BULLETIN DE LA S. M. F.

D. MENCHOFF

Sur les fonctions monogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 141-182
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__141_0>

SUR LES FONCTIONS MONOGÈNES;

PAR M. D. MENCHOFF.

1. Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe z, définie dans un domaine borné D. On dit que cette fonction est univalente, lorsqu'à deux valeurs différentes de l'argument z il correspond toujours deux valeurs différentes de la fonction $f(z)$. Supposons que la fonction $f(z)$ soit continue et univalente dans un domaine D. Alors cette fonction effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points du domaine D et d'un autre domaine Ω situé dans le plan de la variable $w=f(z)$.

Soient E et E′ deux ensembles de points situés respectivement dans les domaines D et Ω. Nous dirons que l'un de ces ensembles est l'image de l'autre, lorsque les points de ces deux ensembles se correspondent mutuellement. En particulier, nous dirons qu'une courbe de Jordan J′ située dans le domaine Ω, est l'image d'une autre courbe J, située dans le domaine D, lorsque les points de ces deux courbes se correspondent mutuellement.

La correspondance entre les points des domaines D et Ω étant toujours biunivoque et bicontinue, supposons qu'une courbe de Jordan fermée et simple, située d'une façon arbitraire dans le domaine D, soit parcourue dans le même sens que son image dans le domaine Ω. Nous dirons, dans ce cas, que la correspondance entre les pointes des domaines D et Ω est *directe*.

M. Harald Bohr a démontré le théorème suivant :

La correspondance entre les points z et $w=f(z)$ des deux domaines D *et* Ω *étant biunivoque et bicontinue, supposons qu'en chaque point z du domaine* D *la quantité*

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$$

possède, pour h tendant vers zéro, une limite bien déterminée, finie et différente de zéro.

Dans ces conditions $f(z)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur du domaine D, ou bien une fonction conjuguée à une fonction holomorphe.

D'ailleurs, la fonction $f(z)$ doit être nécessairement holomorphe, lorsque la correspondance entre les points des domaines D et Ω est directe.

Ce théorème n'est pas vrai, lorsque la fonction $f(z)$ n'est pas univalente [1]

La question se pose de savoir, si l'on peut remplacer la condition d'existence de la limite

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|$$

par une autre condition, moins restrictive. A cet effet, nous introduirons les notations suivantes. Soit t un rayon rectiligne issu d'un point z et situé dans le plan du domaine D. Nous désignerons par

$$\lim_{h \to 0} (t)\, \Lambda(z, h)$$

la limite de la quantité $\Lambda(z, h)$ lorsque h tend vers zéro de telle façon que le point $z+h$ reste toujours sur le rayon t. Nous dirons que la fonction $f(z)$ *possède la propriété* K″ *au point* z, lorsqu'on peut trouver trois rayons rectilignes $t_i (i = 1, 2, 3)$, issus du point z, situés sur trois droites différentes [2] et tels que les trois limites

$$\lim_{h \to 0} (t_i) \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

existent et possèdent la même valeur finie (non nécessairement différente de zéro).

Cette définition posée, nous démontrerons le théorème suivant :

La correspondance entre les points des domaines D *et* Ω *étant biunivoque, bicontinue et directe et la fonction $f(z)$ ayant la même signification que plus haut, supposons que la propriété* K″

---

(1) H. Bohr, *Ueber streckentreue und konforme Abbildung* (*Math. Zeitschrift*, t. 1, 1918, p. 403).

(2) On suppose toujours que les rayons t_i soient situés dans le plan du domaine D.

est remplie partout à l'intérieur du domaine D, *sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable.*

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ *est holomorphe à l'intérieur du domaine* D [1].

2. Pour démontrer le théorème énoncé à la fin du paragraphe précédent, nous aurons besoin de la notion de la différentielle totale au sens de Stoltz. Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe $z = x + iy$. Nous pouvons considérer cette fonction comme une fonction de deux variables réelles x et y. Nous dirons que la fonction $f(z)$ possède une différentielle totale au sens de Stoltz en un point donné $z = x + iy$, lorsque les dérivées partielles $\frac{\partial f(z)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(z)}{\partial y}$ existent en ce point et, de plus, vérifient la relation

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon(\Delta z) \Delta z,$$

où

$$\lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta z = \Delta x + i \Delta y,$$

les accroissements Δx et Δy étant réels.

Tout d'abord nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme. — *Supposons que la fonction* $w = f(z)$ *effectue une correspondance biunivoque, bicontinue et directe entre les points* z *et* w *des domaines* D *et* Ω. *Supposons, de plus, qu'en un point* z_0, *situé à l'intérieur du domaine* D, *la fonction* $f(z)$ *possède la propriété* K″ *et, en même temps, possède une différentielle totale au sens de Stoltz.*

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ *est monogène au point* z_0.

Démonstration. — Posons $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, où x, y, x_0 et y_0 sont des quantités réelles. Puisque la fonction $f(z)$ possède une différentielle totale de Stoltz au point z_0, les dérivées

---

[1] L'énoncé de ce théorème se trouve dans une Note : *Sur la représentation conforme des domaines plan* (D. Menchoff, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris*, t. 187, 17 septembre 1928, p. 502). Je conserve ici les notations de cette Note.

partielles $\frac{\partial f(z)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(z)}{\partial y}$ existent pour $x = x_0$, $y = y_0$ et, de plus, on a la relation

$$(1)\qquad f(z) - f(z_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varepsilon(z)(z - z_0),$$

où

$$A = \left[\frac{\partial f(z)}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \qquad B = \left[\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

et

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

En posant

$$(2)\qquad f(z_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) = f_1(z), \qquad \varepsilon(z)(z - z_0) = \varphi(z),$$

on peut écrire la relation (1) sous la forme

$$(3)\qquad f(z) = f_1(z) + \varphi(z).$$

On a, de plus,

$$(4)\qquad f_1(z_0) = f(z_0).$$

De la deuxième relation (2) il résulte immédiatement que la dérivée $\varphi'(z_0)$ existe et possède une valeur nulle. Donc la fonction $\varphi(z)$ est monogène au point z_0.

Puisque, par hypothèse, la condition K'' est remplie au point z_0, il existe trois rayons rectilignes t_i ($i = 1, 2, 3$) issus du point z_0, situés sur trois droites différentes et tels que les trois limites

$$\lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

existent et possèdent la même valeur finie. En comparant la relation (3) avec la relation $\varphi'(z_0) = 0$, nous obtenons

$$\lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \left| \frac{f_1(z_0 + \Delta z) - f_1(z_0)}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right|$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Donc les trois quantités

$$(5)\qquad \lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \left| \frac{f_1(z_0 + \Delta z) - f_1(z_0)}{\Delta z} \right| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

possèdent la même valeur finie.

Lorsque $A = B = 0$, nous avons de la première relation (2) :

$$f_1(z) = f(z_0) = \text{const.}$$

et, par suite, en vertu de (3), la fonction $f(z)$ est monogène au point z_0.

Supposons, à présent, que l'une au moins des quantités A ou B soit différente de zéro. Supposons, par exemple, que $B \neq 0$. Comme il est bien connu, si le rapport $\frac{A}{B}$ est imaginaire, la fonction $w_1 = f_1(z)$ effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points des deux plans z et w_1.

Nous considérerons tout d'abord le cas où le rapport $\frac{A}{B}$ est réel. Soit d une droite quelconque, passant par le point z_0 et située dans le plan de la variable z. La fonction $f_1(z)$ étant linéaire par rapport à $x - x_0$ et $y - y_0$, la quantité

$$\left| \frac{f_1(z'') - f_1(z')}{z'' - z'} \right|$$

possède la même valeur finie $R(d)$ pour tous les points z' et z'' situés sur la droite d. D'ailleurs, il est facile de voir que, si $\frac{A}{B}$ est réel, il existe une droite d_0 telle que $R(d_0) = 0$ et, en même temps, les deux quantités $R(d')$ et $R(d'')$ ne peuvent être égales que dans le cas où les droites d' et d'' font le même angle avec la droite d_0. Il en résulte que, dans le cas considéré, il n'existe pas trois rayons rectilignes t_i $(i = 1, 2, 3)$, issus du point z_0 et situés sur trois droites différentes, pour lesquels les trois quantités (5) possèdent la même valeur. Donc, dans notre cas, le rapport $\frac{A}{B}$ ne peut pas être réel et, par suite, la fonction $f_1(z) = w_1$ effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points des deux plans z et w_1.

Soit C un contour simple fermé décrit dans le plan z autour du point z_0 et soient Γ et Γ_1 les contours décrits respectivement par les points correspondants $w = f(z)$ et $w_1 = f_1(z)$. Si le contour C est suffisamment petit, il résulte de (3) et de la relation $\varphi'(z_0) = 0$ que les contours Γ et Γ_1 sont parcourus dans le même sens, lorsque z décrit le contour C. Puisque la fonction $w = f(z)$ effectue une correspondance directe entre les points des domaines D et Ω, la fonction $w_1 = f_1(z)$ doit effectuer aussi une correspondance directe entre les points des plans z et w_1.

