux se produit non seulement dans le gros du massif, mais encore dans la partie située entre le plan Lévy et le mur. Elle peut se mettre sous la forme

$$\sin^2\varphi' = \sin^2\varphi(1 + B^2) \tag{4}$$

avec

$$B = \frac{\operatorname{tang}\theta_0 - \operatorname{tang}\theta}{A + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\varphi},$$

où θ_0 représente la valeur particulière de l'angle θ correspondant au plan Lévy, et où A vaut

$$A = \frac{1}{c\cos^2\theta_0} - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\theta_0$$

la valeur de c obtenue par la considération de glissement contre le mur étant

$$c = \frac{\cos(\theta_0 - \delta)}{\sin\delta\cos\theta_0}\,\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_1 + 2\delta)}{\operatorname{tang}\varphi[\sin\varphi_1 + \sin(2\delta - \varphi_1)]}.$$

φ_1 y désigne l'angle de frottement contre le mur, et δ vaut, puisque le mur est ici vertical, la grandeur de l'inclinaison du plan Lévy sur la verticale, soit

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\omega - \arcsin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right) = \theta_0 + \omega \quad (^1).$$

Je supposerai que l'angle φ_1 de frottement extérieur est égal à

---

(1) *Voir* pour toutes ces formules : Boussinesq, *C. R. Ac. Sc.*, 1917.

l'angle φ, de sorte que l'expression de A se simplifie, et devient après des réductions faciles

$$A = 1 + \operatorname{tang}\omega(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta_0),$$

qui montre que pour une surface libre horizontale, A vaut alors l'unité.

La relation (4), écrite pour les tangentes, deviendra alors, si l'on y remplace B par sa valeur, où l'on pose d'autre part $\operatorname{tang}\theta = t$ avec $\operatorname{tang}\theta_0 = a$, puis développant

$$(5)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang}^2\varphi' &= \operatorname{tang}^2\varphi \frac{t^2(1+\operatorname{tang}^2\varphi) + 2t(A\operatorname{tang}\varphi - a) + A^2 + a^2}{(A + a\operatorname{tang}\varphi)[2t\operatorname{tang}\varphi + A - a\operatorname{tang}\varphi]} \\ &= \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{A + a\operatorname{tang}\varphi}\,\frac{F_2}{F_1}, \end{aligned}$$

F_2 et F_1 désignant respectivement des polynomes du second et du premier degré en t, A et a résultant des données ω et φ. La dérivée en t, dont on met facilement en évidence que le signe est celui du produit $(t - a)(A + t\operatorname{tang}\varphi)$, est, dans le champ du problème, toujours négative, puisque alors le facteur $(t - a)$ l'est sans cesse, pendant que l'expression $(A + t\operatorname{tang}\varphi)$ reste positive, dont une plus petite valeur $1 - \operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\theta_0$ l'est encore lorsqu'on y remplace ω et θ_0 par leurs plus grandes valeurs respectives φ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. L'angle φ' varie donc en sens inverse de t, c'est-à-dire de θ. Sa plus faible valeur vaut φ sur le plan Lévy; il croît sans cesse à mesure que le plan d'angle polaire θ se rapproche du mur, où il atteint sa plus grande valeur Φ donnée par la relation

$$(6)\qquad \sin\Phi = \frac{\sin\varphi}{\cos(\theta_0 + \omega)}.$$

Je remplace alors dans l'équation (2), $\operatorname{tang}\alpha$ par sa valeur en fonction de $\operatorname{tang}\varphi'$, puis de $\operatorname{tang}\theta = t$, et j'obtiens en fonction du paramètre auxiliaire t les équations du profil de rupture, soit, d'une part, $y = tx$, et, d'autre part, l'équation différentielle

$$(7)\qquad -x\frac{dt}{dx} = \frac{1 + t^2}{t + \operatorname{tang}\varphi},$$

que l'on peut écrire, après quelques réductions faciles, variables séparées,

$$(8)\qquad -\frac{dx}{x}=\frac{t\,dt}{1+t^2}+\frac{\tang\varphi}{\sqrt{A+a\tang\varphi}}\cdot\frac{F_2}{\sqrt{F_1F_2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$