Les trois quantités (5) étant égales et la fonction $f_1(z)$ étant linéaire en $x - x_0$ et $y - y_0$, le point w_1 décrit toujours une circonférence, lorsque le point correspondant z décrit une circonférence. Il en résulte que la transformation $w_1 = f_1(z)$ est une transformation de similitude et, par suite, la fonction $f_1(z)$ est une fonction linéaire de z. En tenant compte de (3) et de la relation $\varphi'(z_0) = 0$, on voit donc que la fonction $f(z)$ est monogène au point z_0. C. Q. F. D.

3. Supposons que la fonction $f(z)$ possède les mêmes propriétés que plus haut. Nous établirons une condition suffisante pour que la dérivée $f'(z)$ existe et soit sommable presque partout dans un ensemble mesurable. Tout d'abord, nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme. — *Soit $f(z)$ une fonction continue et univalente, définie dans un domaine* D. *Supposons que cette fonction possède une dérivée finie $f'(z)$ presque partout dans un ensemble mesurable* E *dont chaque point se trouve à l'intérieur du domaine* D (¹).

Alors le module de $f'(z)$ est une fonction à carré sommable, c'est-à-dire l'intégrale double $\int\int_E |f'(z)|^2\, dx\, dy$ possède une valeur finie.

Sans restreindre la généralité de la démonstration, on peut supposer que $f'(z) \neq 0$ presque partout dans E. Dans ce cas, on peut considérer ce lemme comme une conséquence du lemme III du paragraphe 7 de mon Ouvrage publié aux *Math. Annal.* (t. 95, fasc. 5, 1926, p. 665); il suffit de remplacer la condition de conservation des angles par la condition plus restrictive d'existence de la déri-

(¹) Nous désignerons, dans la suite, par Mes E la mesure superficielle de l'ensemble E. De même, nous dirons qu'une propriété quelconque est remplie *presque partout* dans E, lorsque cette propriété est remplie en chaque point de E, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure superficielle nulle.

vée finie $f'(z)$ différente de zéro et de prendre la quantité $|f'(z)|$ au lieu de la quantité

$$\limsup_{\Delta z \to 0} \left| \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \right|.$$

Dans le lemme cité j'ai supposé que l'ensemble E coïncide avec l'intérieur d'un domaine, mais cette restriction n'est pas essentielle; la démonstration reste la même si l'on remplace un domaine par un ensemble mesurable E quelconque.

Nous donnerons ici la démonstration directe de ce lemme.

Supposons, comme précédemment, que $f'(z) \neq 0$ pour tous les points z de l'ensemble E. Soit E_n l'ensemble de points z appartenant à l'ensemble E et vérifiant la condition

$$(1) \qquad n-1 < |f'(z)| \leqq n,$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nous avons, d'après la condition du lemme,

$$(2) \qquad \operatorname{Mes} E = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Mes} E_n.$$

Pour démontrer que l'intégrale

$$\int\int_E |f'(z)|^2 \, dx \, dy$$

possède une valeur finie, il suffit de démontrer que la série

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{Mes} E_n$$

est convergente.

Soit N un nombre entier et positif quelconque. Pour chaque valeur de n, vérifiant les conditions

$$(4) \qquad n \leqq N, \qquad \operatorname{Mes} E_n > 0,$$

nous prendrons un ensemble parfait quelconque P_n, appartenant à l'ensemble E_n et possédant une mesure positive. En supposant que les ensembles P_n soient fixes, déterminons, pour chaque valeur de n vérifiant les conditions (4), un domaine D_n qui possède les propriétés suivantes :

1° L'ensemble P_n est à l'intérieur du domaine D_n.

2° Lorsque $n \neq n'$, les domaines D_n et $D_{n'}$ n'ont pas de points communs.

3° Les domaines D_n sont à l'intérieur du domaine D (¹).

En général, les domaines D_n ne sont pas connexes.

En vertu de l'inégalité (1), on peut déterminer pour chaque point z de l'ensemble P_n un cercle $C(z)$ de centre z qui se trouve à l'intérieur du domaine D_n et pour lequel subsiste l'inégalité

$$(5) \qquad n - 1 < \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right|,$$

quel que soit z' dans le cercle $C(z)$. Il est clair que chaque cercle $C'(z)$, concentrique à $C(z)$ et de rayon inférieur à celui de $C(z)$ possède les mêmes propriétés.

Nous voyons donc que chaque point z de l'ensemble P_n est le centre d'une infinité de cercles $C'(z)$ dont les rayons peuvent être pris aussi petits que l'on veut. Alors, en vertu d'un théorème connu de M. Vitali, on peut choisir parmi les cercles $C'(z)$ une suite dénombrable de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$, deux à deux extérieurs et tels que les points de l'ensemble P_n qui n'appartiennent pas à ces cercles constituent un ensemble de mesure nulle. On peut donc déterminer un nombre entier et positif p_n tel que

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{p_n} \text{aires de } C_i > \frac{1}{2} \operatorname{Mes} P_n.$$

Soient respectivement z_i et r_i le centre et le rayon du cercle C_i. Puisque les cercles C_i ont été choisis parmi les cercles $C'(z)$, il résulte que tous les cercles C_i se trouvent à l'intérieur du domaine D_n. De plus, en vertu de (5), nous aurons l'inégalité

$$(7) \qquad n - 1 < \left| \frac{f(z') - f(z_i)}{z' - z_i} \right|,$$

pour tous les points z' du cercle C_i.

(¹) Lorsque $\operatorname{Mes} E_n = 0$, nous supposerons que l'ensemble P_n et le domaine D_n sont vides.

Désignons respectivement par Ω_n et ω_i les images dans le plan w du domaine D_n et du cercle C_i. De même, désignons par w_i l'image du point z_i. Prenons dans le plan w le cercle Γ_i ([1]) de centre w_i et de rayon $(n-1)r_i$. Il résulte de l'inégalité (7) que le cercle Γ_i se trouve à l'intérieur du domaine ω_i et, par suite,

$$(8)\qquad \text{l'aire de } \omega_i > \pi r_i^2 (n-1)^2 = (n-1)^2 \text{ l'aire de } C_i \quad ([2]).$$

Puisque les cercles C_i sont deux à deux extérieurs et se trouvent à l'intérieur du domaine D_n, il résulte que les domaines ω_i sont deux à deux extérieurs et se trouvent à l'intérieur du domaine Ω_n. Par suite,

$$(9)\qquad \text{l'aire de } \Omega_n > \sum_{i=1}^{p_n} \text{aires de } \omega_i.$$

En comparant les inégalités (9), (8) et (6), on obtient

$$(10)\qquad \text{l'aire de } \Omega > \frac{1}{2}(n-1)^2 \operatorname{Mes} P_n.$$

En vertu de 2° et 3°, les domaines D_n n'ont pas de points communs et se trouvent à l'intérieur du domaine D. Donc les domaines Ω_n n'ont pas aussi de points communs et se trouvent à l'intérieur du domaine Ω. Il en résulte

$$\text{l'aire de } \Omega_n \geqq \sum_{n=1}^{N} \text{aires de } \Omega_n$$

et, par suite, en vertu de (10),

$$(11)\qquad \text{l'aire de } \Omega > \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(n-1)^2 \operatorname{Mes} P_n \quad ([3]).$$

Pour chaque valeur de n la mesure de l'ensemble parfait P_n peut être prise aussi voisine que l'on veut de la mesure de l'en-

---

([1]) Lorsque $n=1$, on remplace le cercle Γ_i par le point w_1.

([2]) Nous conviendrons d'appeler *l'aire* d'un domaine ouvert la mesure de l'ensemble de ses points intérieurs.

([3]) L'inégalité (10) n'est valable que pour les valeurs de n vérifiant les conditions (4); lorsque $\operatorname{Mes} E_n = 0$, on remplace dans l'inégalité (11) la quantité $\operatorname{Mes} P_n$ par zéro.

semble E_n. On obtient donc de l'inégalité (11)

$$(12) \qquad \text{l'aire de } \Omega \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (n-1)^2 \operatorname{Mes} E_n.$$

Puisque le domaine Ω est borné et que le nombre N peut être pris aussi grand que l'on veut, il résulte de l'inégalité (12) que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 \operatorname{Mes} E_n,$$

converge. Donc la série (3) est aussi convergente, et, par suite, la fonction $|f'(z)|$ est à carré sommable dans l'ensemble E.

C. Q. F. D.

4. Dans la démonstration du théorème énoncé à la fin du paragraphe 1, nous nous servirons de la remarque suivante. En supposant que les conditions du théorème soient remplies, désignons par Γ un cercle quelconque situé à l'intérieur du domaine D. Soit Q l'ensemble de points, contenus dans Γ, au voisinage desquels la fonction $f(z)$ n'est pas partout holomorphe. L'ensemble Q est évidemment un ensemble fermé qui ne contient de points isolés que sur la circonférence du cercle Γ. Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que l'ensemble Q ne contient pas de points intérieurs au cercle Γ quelle que soit la position de ce cercle à l'intérieur du domaine D.

Nous introduirons tout d'abord les définitions suivantes : soit ω un domaine ouvert contenant intérieurement les points d'un ensemble parfait P. Désignons par H l'ensemble de points de P, intérieurs à ω, augmenté de leurs points limites sur la frontière de ω. On dit, dans ce cas, que l'ensemble H est une *portion* de l'ensemble P définie par le domaine ω. Nous dirons ensuite qu'un ensemble H, appartenant à un ensemble parfait P, est *partout de deuxième catégorie sur* P lorsque cet ensemble n'est pas de première catégorie sur aucune des portions de l'ensemble P [1].

Soit $B(z, \Delta z)$ une fonction réelle de deux variables complexes

[1] On dit qu'un ensemble E est de première catégorie sur un ensemble parfait P lorsque E peut être représenté comme une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P.

z, Δz et soit t un rayon rectiligne issu d'un point z et situé dans le plan du domaine D. Désignons par

$$\limsup_{\Delta z \to 0}(t)\, B(z, \Delta z),$$

la plus grande des limites de la quantité $B(z, \Delta z)$ lorsque Δz tend vers zéro de telle façon que le point $z + \Delta z$ reste toujours sur le rayon t. Posons

$$\limsup_{\Delta z \to 0}(t) \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| = L(z, t);$$

$L(z, t)$ est un nombre non négatif, fini ou non.

Nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Soit $f(z)$ une fonction continue* (non nécessairement univalente) *définie dans un domaine* D *et soit* P *un ensemble parfait situé dans* D *et contenant des points intérieurs à ce domaine* (¹). *Désignons par ν un nombre entier et positif qui ne dépend pas de z et supposons qu'il existe un ensemble* H, *appartenant à l'ensemble* P *et partout de deuxième catégorie sur* P, *dont chaque point z est l'extrémité de ν rayons rectilignes $t_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$, qui sont situés sur ν droites différentes et, de plus, vérifient les conditions*

$$(1) \qquad L[z, t_i(z)] < +\infty \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Alors il existe une portion Π *de l'ensemble* P, *située à l'intérieur du domaine* D, *et un nombre positif σ tels que chaque point z de l'ensemble* Π *est l'extrémité de ν rayons rectilignes $\tau_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ qui possèdent les propriétés suivantes :*

1° $$\left[\tau_i(z') \widehat{,} \tau_i(z'')\right] < \sigma \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu) \quad (^2),$$

quels que soient les points z' et z'' de l'ensemble Π.

2° $$800\sigma < \left[\tau_i(z) \widehat{,} \tau_j(z)\right] < \pi - 800\sigma,$$

$i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ *pour tous les points z de* Π.

(¹) On dit qu'un ensemble P est situé dans un domaine D lorsque tous les points de P se trouvent à l'intérieur ou sur la frontière de D.

(²) Nous désignerons par $[t' \widehat{,} t'']$ la valeur comprise entre zéro et π de l'angle qui est formé par les rayons t' et t''.

3° *La distance de l'ensemble* **H** *à la frontière du domaine* **D** *est supérieure à* σ.

4°
$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|<\frac{1}{\sigma},$$

pour tous les points z *de* **H** *et pour tous les points* ζ *situés sur les rayons correspondants* $\tau_i(z)$, $i=1, 2, 3, \ldots, \nu$ *et vérifiant l'inégalité* $0<|\zeta-z|\leq\sigma$.

Démonstration. — Soit Δ un rayon rectiligne fixe situé dans le plan du domaine D. Désignons par $\{\widehat{\Delta, t_i(z)}\}$ la valeur de l'angle, comptée dans le sens positif de Δ à $t_i(z)$ et comprise entre zéro et 2π [1]. Soient $p, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\nu$ des nombres entiers et positifs quelconques. Désignons par $G(p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$ un ensemble de points z qui appartiennent à l'ensemble H et, de plus, possèdent les propriétés suivantes :

$$(a)\qquad \left|\{\widehat{\Delta, t_i(z)}\}-\frac{n_i}{800p}\right|<\frac{1}{800p}\qquad (i=1, 2, 3, \ldots, \nu);$$

$$(b)\qquad \frac{8}{p}<\left[\widehat{t_i(z), t_j(z)}\right]<\pi-\frac{8}{p}\qquad (i\neq j,\ i, j=1, 2, 3, \ldots, \nu);$$

$$(c)\qquad \left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|<p,$$

pour tous les points ζ du domaine D qui sont situés sur les rayons $t_i(z)$, $i=1, 2, 3, \ldots, \nu$ et vérifient l'inégalité $0<|\zeta-z|\leq\frac{1}{200p}$ [2].

Il résulte de la définition de l'ensemble H que

$$(2)\qquad \Sigma G(p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu)=H,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières et positives de $p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu$. L'ensemble H étant partout de deuxième catégorie sur P, on voit de la relation (2) qu'il existe une portion II de l'ensemble P et des valeurs déterminées des nombres p, n_1, $n_2, \ldots, n_\nu$ telles que l'ensemble correspondant $G(p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$ est partout dense sur II. On peut d'ailleurs supposer que l'en-

---

[1] Lorsque les directions Δ et $t_i(z)$ coïncident, nous prendrons $\{\widehat{\Delta, t_i(z)}\}=0$.

[2] L'ensemble $G(p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$ est vide lorsque les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont suffisamment grands.

semble H est à l'intérieur du domaine D et que la distance de l'ensemble H à la frontière de D est supérieure à $\frac{1}{200p}$.

En posant pour ces valeurs des nombres $p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu$,

$$(3) \qquad \frac{1}{200p} = \tau, \qquad G(p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu) = G,$$

nous voyons que l'ensemble G est partout dense sur H. Pour les points z de l'ensemble H, nous définirons les rayons $\tau_i(z)$ de la manière suivante. Posons $\tau_i(z) = t_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ aux points z de l'ensemble (H, G) [1], et, pour les points z de l'ensemble H — G, soit $\tau_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ une des positions limites du rayon $t_i(z')$, lorsque z' tend vers z en restant toujours sur l'ensemble G.

Nous allons démontrer que l'ensemble H et les rayons $\tau_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ possèdent les propriétés 1°, 2°, 3° et 4° qui figurent dans l'énoncé du lemme.

Tout d'abord il résulte de l'inégalité (a),

$$\left[\tau_i(z'), \widehat{\ } \tau_i(z'')\right] \leqq \frac{1}{400p} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

pour tous les points z' et z'' de l'ensemble H, le nombre p étant le même que dans les relations (3). De même, on obtient de l'inégalité (b),

$$\frac{8}{p} \leqq \left[\tau_i(z), \widehat{\ } \tau_j(z)\right] \leqq \pi - \frac{8}{p},$$

$i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ pour tous les points z de H. En comparant les deux dernières inégalités avec la première relation (3), on obtient immédiatement les propriétés 1° et 2° des rayons $\tau_i(z)$. Puisque la distance de l'ensemble H à la frontière du domaine D est supérieure à $\frac{1}{200p}$, on obtient de même la propriété 3°.

Passons à la propriété 4°. Soit δ un nombre positif fixe quelconque, inférieur ou égal à $\frac{1}{200p}$,

$$(4) \qquad 0 < \delta \leqq \frac{1}{200p},$$

et soit z un point quelconque de l'ensemble H.

---

[1] Nous désignons par (H, G) la partie commune des ensembles H et G.

Désignons par ζ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ un point situé sur le rayon $\tau_i(z)$ et tel que

$$(5) \qquad |\zeta_i - z| = \delta.$$

En supposant que z' est un point arbitraire de l'ensemble G, désignons par ζ'_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ le point situé sur le rayon $t_i(z')$ et tel que

$$(6) \qquad |\zeta'_i - z'| = \delta.$$

On a, en vertu de (4) et (6),

$$|\zeta'_i - z'| \leq \frac{1}{200p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

d'où il résulte, en vertu de (c),

$$(7) \qquad \left|\frac{f(\zeta'_i) - f(z')}{\zeta'_i - z'}\right| < p \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Le rayon $\tau_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ est une des positions limites du rayon $t_i(z')$ pour z' tendant vers z. Il résulte donc des inégalités (5) et (6) que le point ζ'_i tend vers ζ_i lorsque z' tend vers z et, par suite, en vertu de (7) et de la première relation (3),

$$(8) \qquad \left|\frac{f(\zeta_i) - f(z)}{\zeta_i - z}\right| < \frac{1}{\sigma} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Puisque δ est un nombre arbitraire, inférieur ou égal à $\frac{1}{200p} = \sigma$, il résulte de la définition des points ζ_i, que les rayons $\tau_i(z)$ possèdent la propriété 4°, ce qui achève la démonstration du lemme.

5. Les domaines D, Ω et la fonction $f(z)$ ayant la même signification que plus haut, nous dirons qu'un segment rectiligne $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D, possède la propriété N, lorsqu'à tout ensemble parfait, situé sur ce segment et possédant une mesure linéaire nulle, il correspond dans le domaine Ω une image de longueur nulle (1).