6. Dans le gros du massif, c'est-à-dire entre le plan Lévy et la surface libre, l'angle de frottement intérieur φ' est constant et égal à l'angle φ de terre coulante. La relation (5) entre $\tang\varphi'$ et $\tang\varphi$ oblige donc à prendre pour valeur du paramètre t une valeur constante, soit $a=\tang\theta_0$. C'est, du reste là un résultat connu : on sait, en effet, que sur le plan Lévy l'angle polaire θ prend la valeur particulière θ_0, et qu'au delà de ce plan particulier et vers la surface libre, l'inclinaison aiguë toujours négative χ sur l'axe Ox de l'élément le plus chargé est alors constante et donnée par la plus petite en valeur absolue des deux solutions aiguës négatives de l'équation

$$(9)\qquad \sin\omega+\sin(2\chi+\omega)\sin\varphi=0.$$

Cette valeur de χ étant liée à θ_0 par la relation

$$(10)\qquad \theta_0=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+\chi,$$

et les droites d'égale inclinaison étant alors des droites parallèles.

Dans ce cas, c'est-à-dire pour le gros du massif, l'équation différentielle du profil de rupture se met de suite sous la forme

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\tang(\theta_0+\varphi)},$$

ce qui fournit, en intégrant, puisque le second membre est constant, la droite

$$(11)\qquad y=-\frac{x}{\tang(\theta_0+\varphi)}+\frac{x_0\cos\varphi}{\cos\theta_0\sin(\theta_0+\varphi)},$$

comme profil de rupture, x_0 désignant l'abscisse du point où cette droite coupe la trace du plan Lévy.

7. Mais, dans la partie du massif, située en deçà du plan Lévy et contre le mur, là où par suite de la considération d'un massif théorique hétérogène quant à l'angle de frottement intérieur, substitué au massif homogène réel, l'angle de frottement intérieur φ' doit être regardé comme variable, l'intégration est loin d'être aussi simple. Elle relève, puisqu'un polynome du troisième degré se trouve sous radical, des fonctions elliptiques. Faisons donc subir quelques transformations à cette écriture afin de la mettre sous forme réduite. Le changement de variable $t = \frac{1}{v}$ permet tout d'abord de transformer le polynome du troisième degré en un polynome du quatrième degré. Le facteur différentiel $\frac{dt}{\sqrt{F_1 F_2}}$ s'écrit alors

$$\frac{dv}{\sqrt{v[(A - a\,\text{tang}\,\varphi)v + 2\,\text{tang}\,\varphi][(A^2 + a^2)v^2 - 2v(A\,\text{tang}\,\varphi - a) + 1 + \text{tang}^2\,\varphi]}},$$

où l'on peut n'avoir sous le radical que des termes de degré pair. Il existe en effet entre les quatre racines de ce polynome en v une relation d'involution

$$Lx'x'' + M(x' + x'') + N = 0,$$

par exemple entre les racines 0 et $-\frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{A - a\,\text{tang}\,\varphi}$ d'une part, et d'autre part, les deux racines imaginaires conjuguées du trinome en v^2. On aura donc les deux écritures

$$-\frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{A - a\,\text{tang}\,\varphi} M + N = 0,$$

$$L\frac{1 + \text{tang}^2\,\varphi}{A^2 + a^2} - 2M\frac{A\,\text{tang}\,\varphi - a}{A^2 + a^2} + N = 0,$$

et comme l'on peut toujours par exemple prendre M égal à l'unité, on en déduit

$$N = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{A - a\,\text{tang}\,\varphi},$$

$$L = -\frac{2Aa}{A - a\,\text{tang}\,\varphi}.$$

Les points doubles de l'involution sont alors racines de l'équation

$$-\frac{2Aa}{A - a\,\text{tang}\,\varphi}X^2 + 2X + \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{A - a\,\text{tang}\,\varphi} = 0,$$

qui donne

$$X' = \frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad X'' = -\frac{\operatorname{tang}\varphi}{A}.$$