(1) On définit, avec M. Painlevé, la longueur d'un ensemble parfait partout discontinu de la manière suivante :

On commence par enfermer tous les points de l'ensemble dans des contours fermés, en nombre fini, deux à deux extérieurs. La longueur de l'ensemble sera alors la plus petite des limites de la somme des longueurs de ces contours lorsque leurs dimensions tendent simultanément vers zéro.

Nous allons considérer dans quelles conditions les segments rectilignes, situés à l'intérieur du domaine D, possèdent la propriété N. Nous démontrerons deux lemmes dont le premier a un caractère auxiliaire par rapport au second.

LEMME I. — *Soit ϖ un ensemble fermé situé sur une droite d et possédant une mesure linéaire nulle,*

$$\text{Mes lin}\,\varpi = 0 \quad (1)\text{ [1]}.$$

Supposons qu'il existe ν triangles $A_iB_iC_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ qui sont situés dans un plan passant par la droite d et, de plus, possèdent les propriétés suivantes :

1°
$$\overline{A_iB_i} = \overline{A_iC_i} = \delta \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

où δ ne dépend pas de i.

2° *Chacun des triangles $A_iB_iC_i$ possède un seul point commun A_i avec la droite d.*

3° *Les points A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ appartiennent à l'ensemble ϖ.*

4° *Lorsque $j \neq i$, les segments $\overline{A_jB_j}$ et $\overline{A_jC_j}$ n'ont de points communs avec aucun des segments $\overline{A_iB_i}$ et $\overline{A_iC_i}$.*

Dans ces conditions, on a l'inégalité

$$\nu < \frac{\varepsilon(\delta)}{\delta \sin\lambda}, \quad (2)$$

où $\varepsilon(\delta)$ est une fonction de l'argument positif δ qui tend vers zéro avec δ,

$$\lim_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0, \quad (3)$$

et λ est un nombre positif qui ne dépend pas de i, et, de plus, vérifie les inégalités

$$\pi - \lambda > \left[\overline{A_iB_i}, \overline{A_iC_i}\right]^{\wedge} > \lambda \text{ [2]} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu). \quad (4)$$

---

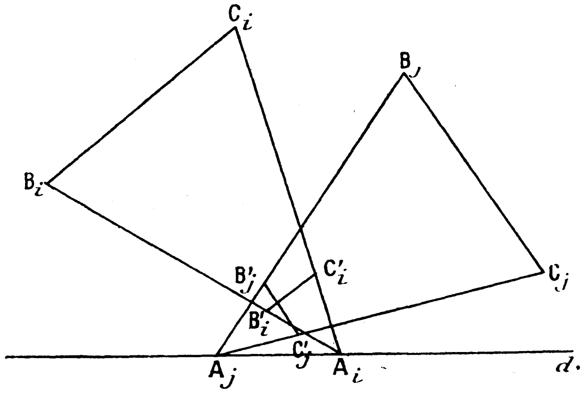
[1] Nous supposons que l'ensemble ϖ est situé sur un segment fini de la droite d.

[2] La fonction $\varepsilon(\delta)$ dépend en général de l'ensemble ϖ, mais ne dépend pas de λ.

Démonstration. — Désignons respectivement par B'_i et C'_i les points situés sur les segments $\overline{A_iB_i}$, $\overline{A_iC_i}$ et tels que

$$\overline{A_iB'_i} = \overline{A_iC'_i} = \frac{\delta}{4}.$$

Fig. 1.



Nous allons démontrer que, pour $i \neq j$, les triangles $A_iB'_iC'_i$ et $A_jB'_jC'_j$ n'ont pas de points communs intérieurs.

En effet, en vertu des conditions 2° et 4°, le point A_i est extérieur au triangle $A_jB_jC_j$ et le point A_j est extérieur au triangle $A_iB_iC_i$. De plus, en vertu de 4°, les segments $\overline{A_jB'_j}$ et $\overline{A_jC'_j}$ n'ont de points communs avec aucun des segments $\overline{A_iB'_i}$ et $\overline{A_iC'_i}$.

Donc, si les deux triangles $A_iB'_iC'_i$ et $A_jB'_jC'_j$ avaient des points communs intérieurs, un des points B'_i ou C'_i serait à l'intérieur du triangle $A_jB'_jC'_j$, ou bien un des points B'_j ou C'_j serait à l'intérieur du triangle $A_iB'_iC'_i$. Les raisonnements étant les mêmes dans tous les cas, supposons, pour fixer les idées, que le point B'_i soit à l'intérieur du triangle $A_jB'_jC'_j$.

Puisque le segment $\overline{A_iB'_i}$ n'a pas de points communs avec les segments $\overline{A_jB'_j}$ et $\overline{A_jC'_j}$ et que le point A_i est extérieur au triangle $A_jB'_jC'_j$, le segment $\overline{A_iB'_i}$ possède nécessairement un point commun avec le segment $\overline{B'_jC'_j}$. Par suite, le segment $\overline{B'_iB_i}$ n'a pas de points communs avec le segment $\overline{B_jC'_j}$.

Il résulte de (5) que la distance entre deux points quelconques du triangle $A_jB'_jC'_j$ est toujours inférieure à $\frac{\delta}{2}$. D'autre part, on obtient de 1° et (5),

$$\overline{B'_iB_i} = \frac{3}{4}\delta.$$

Le point B'_i étant à l'intérieur du triangle $A_jB'_jC'_j$, on voit donc que le point B_i est extérieur à ce triangle. Mais le segment $\overline{B'_iB_i}$ n'a pas de points communs avec le segment $\overline{B'_jC'_j}$; donc, le segment $\overline{B'_iB_i}$ possède un point commun avec un des segments $\overline{A_jB'_j}$ ou $\overline{A_jC'_j}$, ce qui est impossible, puisque, en vertu de 4°, le segment $\overline{A_iB_i}$ n'a pas de points communs avec les segments $\overline{A_jB'_j}$ et $\overline{A_jC'_j}$. Il en résulte que, pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ les triangles $A_iB'_iC'_i$ et $A_jB'_jC'_j$ n'ont pas de points communs intérieurs.

Désignons par $e(\delta)$ l'ensemble de points sur la droite d qui se trouvent à la distance inférieure ou égale à 2δ de l'ensemble ϖ. Puisque l'ensemble ϖ est un ensemble fermé de mesure linéaire nulle, on a

$$(6) \qquad \lim_{\delta \to 0} \text{Mes lin}\, e(\delta) = 0.$$

Il est clair que l'ensemble $e(\delta)$ consiste en tous les points appartenant à un nombre fini de segments $\overline{E_sF_s}$, $s = 1, 2, 3, \ldots, p$, deux à deux extérieurs, et, par suite,

$$(7) \qquad \text{Mes lin}\, e(\delta) = \sum_{s=1}^{p} \overline{E_sF_s}.$$

De plus, chaque point de l'ensemble ϖ est à l'intérieur de l'un des segments $\overline{E_sF_s}$ et se trouve à la distance supérieure ou égale à 2δ des extrémités de ce segment.

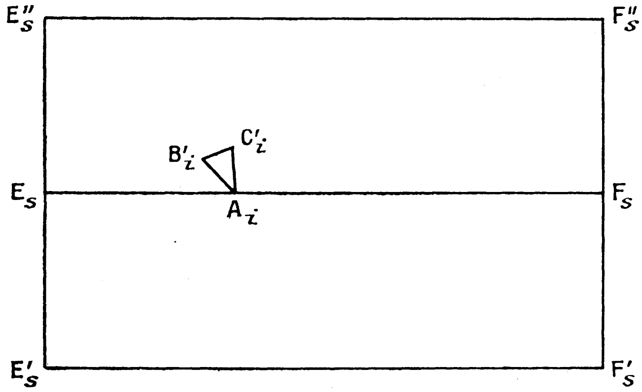
Soit $E'_sF'_sF''_sE''_s$ un rectangle qui possède les propriétés suivantes :

a. Les segments $\overline{E'_sE''_s}$ et $\overline{F'_sF''_s}$ sont perpendiculaires au segment $\overline{E_sF_s}$ et la longueur de chacun de ces segments est égale à 4δ,

$$\overline{E'_sE''_s} = \overline{F'_sF''_s} = 4\delta;$$

b. Les points E_s et F_s se trouvent respectivement sur les segments $\overline{E'_s E''_s}$ et $\overline{F'_s F''_s}$ à la distance égale des extrémités de ces segments.

Fig. 2.



Il en résulte que

$$\overline{E'_s E_s} = \overline{E_s E''_s} = \overline{F'_s F_s} = \overline{F_s F''_s} = 2\delta \tag{8}$$

et

$$\text{l'aire de } E'_s F'_s F''_s E''_s = 4\delta\, \overline{E_s F_s}. \tag{9}$$

De plus, chaque point de l'ensemble ϖ est à l'intérieur de l'un des rectangles $E'_s F'_s F''_s E''_s$ et se trouve à la distance supérieure ou égale à 2δ du contour de ce rectangle.