De sorte que le changement de variable

$$z = \frac{v + \dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{A}}{v - \dfrac{1}{a}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad v = \frac{Az + a\operatorname{tang}\varphi}{Aa(z-1)},$$

conduira au résultat cherché. Et le facteur différentiel en v s'écrira

$$\frac{a}{A\sqrt{A + a\operatorname{tang}\varphi}} \frac{dz}{\sqrt{\left(z^2 - \dfrac{a^2\operatorname{tang}^2\varphi}{A^2}\right)\left(z^2 + \dfrac{a^2}{A^2}\right)}},$$

ou en posant $z = \dfrac{a\operatorname{tang}\varphi}{A\cos\psi}$, étant donnée la réalité des racines du trinome en z^2 sous le radical

$$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{A + a\operatorname{tang}\varphi}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi\sin^2\psi}}.$$

Si donc je fais subir les mêmes changements de variable au facteur $\dfrac{F_2}{1+t^2}$ de l'élément différentiel considéré, j'obtiens, pour le dernier terme du second membre de l'équation différentielle (8), l'écriture

$$\sin\varphi(A + a\operatorname{tang}\varphi)\frac{\cos^2\psi + \operatorname{tang}^2\varphi}{(a\operatorname{tang}\varphi - A\cos\psi)^2 + \operatorname{tang}^2\varphi(1+\cos\psi)^2}$$
$$\times \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi\sin^2\psi}}.$$

Mais la fraction rationnelle en $\cos\psi$, si l'on multiplie ses deux termes pour n'avoir au dénominateur que des puissances paires du cosinus, par le facteur conjugué de son dénominateur, peut se décomposer en deux fractions de même dénominateur dont les numérateurs ne contiendront respectivenent que des puissances impaires ou des puissances paires du cosinus. La deuxième fraction — puisque son dénominateur vaut le produit de deux facteurs trinomes distincts en $\cos^2\psi$ — se décompose elle-même en deux fractions rationnelles; de sorte que, après quelques réductions aisées, on obtient pour écriture de l'équation différentielle (8)

$$
(12)\quad -\frac{dx}{x} = \left\{ \frac{t\,dt}{1+t^2} \cdot \frac{\sin\varphi(\mathrm{A} + a\operatorname{tang}\varphi)}{\mathrm{A}^2 + \operatorname{tang}^2\varphi}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\sin^2\psi}} \right.
$$

$$
- \frac{2\sin\varphi\operatorname{tang}\varphi(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)(\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a)(\cos^2\psi + \operatorname{tang}^2\varphi)}{\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)^2\cos^4\psi \\ \quad + 2\cos^2\psi[(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)^2-(\operatorname{tang}\varphi-\mathrm{A}a)^2]\operatorname{tang}^2\varphi + \operatorname{tang}^4\varphi(a^2+1)^2\end{array}\right\}}
$$

$$
\times \frac{\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\sin^2\psi}}
$$

$$
+ \frac{(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)\operatorname{tang}^2\varphi\sin\varphi}{(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)^3}(\mathrm{P}+i\mathrm{Q})
$$

$$
\times \frac{1}{\cos^2\psi - \dfrac{\operatorname{tang}^2\varphi}{(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)^2}[\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a + i(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)]^2}
$$

$$
\times \frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\sin^2\psi}}
$$

$$
\times \frac{(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)\operatorname{tang}^2\varphi\sin\varphi}{(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)^3}(\mathrm{P}-i\mathrm{Q})
$$

$$
\times \frac{1}{\cos^2\psi - \dfrac{\operatorname{tang}^2\varphi}{(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)^2}[\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a - i(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)]^2}
$$

$$
\left. \times \frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\sin^2\psi}} \right\},
$$

i désignant $\sqrt{-1}$, où ψ est relié à t par le changement de variable précédemment indiqué, et où P et Q ont respectivement les valeurs

$$
\mathrm{P} = \frac{1}{2}[4(\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a)^2 + (\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi - a^2 - 1)],
$$

$$
\mathrm{Q} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi)(a^2+1)(\mathrm{A}^2+\operatorname{tang}^2\varphi - a^2 - 1) \\ \quad + [4(\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a)^2 + \mathrm{A}^2 + \operatorname{tang}^2\varphi - a^2 - 1)][(\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a)^2 - (\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)]^2\end{array}\right\}}{2(\operatorname{tang}\varphi - \mathrm{A}a)(\mathrm{A}+a\operatorname{tang}\varphi)}.
$$

Sous cette forme *réduite* (12) on voit que dans le second membre le premier terme s'intègre de suite, et que l'on obtient aussi par quadrature l'intégrale du troisième en posant $\sin\psi = \xi$ puisque la fonction sous le signe $\int$ serait alors rationnelle en ξ et en radicaux du second degré comportant la variable seulement au second degré. L'intégration du second terme introduit, d'autre part, l'intégrale elliptique de première espèce, et les deux derniers termes, des intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre imaginaire, ramenables chacune, comme l'on sait, à deux intégrales de troisième espèce à paramètres réels, qui se réduisent au total à deux seulement ici, les termes en Q s'évanouissant dans la réduction. Je ne poursuivrai pas, du reste, ce développement et je remarque simplement que des tables n'existant pas de ces dernières transcendantes, par suite du paramètre supplémentaire, l'intégrale de l'équation différentielle ne pourrait être poursuivie que dans chaque cas particulier, c'est-à-dire pour chaque valeur connue du couple des arguments ω et φ.

III. — Étude des courbes intégrales.

8. Je laisse donc de côté l'intégration de l'équation différentielle, et étudierai directement sur celle-ci les propriétés des courbes intégrales représentant les profils de rupture recherchés.

J'étudie d'abord la *concavité* de ces courbes. Celle-ci sera indiquée par le signe de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx}.$$

Or

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{dt} \times \frac{dt}{dx};$$

et la relation (7) montre que $\frac{dx}{dt}$ est négatif, puisque dans le champ du problème, x est toujours positif, et que φ' étant supérieur à φ, $\operatorname{tang}\varphi' + t$ dont la plus faible valeur serait $\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\omega$ est toujours positif. La concavité, $\frac{d\varphi'}{dt}$ étant tiré de la relation (5) dérivée en t, est donc indiquée par le signe de

$$(13)\quad (1+t^2)\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d(\theta+\varphi')}{d\theta}$$
$$= -1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi'}\operatorname{tang}\varphi(A + a\operatorname{tang}\varphi)\frac{(a-t)(1+t^2)}{(A + t\operatorname{tang}\varphi)^3},$$

que je dis être toujours négatif.

On a déjà vu précédemment que le binome $1 - \operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\theta_0$ est, dans le champ du problème, toujours positif. Il en résulte que, comme A, le binome $A + t\,\mathrm{tang}\varphi$ qui s'écrit

$$1 - \mathrm{tang}\,\omega\,\mathrm{tang}\,\theta_0 + \mathrm{tang}\,\varphi(\mathrm{tang}\,\theta + \mathrm{tang}\,\omega)$$

est aussi positif.

Le signe de $\frac{dx}{dt}$ sera *a fortiori* négatif si, remplaçant dans le dernier membre de (13) la fraction $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi'}$ par une plus grande valeur, j'obtiens pour celui-ci un résultat négatif. Or si φ' est inférieur à $\frac{\pi}{4}$, la fraction $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi'}$ reste inférieure à l'unité. D'autre part lorsque φ' dépasse $\frac{\pi}{4}$, ce qui peut avoir lieu puisque φ qui lui est inférieur peut parvenir à 50°, une plus grande valeur de la fraction qui est alors supérieure à l'unité, vaudra, Φ désignant la plus grande valeur de φ' (6) contre le mur

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\Phi} = \frac{\cos\varphi\cos^2(\theta_0 + \omega)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0 + \omega - \sin^2\varphi)}}$$

dont la dérivée en ω, en désignant par λ le radical positif $\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\omega}$, est du signe de la quantité

$$(\lambda + \cos\omega)\sin(\varphi - \omega) - 4\sin^3\varphi$$

toujours négative, puisque variant constamment en sens inverse de ω, elle vaut pour ω nul,

$$(14) \qquad (\sin\varphi + 1)\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$
$$= -4\sin\varphi\left[\sin\varphi + \frac{\sqrt{17}-1}{8}\right]\left[\sin\varphi - \frac{\sqrt{17}+1}{8}\right]$$

qui reste sans cesse négatif dans le domaine de variation de φ. En effet, la relation (6) permet de reconnaître que le plus grand écart entre Φ et φ a lieu pour ω nul, et par suite que la plus petite valeur positive de $\sin\varphi$ correspondant à Φ égal à $\frac{\pi}{4}$ vaut justement $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$; de sorte que, φ, étant de toute manière inférieure à 50°, le dernier facteur de (14) reste positif dès que φ' ou Φ est supérieur à $\frac{\pi}{4}$.