Puisque les points A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ appartiennent à l'ensemble ϖ, il résulte de (5) que chaque triangle $A_i B'_i C'_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ se trouve à l'intérieur de l'un des rectangles $E'_s F'_s F''_s E''_s$. Nous avons déjà vu que les triangles $A_i B'_i C'_i$ n'ont pas de points communs intérieurs. Puisque les segments $\overline{E_s F_s}$ et, par suite, les rectangles $E'_s F'_s F''_s E''_s$ sont deux à deux extérieurs, il résulte donc

$$\sum_{i=1}^{\nu} \text{aires de } A_i B'_i C'_i < \sum_{s=1}^{p} \text{aires de } E'_s F'_s F''_s E''_s. \tag{10}$$

Il résulte de (4) et (5) que

$$\text{l'aire de } A_i B'_i C'_i = \frac{1}{2}\, \overline{A_i B'_i}\; \overline{A_i C'_i} \sin\left[\widehat{\overline{A_i B_i}, \overline{A_i C_i}}\right] > \frac{1}{32}\, \delta^2 \sin\lambda.$$

En comparant cette dernière inégalité avec les relations (9), (7), et avec l'inégalité (10), on obtient

$$\frac{1}{32}\nu\delta^2 \sin\lambda < 4\delta \text{ Mes lin}\,e(\delta),$$

et, par suite,

$$\nu < \frac{\varepsilon(\delta)}{\delta \sin\lambda},$$

où

$$\varepsilon(\delta) = 128 \text{ Mes lin}\,e(\delta).$$

Il résulte de (6) que

$$\lim_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous démontrerons maintenant un second lemme qui joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème énoncé à la fin du paragraphe 1.

Tout d'abord, nous dirons que les deux rayons rectilignes τ_1 et τ_2 *sont dirigés du même côté d'un segment* $\overline{z'z''}$ situé dans le plan des rayons τ_1 et τ_2 lorsque les deux rayons rectilignes, issus d'un point quelconque sur le segment $\overline{z'z''}$ et possédant les mêmes directions que les rayons τ_1 et τ_2, sont situés du même côté du segment $\overline{z'z''}$. L'énoncé du lemme est le suivant :

Lemme 2. — *Supposons que la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point du domaine* D, *sauf peut-être aux points d'un ensemble parfait* P *qui contient des points intérieurs à* D. *Supposons, de plus, qu'il existe un ensemble* H *appartenant à* P *et partout de deuxième catégorie sur* P, *dont chaque point z est l'extrémité de ν rayons rectilignes $t_i(z)$, $1 \leqq i \leqq \nu, \nu > 1$, situés sur ν droites différentes et tels que*

$$\limsup_{h \to 0}[t_i(z)] \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right| < +\infty \qquad (1 \leqq i \leqq \nu).$$

Dans ces conditions, on peut déterminer un domaine D', *intérieur à* D *et contenant à son intérieur les points de* P, *un nombre positif σ et ν rayons rectilignes fixes Δ_i, $1 \leqq i \leqq \nu$, qui sont situés dans le plan du domaine* D *et possèdent les propriétés suivantes :*

a. Les rayons Δ_i, $1 \leqq i \leqq \nu$ ont une extrémité commune et *vérifient les inégalités*

$$800\sigma < \left[\widehat{\Delta_i, \Delta_j}\right] < \pi - 800\sigma \qquad (i \neq j,\ 1 \leq i \leq \nu,\ 1 \leq j \leq \nu).$$

b. Si les deux rayons $\Delta_{i'}$ et $\Delta_{i''}$, choisis parmi les rayons Δ_i, $1 \leq i \leq \nu$, sont dirigés du même côté d'un segment quelconque $\overline{z'z''}$, situé à l'intérieur du domaine D', *et si*

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma < \left[\widehat{\Delta_{i'}, \overline{z'z''}}\right] < \pi - \sigma, \\ \sigma < \left[\widehat{\Delta_{i''}, \overline{z'z''}}\right] < \pi - \sigma, \end{cases}$$

le segment $\overline{z'z''}$ possède la propriété N.

Démonstration. — En tenant compte du lemme du paragraphe 4, on voit, d'après les conditions du présent lemme, qu'il existe une portion Π de l'ensemble P, située à l'intérieur du domaine D, et un nombre positif σ, tels que chaque point z de l'ensemble Π est l'extrémité de ν rayons rectilignes $\tau_i(z)$, $1 \leq i \leq \nu$, qui possèdent les propriétés 1°, 2°, 3° et 4° indiquées dans l'énoncé du lemme du paragraphe 4. Soit D' un domaine, intérieur au domaine D, qui contient à son intérieur les points de l'ensemble Π, mais ne contient pas d'autres points de l'ensemble P. Il est clair qu'on peut toujours déterminer un tel domaine.

En supposant que z_0 est un point quelconque de l'ensemble Π, posons $\Delta_i = \tau_i(z_0)$, $1 \leq i \leq \nu$. Les rayons Δ_i possèdent une extrémité commune et sont bien déterminés, lorsque le point z_0 occupe une position fixe.

En tenant compte de la propriété 2° des rayons $\tau_i(z)$ (énoncé du lemme du paragraphe 4), on voit immédiatement que les rayons Δ_i possèdent la propriété *a.* indiquée dans l'énoncé de ce lemme.

Il faut maintenant établir la propriété *b.* Soit $\overline{z'z''}$ un segment quelconque, intérieur au domaine D', qui vérifie toutes les conditions indiquées dans l'énoncé de la propriété *b.*, où nous posons, pour fixer les idées, $i' = 1$, $i'' = 2$. Donc, les deux rayons Δ_1 et Δ_2 sont dirigés du même côté du segment $\overline{z'z''}$, et, de plus, on a les inégalités

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma < \left[\widehat{\Delta_1, \overline{z'z''}}\right] < \pi - \sigma, \\ \sigma < \left[\widehat{\Delta_2, \overline{z'z''}}\right] < \pi - \sigma. \end{cases}$$

Notre but est de démontrer que le segment $\overline{z'z''}$ possède la propriété N.

Soit ϖ un ensemble parfait quelconque, situé sur le segment $\overline{z'z''}$ et possédant une mesure linéaire nulle.

$$(3) \qquad \text{Mes lin}\,\varpi = 0.$$

Désignons par q l'image dans le domaine Ω de l'ensemble ϖ. L'ensemble q est évidemment partout discontinu. Nous allons démontrer que

$$(4) \qquad \text{longueur de } q = 0.$$

Supposons tout d'abord que l'ensemble ϖ est une partie de l'ensemble H et supposons que

$$(5) \qquad \text{longueur de } q > g > 0.$$

Soit R un carré, situé dans le plan du domaine Ω, qui contient tous les points de l'ensemble q et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Soit a la longueur de chaque côté de ce carré et soit n un nombre entier et positif quelconque. Partageons le carré R en $4n^2$ carrés égaux de côtés $\frac{a}{2n}\cdot$ A cet effet, divisons chaque côté de R en $2n$ parties égales et menons par les points de subdivision les droites parallèles aux côtés de ce carré. En numérotant les droites ainsi obtenues de gauche à droite et de haut en bas, désignons par $R_{i,j}^{n}$ le carré compris entre $(i-1)^{\text{ième}}$ et $i^{\text{ième}}$ droites verticales et entre $(j-1)^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ droites horizontales (¹). Le carré R sera alors partagé en $4n^2$ carrés $R_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq 2n$, $1 \leq j \leq 2n$ de côtés $\frac{a}{2n}\cdot$

Désignons par $p^{(n)}$ le nombre de carrés $R_{i,j}^{n}$ qui contiennent à son intérieur ou sur son contour les points de l'ensemble q. La somme des périmètres de tous ces carrés est égale à $\frac{2a\,p^{(n)}}{n}\cdot$ Il résulte donc de (5) et de la définition de la longueur d'un ensemble, que

$$(6) \qquad \frac{2ap^{(n)}}{n} > g,$$

(¹) Nous supposons que l'un des axes de coordonnées soit horizontal et l'autre vertical.

pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre N, convenablement choisi. Nous pouvons d'ailleurs supposer que $\frac{a}{4N} < 1$, de sorte que

$$\frac{a}{4n} < 1, \tag{7}$$

pour $n > N$.

Désignons par $p_{s,t}^{(n)}$, $(s = 1, 2)$, $(t = 1, 2)$, le nombre de carrés $R_{i,j}^{(n)}$ qui contiennent à son intérieur ou sur son contour les points de l'ensemble q et pour lesquels les indices i et j sont de la forme

$$i \equiv s \pmod 2, \qquad j \equiv t \pmod 2). \tag{8}$$

On a évidemment

$$p^{(n)} = \sum_{s=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} p_{s,t}^{(n)}. \tag{9}$$

En comparant (6) et (9), on voit que, pour chaque valeur de $n > N$, il existe au moins une paire d'indices s et t tels que

$$p_{s,t}^{(n)} > \frac{n}{8a} g. \tag{10}$$

Les indices s et t qui figurent dans cette inégalité dépendent en général de n.