Ce sera donc pour ω nul que la fraction $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi'}$ ou mieux $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\Phi}$

prend sa plus grande valeur. Or la dérivée en φ de

$$\frac{\cos\varphi\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)-\sin^2\varphi}}=\frac{1}{2}\frac{(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}+\sin\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

est toujours positive. La fraction considérée sera donc la plus grande pour la plus grande valeur de φ, soit 50°. Le calcul donne la valeur par excès $1,044$.

Il suffit maintenant de montrer que le numérateur

$$(15)\qquad -(A+t\tang\varphi)^3+1,044\tang\varphi(A+a\tang\varphi)(a-t)(1+t^2)$$

de la fraction représentant $\frac{d\alpha}{dt}$ reste négatif dans le domaine de variation de t et des arguments ω et φ. Il a pour dérivée au facteur positif près $\tang\varphi$, le trinome du second degré en t

$$\begin{aligned}&-3t^2[\tang^2\varphi+1,044(A+a\tang\varphi)]\\&-2t[3A\tang\varphi-1,044a(A+a\tang\varphi)]-[3A^2+1,044A+a\tang\varphi],\end{aligned}$$

qui, ayant ses racines imaginaires, est toujours du signe de son premier terme, c'est-à-dire négatif. Le numérateur (15) varie donc en sens inverse de t. Or le résultat de la substitution à t dans (15) de sa plus petite valeur, soit ($-\tang\omega$), qui s'écrit

$$\begin{aligned}&-\frac{(1-\tang\omega\tang\theta_0)^2}{\cos^2\omega[1+\tang\omega\tang(\omega+\theta_0)]}\\&\times\{1-1,044\tang\varphi\tang(\omega+\theta_0)\\&\qquad[1+\tang\varphi\tang(\omega+\theta_0)][1+\tang\omega\tang(\omega+\theta_0)]\},\end{aligned}$$

reste toujours négatif, puisque la parenthèse, même lorsqu'on y remplace dans le dernier facteur du second terme $\tang\omega$ par $\tang\varphi$ qui lui est supérieure, reste positive. En effet, d'une part, sa dérivée en ω est toujours positive, puisque utilisant les relations (9) et (10), on trouve pour valeur de $\frac{d\tang(\omega+\theta_0)}{d\omega}$ le produit négatif $\frac{1}{\cos^2(\theta_0+\omega)}\times\frac{\lambda-\cos\omega}{\lambda}$; par suite, la parenthèse varie dans le même sens que ω. D'autre part, l'expression de celle-ci, où l'on fait ω nul, soit

$$1 - 1{,}044 \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left[1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^2,$$

reste positive dans les limites de variations de φ : $18^\circ < \varphi < 50^\circ$. Car dans ce domaine, le polynome du sixième degré en $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$

$$\left(1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^6 - 2 \times 1{,}004 \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\left[1 + 4 \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\right]^2,$$

qui n'est autre que le numérateur de l'expression précédente écrite en $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, dont le dénominateur est toujours positif, reste positif. Il vaudrait l'unité pour φ nul, puis croît pour passer par un maximum d'environ 1,7 dans le voisinage de $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$ pour décroître, en ayant encore la valeur positive 0,32 pour $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$ supérieure à $\operatorname{tang}\frac{50^\circ}{2} = 0{,}4653$.

Ces développements montrent que $\frac{d^2y}{dx^2}$ reste négatif dans le domaine étudié. Le profil cherché présente donc constamment sa concavité tournée vers l'origine, jusqu'à la trace du plan Lévy, où le profil courbe devient, comme l'on sait, rectiligne.

9. Il part évidemment un tel profil de tout point A à une distance l quelconque sous l'origine O, comptée sur le parement du mur, et tous ces profils sont homothétiques par rapport à O.

La tangente en A a son coefficient angulaire donné par la valeur de

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi' - \theta\right)$$

pour $\theta = -\omega$ et $\varphi' = \Phi$, soit $-\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi + \omega\right)$. L'angle β toujours aigu, fait par celle-ci avec le profil vertical du mur vaut $\frac{\pi}{2} - \Phi$, et croît constamment avec ω de $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sin\varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$ à $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Il varie, du reste, très peu. Le calcul numérique montre que l'écart de ses valeurs extrêmes est seulement de 5° environ.