Numérotons dans l'ordre quelconque tous les carrés $R_{i,j}^{(n)}$ qui contiennent à son intérieur ou sur son contour les points de l'ensemble q et pour lesquels subsistent les relations (8), les indices s et t étant les mêmes que dans l'inégalité (10). Désignons ces carrés par $Q_l^{(n)}$, $1 \leqq l \leqq p_{s,t}^{(n)}$, et soit $w_l^{(n)}$ un point du carré $Q_l^{(n)}$ qui appartient à l'ensemble q. Désignons par $\Gamma_l^{(n)}$ le cercle de centre $w_l^{(n)}$ et de rayon $\frac{a}{4n}$. Il résulte de la définition des carrés $Q_l^{(n)}$ que

$$\overline{w_l^{(n)} w_{l'}^{(n)}} \geqq \frac{a}{2n}, \tag{11}$$

où $l \neq l'$, $1 \leqq l \leqq p_{s,t}^{(n)}$, $1 \leqq l' \leqq p_{s,t}^{(n)}$. Donc les cercles $\Gamma_l^{(n)}$ n'ont pas de points communs intérieurs.

Désignons par $z_l^{(n)}$ le point de l'ensemble ϖ dont l'image est $w_l^{(n)}$, c'est-à-dire choisissons le point $z_l^{(n)}$ de telle façon que $f(z_l^{(n)}) = w_l^{(n)}$. Tous les points $z_l^{(n)}$, $1 \leqq l \leqq p_{s,t}^{(n)}$, appartiennent donc à l'ensemble Π

et se trouvent sur le segment $\overline{z'z''}$, puisque l'ensemble ϖ est situé sur le segment $\overline{z'z''}$ et appartient à l'ensemble II.

Considérons les rayons $\tau_i(z)$ et le nombre σ, définis plus haut, et posons

$$\tau_{li}^{(n)} = \tau_i(z_l^{(n)}),$$

$1 \leq l \leq p_{s,t}^{(n)}$, $1 \leq i \leq \nu$. Désignons par $z_{li}^{(n)}$ les points situés respectivement sur les rayons $\tau_{li}^{(n)}$ et tels que

$$(12) \qquad \overline{z_l^{(n)} z_{li}^{(n)}} = \frac{\sigma a}{4n}.$$

On voit, d'après l'inégalité (7), que $\frac{\sigma a}{4n} < \sigma$, lorsque $n > \mathrm{N}$. On obtient donc de l'inégalité (12)

$$(13) \qquad \overline{z_l^{(n)} z_{li}^{(n)}} < \sigma \qquad (n > \mathrm{N}).$$

D'après la propriété 3° de l'ensemble II, indiquée dans l'énoncé du lemme du paragraphe 4, la distance de l'ensemble II à la frontière du domaine D est supérieure à σ. Il résulte donc de (13) que les points $z_{li}^{(n)}$, $1 \leq l \leq p_{s,t}^{(n)}$, $1 \leq i \leq \nu$, $n > \mathrm{N}$, se trouvent à l'intérieur du domaine D.

Posons $f(z_{li}^{(n)}) = w_{li}^{(n)}$ et désignons par $\smile w_l^{(n)} w_{li}^{(n)}$ les courbes, situées dans le domaine Ω, qui sont des images des segments $\overline{z_l^{(n)} z_{li}^{(n)}}$.

Il résulte de la propriété 4° des rayons $\tau_i(z)$, indiquée dans le lemme du paragraphe 4, que

$$(14) \qquad \left| \frac{f(z') - f(z_l^{(n)})}{z' - z_l^{(n)}} \right| < \frac{1}{\sigma}$$

pour tous les points z' situés sur les rayons correspondants

$$\tau_{li}^{(n)}, \qquad 1 \leq i \leq \nu, \qquad 1 \leq l \leq p_{s,t}^{(n)},$$

et tels que $|z' - z_l^{(n)}| \leq \sigma$.

On obtient de (12), (13) et (14) que

$$(15) \qquad \overline{w_l^{(n)} w'} < \frac{a}{4n},$$

pour tous les points w' situés sur les courbes correspondantes $\smile w_l^{(n)} w_{li}^{(n)}$, où n, l et i sont des indices quelconques vérifiant les inégalités $n > N$, $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq l \leq p''_{s,t}$. Il résule de l'inégalité (15) et de la définition des cercles Γ''_l que, pour $n > N$, toutes les courbes $\smile w''_l w''_{li}$ sont situées à l'intérieur des cercles correspondants Γ''_l.

Nous avons déjà vu que, pour $l \neq l'$, les cercles Γ''_l et $\Gamma''_{l'}$ n'ont pas de points communs intérieurs. Donc, pour $l \neq l'$, les courbes $\smile w''_l w''_{li}$ et $\smile w''_{l'} w''_{l'i'}$ et, par suite, les segments $\overline{z''_l z''_{li}}$, $\overline{z''_{l'} z''_{l'i'}}$ n'ont pas de points communs, quels que soient les indices i et i', $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq i' \leq \nu$.

Considérons les triangles $z''_l z''_{l,1} z''_{l,2}$, $1 \leq l \leq p''_{s,t}$. Nous allons démontrer que ces triangles vérifient toutes les conditions 1°, 2°, 3° et 4° du lemme 1 de ce paragraphe, où l'on suppose que la droite d, qui figure dans l'énoncé de ce lemme, contient le segment $\overline{z'z''}$. Tout d'abord, on voit, d'après ce qui précède, que les segments $\overline{z''_l z''_{l,1}}$, $\overline{z''_l z''_{l,2}}$ n'ont pas de points communs avec les segments $\overline{z''_{l'} z''_{l'1}}$, $\overline{z''_{l'} z''_{l'2}}$, si $l \neq l'$. Nous avons donc la condition 4°. En tenant compte de la relation (12), on obtient immédiatement la condition 1°, où l'on pose $\delta = \frac{\pi}{4n}$. Puisque les points z''_l, $1 \leq l \leq p''_{s,t}$, appartiennent à l'ensemble ϖ, qui est situé sur le segment $\overline{z'z''}$ et dont la mesure linéaire est nulle, on obtient de même la condition 3°. Pour obtenir la condition 2°, rappelons-nous que les segments $\overline{z''_l z''_{l,1}}$ et $\overline{z''_l z''_{l,2}}$ sont situés respectivement sur les rayons

$$\tau''_{l,1} = \tau_1(z''_l) \qquad \text{et} \qquad \tau''_{l,2} = \tau_2(z''_l).$$

En comparant la définition des rayons Δ_1, Δ_2 avec la propriété 1° des rayons $\tau_i(z)$, indiquée dans l'énoncé du lemme du paragraphe 4, on obtient les inégalités

$$(16) \qquad \left|\Delta_1 . \widehat{\overline{z''_l z''_{l,1}}}\right| < \sigma, \qquad \left|\Delta_2 . \widehat{\overline{z''_l z''_{l,2}}}\right| < \sigma.$$

Puisque les rayons Δ_1 et Δ_2 sont dirigés du même côté du segment $\overline{z'z''}$, il résulte des inégalités (2) et (16) que les triangles $z''_l z''_{l,1}, z''_{l,2}$ possèdent un seul point commun z''_l avec le segment $\overline{z'z''}$. Nous avons donc la condition 2°.

Les segments $\overline{z''_l z''_{l,1}}$ et $\overline{z''_l z''_{l,2}}$ étant situés respectivement sur les rayons $\tau''_{l,1} = \tau_1(z''_l)$ et $\tau''_{l,2} = \tau_2(z''_l)$, on obtient l'inégalité

$$\pi - 800\sigma > \left[\widehat{\overline{z''_l z''_{l,1}} . \overline{z''_l z''_{l,2}}}\right] > 800\sigma \qquad (1 \leq l \leq p''_{s,t}).$$

si l'on tient compte de la propriété 2° des rayons $r_i(z)$, indiquée dans l'énoncé du lemme du paragraphe 4. En appliquant le lemme I de ce paragraphe, nous pouvons écrire, pour $n > N$,

$$(17) \qquad ps''_{n,i} < \frac{4n}{\tau a \sin 800\tau}\,\varepsilon\left(\frac{\tau a}{4n}\right),$$

où la fonction $\varepsilon(\delta)$ vérifie la condition $\lim\limits_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$. En comparant les inégalités (10) et (17), on obtient

$$\frac{g}{8} < \frac{1}{\tau \sin 800\tau}\,\varepsilon\left(\frac{\tau a}{4n}\right).$$

Cette inégalité est impossible, puisque $g > 0$ et

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon\left(\frac{\tau a}{4n}\right) = 0.$$

Nous arrivons donc à une contradiction, en supposant que la longueur de $q > 0$. Il en résulte que chaque ensemble parfait ϖ, situé sur le segment $\overline{z'z''}$, appartenant à l'ensemble H et ayant une mesure linéaire nulle, possède dans le domaine Ω une image q de longueur nulle.

Supposons à présent que ϖ soit un ensemble parfait de mesure linéaire nulle, situé sur le segment $\overline{z'z''}$, mais n'appartenant pas nécessairement à l'ensemble H. Soit e la partie commune des ensembles ϖ et H. L'ensemble e est fermé ou fini (en particulier, vide). Désignons par ϖ_0 le noyau parfait de l'ensemble e [1]. L'ensemble ϖ_0 possède évidemment une mesure linéaire nulle,

$$\text{Mes lin}\,\varpi_0 = 0.$$

Désignons par q_0 l'image dans le domaine Ω de l'ensemble ϖ_0. D'après ce qui précède,

$$(18) \qquad \text{longueur de } q_0 = 0.$$

On peut facilement démontrer que l'ensemble $\varpi - e$ peut être représenté sous la forme

$$\varpi - e = \sum_{i=1}^{\infty} \varpi_i.$$

---

[1] On dit que l'ensemble parfait ϖ_0 est le noyau parfait d'un ensemble fermé e, lorsque $e = \varpi_0 + h$, où h est un ensemble fini, dénombrable ou inexistant. Lorsque l'ensemble e est fini, dénombrable ou inexistant, l'ensemble ϖ_0 est vide.

où chacun des ensembles ϖ_i est une portion de ϖ, entièrement extérieure à l'ensemble H. D'après l'énoncé du présent lemme, la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point z qui se trouve à l'intérieur du domaine D, mais n'appartient pas à l'ensemble P. Le segment $\overline{z'z''}$ étant à l'intérieur du domaine D', il résulte donc de la définition de ce domaine qu'il existe un domaine D_i qui contient à son intérieur tous les points de l'ensemble ω_i et dans lequel la fonction $f(z)$ est partout holomorphe. On en conclut facilement que

$$\text{longueur de } q_i = 0, \tag{19}$$

où q_i est l'image de l'ensemble ϖ_i dans le domaine Ω [1].

Soit q l'image dans le domaine Ω de l'ensemble ϖ. Il résulte de ce qui précède que l'ensemble q peut être représenté sous la forme

$$q = q' + q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i,$$

où l'ensemble q' est fini, dénombrable ou vide. En tenant compte de (18) et (19), on en conclut que

$$\text{longueur de } q = 0.$$

Puisque l'ensemble q est l'image dans le domaine Ω d'un ensemble parfait quelconque, situé sur le segment $\overline{z'z''}$ et possédant une mesure linéaire nulle, on voit que le segment $\overline{z'z''}$ possède la propriété N. Donc chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D', possède la propriété N, si les rayons Δ_1 et Δ_2 sont dirigés du même

[1] Cela résulte de la remarque suivante : Si la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un domaine D, et si L est une courbe rectifiable située à l'intérieur de ce domaine, l'image de L dans le domaine Ω est aussi une courbe rectifiable et l'on a l'inégalité

$$\text{longueur de } L' \leq 2M.\ \text{longueur de } L,$$

où L' est l'image de la courbe L et M est le maximum de $|f'(z)|$ sur la courbe L. Par suite, si l'ensemble ω_i se trouve dans un domaine D'_i, intérieur au domaine D_i, et si tous les points de ω_i sont enfermés dans des contours fermés simples qui se trouvent dans D'_i et dont la somme des longueurs est inférieure à un nombre positif ε, l'ensemble q_i, image de ω_i, sera enfermé dans des contours fermés simples dont la somme des longueurs est inférieure à $2M'\varepsilon$, où M' est le maximum de $|f'(z)|$ dans D'_i.

côté de ce segment et si les inégalités (2) sont vérifiées. Le raisonnement reste le même, si l'on prend, au lieu des rayons Δ_1 et Δ_2 deux rayons quelconques $\Delta_{i'}$ et $\Delta_{i''}$ ($i' \neq i''$, $1 \leq i' \leq \nu$, $1 \leq i'' \leq \nu$). Il en résulte que les rayons Δ_i possèdent la propriété *b.* qui figure dans l'énoncé du présent lemme. Le lemme est donc complètement démontré.

6. Dans ce paragraphe nous démontrerons le théorème énoncé à la fin du paragraphe 1. Nous commencerons par démontrer un lemme qui est une conséquence du lemme 2 du paragraphe précédent.

Lemme. — *Supposons que la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point du domaine* D, *sauf peut-être aux points d'un ensemble parfait* P *qui contient des points intérieurs à* D. *Supposons, de plus, qu'il existe un ensemble* H, *appartenant à* P *et partout de deuxième catégorie sur* P, *dont chaque point possède la propriété* K″.

Dans ces conditions on peut déterminer un domaine D′, *intérieur à* D *et contenant à son intérieur les points de* P, *et deux droites d_1 et d_2 perpendiculaires l'une à l'autre, situées dans le plan du domaine* D *et telles que chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine* D′ *et parallèle à l'une des droites d_1 ou d_2 possède la propriété* N.

Démonstration. — Lorsque la propriété K″ est remplie en un point z, on peut déterminer trois rayons rectilignes $t_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, issus du point z, situés sur trois droites différentes et tels que

$$\lim_{h \to 0} [t_i(z)] \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < +\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme 2 du paragraphe précédent en y posant $\nu = 3$. Par suite, il existe un domaine D′, intérieur à D et contenant à son intérieur les points de P, un nombre positif σ et trois rayons rectilignes fixes Δ_i, $1 \leq i \leq 3$, qui sont situés dans le plan du domaine D et possèdent les propriétés *a.* et *b.* indiquées dans l'énoncé du lemme 2 du paragraphe précédent.

Il résulte, d'après un raisonnement élémentaire, qu'on peut déterminer dans le plan du domaine D deux droites d_1 et d_2 qui possèdent les propriétés suivantes :

α. Les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires l'une à l'autre.

β. On peut choisir parmi les trois indices $i=1$, $i=2$ et $i=3$, deux paires d'indices (i_1, i_1') et (i_2, i_2'), $i_1 \neq i_1'$, $i_2 \neq i_2'$, tels que les rayons Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1'}$ sont dirigés du même côté de la droite d_1 et vérifient les inégalités

$$\sigma < |\Delta_{i_1}, d_1| < \pi - \sigma, \quad (^1)$$
$$\sigma < |\Delta_{i_1'}, d_1| < \pi - \sigma,$$

tandis que les rayons Δ_{i_2}, Δ_{i_2}' sont dirigés du même côté de la droite d_2 et vérifient les inégalités

$$\sigma < |\Delta_{i_2}, d_2| < \pi - \sigma,$$
$$\sigma < |\Delta_{i_2'}, d_2| < \pi - \sigma.$$

On en conclut, d'après la propriété *b*. indiquée plus haut, que chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D' et parallèle à l'une des droites d_1 ou d_2 possède la propriété N. C. Q. F. D.

Nous nous servirons encore de la définition suivante :

Soit $F(x)$ une fonction d'une variable réelle x définie dans un intervalle (a, b). Nous dirons avec M. Lusin que $F(x)$ *a la propriété* N, si l'ensemble de ses valeurs pour les valeurs de x appartenant à un ensemble quelconque de mesure nulle a aussi une mesure nulle.

M. Lusin a démontré le théorème suivant :

Lorsqu'une fonction continue $F(x)$ *ne possède pas la propriété* N *dans un intervalle* (a, b), *il existe toujours dans cet intervalle un ensemble parfait* π *de mesure nulle tel que les valeurs de* $F(x)$ *sur* π *constituent un ensemble de mesure positive.*

Donc *une fonction continue* $F(x)$ *possède nécessairement la propriété* N *lorsque les valeurs de* $F(x)$ *sur un ensemble par-*

(1) On peut choisir sur chacune des droites d_1 et d_2 une direction quelconque.

fait quelconque de mesure nulle constituent aussi un ensemble de mesure nulle (¹).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé à la fin du paragraphe I. Donc nous supposons que *la fonction* $f(z)$ *effectue une correspondance biunivoque, bicontinue et directe entre les points des domaines* D *et* Ω *et que la propriété* K″ *est remplie en chaque point intérieur au domaine* D, *sauf peut-être aux points d'un ensemble* E, *fini ou dénombrable*. Nous allons démontrer que, dans ces conditions, *la fonction* $f(z)$ *est holomorphe à l'intérieur de* D.

Considérons les points intérieurs au domaine D au voisinage desquels la fonction $f(z)$ n'est pas partout holomorphe. Désignons par P l'ensemble de tous ces points augmenté de leurs points limites sur la frontière de D. L'ensemble P est évidemment un ensemble parfait. Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que l'ensemble P ne contient pas de points intérieurs au domaine D (²).

Supposons que l'ensemble P contient des points intérieurs à D et désignons par H l'ensemble de tous les points de P, intérieurs à D et n'appartenant pas à l'ensemble E. L'ensemble H est partout de deuxième catégorie sur P, puisque l'ensemble E est fini ou dénombrable.

Il résulte de la définition de l'ensemble H que chaque point de cet ensemble possède la propriété K″. Donc, en vertu du lemme de ce paragraphe, on peut déterminer un domaine D′ et deux droites d_1, d_2 qui possèdent toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé du lemme. Les droites d_1, d_2 étant perpendiculaires l'une à l'autre, nous pouvons les prendre pour les axes de coordonnées, en faisant une transformation linéaire convenable de la variable z. Donc chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D′ et parallèle à l'un des axes de coordonnées, possède la propriété N. De plus, le domaine D′ contient à son intérieur les points de l'ensemble P.