10. Un autre point intéressant du profil est le point C′ où la courbe intégrale traverse la trace du plan Lévy. Il est caractérisé par le fait qu'alors t vaut a, ou $\operatorname{tang}\theta$, $\operatorname{tang}\theta_0$; ou encore par la valeur particulière $\frac{\pi}{2}$ de ψ. La tangente en C′ est de coefficient angulaire

$$-\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\theta_0\right)=-\frac{1}{\operatorname{tang}(\varphi+\theta_0)},$$

qui n'est autre que celui (11) des lignes de rupture dans le gros du massif. Elle fait avec le parement vertical du mur l'angle

$$\gamma=\frac{\pi}{2}-\varphi-\omega-\theta_0$$

qui varie dans le même sens que ω, et dont les valeurs extrêmes pour ω nul et égal à φ sont $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\varphi$. La variation des angles γ qui oscillent du simple au double est donc plus large que celle des angles β.

Les différences $\beta-\gamma=-\Phi+\varphi+\omega+\theta_0$ ont une dérivée en ω qui s'écrit

$$[1-\operatorname{tang}(\theta_0+\omega)\operatorname{tang}\Phi]\left(1+\frac{d\theta_0}{d\omega}\right),$$

où le crochet, fonction croissante avec ω puisque $\theta_0+\omega$ et Φ et par suite leurs tangentes trigonométriques, car il s'agit d'angles aigus positifs, diminuent quand ω augmente, est toujours positif puisqu'il l'est pour ω nul, comme il est aisé de le vérifier. Le facteur $1+\frac{d\theta_0}{d\omega}$ qui, étant égal à $1+\frac{d\chi}{d\omega}$, se calcule aisément en partant de (9) et vaut $-\frac{1}{2}\frac{\cos\omega-\lambda}{\lambda}$ est, d'autre part, toujours négatif.

Il en résulte que les différences positives $\beta-\gamma$ décroissent pour ω croissant; elles prennent, du reste, une valeur nulle pour $\omega=\varphi$.

11. Il suit, de ce dernier résultat, le profil de rupture émané de A ayant sa concavité tournée vers l'origine, et la tangente en A étant plus inclinée sur la verticale que la tangente au point C′ de passage du profil sur le plan Lévy, que ce point C′ d'abscisse x_0 se trouve toujours situé par rapport à l'origine au-dessous du point C qui désignerait l'intersection toujours avec la trace du plan Lévy de

la parallèle à la droite de glissement du gros du massif émanée du même point A. La différence CC′ décroît du reste avec ω croissant pour devenir nulle lorsque ω vaut φ.

L'on peut aussi remarquer que la grandeur de l'angle des deux tangentes extrêmes en A et C′ sous lequel on voit le profil, supplémentaire de $\beta - \gamma$, donne une idée de la courbure moyenne du profil, qui croît constamment avec ω pour devenir infinie lorsque ω vaut φ : la partie courbe du profil s'évanouit alors.

12. A défaut d'obtenir sous forme finie l'équation du profil, on pourrait, ayant les tangentes en A et C′, le *construire* pratiquement, si l'on connaissait la position exacte de C′, c'est-à-dire puisqu'il se trouve sur la trace du plan Lévy d'angle pola re θ_0, son abscisse x_0. La valeur de celle-ci, ou plutôt de son logarithme, s'obtient, la constante d'intégration étant déterminée par la condition que le profil passe par A, par l'intégration du second membre de l'équation différentielle (12) où l'on remplacerait les limites supérieures variables des intégrales par les valeurs a ou $\frac{\pi}{2}$, respectivement relatives aux variables t et ψ sous le signe $\int$.

On sait, en effet, que toute fonction elliptique de troisième espèce à paramètre imaginaire est réductible à deux fonctions de la même espèce dont les paramètres sont réels, et que la fonction *complète* de troisième espèce à paramètre réel peut toujours s'exprimer par des fonctions de première et de deuxième espèce. En fait, l'ensemble des deux intégrales de troisième espèce à paramètre imaginaire de l'équation (12) se réduisent à un coefficient constant et réel près, à la seule intégrale, où le dénominateur est le produit de deux facteurs imaginaires conjugués $1 + \sin^2\psi(\cos\theta + i\sin\theta)$, $1 + \sin^2\psi(\cos\theta - i\sin\theta)$:

$$\int \frac{m - n\sin\psi}{1 + 2b\cos\tau\sin^2\psi + b^2\sin^4\psi}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi\sin^2\psi}}$$

qui peut s'exprimer au moyen de deux intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre réel, l'un étant de la forme $-\cos^2\varphi\sin^2\rho$, l'autre de la forme $-1 + \frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\varphi}$.

La valeur de l'intégrale complète s'explicitera en fonction des intégrales complètes de première et de deuxième espèce et d'intégrales de première et de deuxième espèce : $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{E}}(\cos\varphi, \rho)$ et $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\cos\varphi}, \sigma\right)$, avec

$$\sin\rho = -h + \sqrt{1 + 2h\cos\tau + h^2},$$

$$\cos\sigma = 2h\cos^2\varphi\,\frac{\sin\tau}{\cos\rho},$$

$$h = \frac{b}{\cos^2\varphi(b^2 + 2\cos^2\varphi\, b\cos\tau + \cos^2\varphi)}.$$

Mais les expressions de b et de τ dont il faut partir et qui sont données en fonction de ω et de φ sont trop complexes pour permettre d'expliciter, sous forme générale tout au moins, les résultats précédents. D'autre part, la limite inférieure des intégrales fixée pour la détermination de la constante d'intégration par la condition, pour le profil, de passer par A, introduit des intégrales de troisième espèce non complètes. De sorte que ce ne sera encore que dans chaque cas particulier des valeurs ω et φ que b et τ, étant *numériquement* connus, l'on pourra calculer x_0.

13. Toutefois, je signale le cas remarquable par sa simplicité et son utilisation pratique, où le talus naturel est horizontal ($\omega = 0$) et l'angle de frottement intérieur égal à 30°, valeur très voisine de l'angle de terre coulante des sables le plus habituellement employés. Le coefficient A vaut alors l'unité, et l'angle θ_0 vaut lui-même 30°. Les facteurs $\mathrm{A}a - \mathrm{tang}\,\varphi$ et $\mathrm{A}^2 + a^2 - \mathrm{tang}^2\varphi - 1$ étant alors nuls, l'équation différentielle (12), où les intégrales elliptiques de troisième espèce, puisque P et Q y deviennent nuls, s'évanouissent alors, prend la forme

$$-\frac{dx}{x} = \frac{t\,dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\psi}}$$

et donne, intégrée entre les limites extrêmes du champ, c'est-à-dire entre le mur et le plan Lévy, soient l et x_0 pour x ; o et $\frac{1}{\sqrt{3}}$

pour t ; et $\frac{\pi}{2}$ et arc cos $\frac{1}{3}$ pour ψ :

$$[-\mathrm{L}x]_{x_0}^{l} = \frac{1}{2}[\mathrm{L}(1+t^2)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} + \frac{1}{2}\int_{\arccos\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\psi}},$$

d'où l'on tire aisément

$$x = 0.626l.$$

14. L'abscisse du point correspondant de la droite de glissement du *prisme* rectiligne de plus grande poussée, dont la poussée ferait, ainsi que d'ordinaire, l'angle φ avec la normale à la paroi, vaudrait $0.554\,l$; celle relative encore au prisme de Coulomb, mais avec son hypothèse de frottement nul contre le mur serait égale à $0,500\,l$. Ce serait aussi la valeur de l'abscisse x_0 dans l'approximation qui consisterait à prendre, pour un prisme homogène de poussée, comme ligne de rupture la parallèle menée par le pied du mur à la *droite* de glissement, dans la théorie nouvelle, du gros massif au delà du plan Lévy et vers la surface libre, qui, en général, n'est du reste pas parallèle à la droite de rupture de Coulomb. L'intérêt de cette solution approchée réside principalement dans le fait que la droite de glissement ainsi définie peut être obtenue (1) géométriquement de façon très simple.

(1) Éd. Callandreau, *Comptes rendus*, juin 1931.