Nous allons démontrer que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de D′. Prenons, à l'intérieur de D′, un rectangle quel-

(¹) Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* [*Recueil mathématique de la Société mathematique de Moscou*, 1915, p. 109 (en russe)].

(²) Dans ce cas l'ensemble P est évidemment vide.

conque R dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Pour démontrer que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de D′, il suffit de démontrer que

$$\int_C f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

où C est le contour du rectangle R.

Posons

$$z = x + iy, \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{2}$$

où x, y, $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des quantités réelles.

Désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2), $x < x_2$, $y_1 < y_2$, les coordonnées des quatre sommets du rectangle R.

Il est facile de voir que la projection sur une droite quelconque d'un ensemble parfait, partout discontinu de longueur nulle est un ensemble de mesure linéaire nulle. Puisque chaque segment $\overline{z' z''}$, intérieur au domaine D′ et parallèle à l'un des axes de coordonnées, possède la propriété N, il résulte du théorème de M. Lusin, énoncé au début de ce paragraphe, que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, considérées comme des fonctions d'une seule variable x, possèdent la propriété N dans l'intervalle (x_1, x_2) pour toutes les valeurs constantes de y dans l'intervalle (y_1, y_2). Par la même raison, les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, considérées comme des fonctions d'une seule variable y, possèdent la propriété N dans l'intervalle (y_1, y_2) pour toutes les valeurs constantes de x dans l'intervalle (x_1, x_2).

Dans la suite, nous nous servirons du théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction continue et univalente dans le domaine D. *Supposons qu'il existe à l'intérieur de* D *un ensemble mesurable* E′ *de mesure positive dont chaque point z est l'extrémité de deux rayons rectilignes $t_1(z)$ et $t_2(z)$ situés sur deux droites différentes et vérifiant les conditions*

$$\limsup_{\Delta z \to 0} [t_1(z)] \left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| < +\infty,$$

$$\limsup_{\Delta z \to 0} [t_2(z)] \left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| < +\infty.$$

Alors la fonction $f(z)$ possède une différentielle totale de Stoltz presque partout dans E [1].

Nous avons supposé que la fonction $f(z)$ a la propriété K en chaque point intérieur du domaine D, sauf peut-être aux points d'un ensemble E fini ou dénombrable. Donc chaque point z, intérieur au domaine D, mais n'appartenant pas à l'ensemble E, est l'extrémité de trois rayons rectilignes $t_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, situés sur trois droites différentes et tels que les trois limites

$$\lim_{\Delta z \to 0} |t_i(z)| \left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| \qquad (i = 1, 2, 3).$$

existent et possèdent la même valeur finie. Puisque, par hypothèse, la fonction $f(z)$ est continue et univalente, il résulte d'après le théorème cité que $f(z)$ possède une différentielle totale de Stoltz presque partout à l'intérieur du domaine D. Nous avons déjà démontré au paragraphe 2 que la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point z où elle a la propriété K″ et, en même temps, possède une différentielle totale de Stoltz. Donc la fonction $f(z)$ est monogène presque partout à l'intérieur du domaine D. Il en résulte, d'après le lemme du paragraphe 3, que le module $|f'(z)|$ est une fonction sommable à l'intérieur de D. On voit, en résumant, que les quatre dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

existent et vérifient les relations

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

presque partout à l'intérieur du domaine D. De plus, chacune de ces dérivées partielles est sommable à l'intérieur de D.

Considérons l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz.$$

---

[1] D. MENCHOFF, *Sur les différentielles totales des fonctions univalentes* (*Mathematische Annalen*, t. 105, fasc. 1, p. 75).

où C est le contour, parcouru dans le sens positif, du rectangle R considéré plus haut. On a, en vertu de (2),

$$(4)\qquad \int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy).$$

Faisons une transformation de l'intégrale curviligne $\int_C u\,dy$ en une intégrale double. La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ étant sommable à l'intérieur du domaine D, il résulte d'un théorème de M. Fubini (1) que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,$$

considérée comme une fonction de la variable y, existe au sens de M. Lebesgue pour toutes les valeurs de y dans l'intervalle (y_1, y_2), sauf peut-être les valeurs d'un ensemble e de mesure nulle. De plus, cette intégrale représente une fonction sommable et l'on a la relation

$$(5)\qquad \int\int_R \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx.$$

Nous avons déjà vu que la fonction $u(x, y)$, considérée comme une fonction d'une seule variable x, possède la propriété N dans l'intervalle (x_1, x_2) pour toutes les valeurs de y dans l'intervalle (y_1, y_2). De plus, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ est sommable pour toutes les valeurs de y dans (y_1, y_2) qui n'appartiennent pas à l'ensemble e. Il en résulte, d'après un théorème sur les fonctions possédant la propriété N (2), que $u(x, y)$ est absolument continue dans l'intervalle (x_1, x_2) pour toutes les valeurs de y dans (y_1, y_2) qui n'appartiennent pas à l'ensemble e. Donc, en vertu d'un théorème

---

(1) *Voir*, par exemple, CARATHÉODORY, *Reelle Funktionen*, Leipzig, 1918, p. 630.

(2) MENCHOFF, *Sur la représentation conforme des domaines plans* (*Math. Annalen*, t. 95, fasc. 5, 1926, p. 645).

L'énoncé du théorème est le suivant :

Toute fonction continue F(x) *ayant la propriété* N *dans l'intervalle* (x_1, x_2) *et possédant une dérivée sommable* F$'(x)$, *finie presque partout dans cet intervalle, est une fonction absolument continue.*

de M. Lebesgue,

$$(6) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = u(x_2, y) - (x_1, y)$$

pour les mêmes valeurs de y.

Puisque Mes $e = 0$, il résulte de (5) et (6)

$$\int\int_R \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} u(x_2, y)\,dy - \int_{y_1}^{y_2} u(x_1, y)\,dy = \int_C u\,dy.$$

En répétant les mêmes raisonnements pour les intégrales $\int_C u\,dx$, $\int_C v\,dx$, $\int_C v\,dy$, on trouve finalement de la relation (4) :

$$\int_C f(z)\,dz = -\int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i\int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

On a donc

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$

puisque les relations (3) sont vérifiées presque partout dans le rectangle R.

Nous avons supposé que R est un rectangle quelconque situé à l'intérieur du domaine D′ et ayant les côtés parallèles aux axes de coordonnées. Il en résulte que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D′, ce qui est impossible, puisque le domaine D′ contient à son intérieur les points de l'ensemble P, au voisinage desquels la fonction $f(z)$ n'est pas partout holomorphe. On voit de cette contradiction que l'ensemble P ne contient pas de points intérieurs au domaine D et, par suite, la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de D, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. — Le théorème en question cesse d'être vrai, lorsqu'on remplace dans son énoncé les trois rayons $t_1(z)$, $t_2(z)$ et $t_3(z)$ par *deux* rayons $t_1(z)$ et $t_2(z)$. On le voit sur l'exemple suivant :

$$f(z) = (x + y\cos\alpha) + iy\sin\alpha,$$

où $z = x + iy$ et α est un nombre constant, compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

7. Dans les deux paragraphes suivants nous démontrerons un autre théorème, analogue à celui démontré dans les paragraphes précédents. Tout d'abord nous introduirons une définition. Nous dirons que la fonction $f(z)$, continue dans un domaine D, *possède la propriété* K''' en un point z, s'il existe deux rayons rectilignes t_1 et t_2, issus du point z, situés sur deux droites différentes (¹) et tels que les deux limites

$$\lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \qquad (i=1, 2),$$

existent et possèdent la même valeur finie.

Nous démontrerons le théorème suivant :

Supposons que la fonction $f(z)$, continue et univalente dans un domaine D, *possède la propriété* K''' *en chaque point intérieur à ce domaine, sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable. Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de* D.

Nous commencerons par démontrer deux lemmes :

Lemme I. — *Soit $f(z)$ une fonction continue (non nécessairement univalente) dans un domaine* D. *Supposons que $f(z)$ possède la propriété* K''' *en un point z_0, intérieur à* D, *et en même temps, possède en ce point une différentielle totale de Stoltz.*

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ est monogène au point z_0.

Démonstration. — Les raisonnements seront presque les mêmes que dans le paragraphe 2. Nous posons $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, les quatre quantités x, y, x_0 et y_0 étant réelles. Par hypothèse, la fonction $f(z)$ possède une différentielle totale de Stoltz au point z_0 : donc les dérivées partielles $\frac{\partial f(z)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(z)}{\partial y}$ existent pour $x=x_0$, $y=y_0$ et, de plus, on a la relation

$$(1) \qquad f(z)=f_1(z)+\varphi(z)$$

(¹) Nous supposons toujours que les rayons t_1 et t_2 sont situés dans le plan du domaine D.

où

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1(z) = f(z_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0), \\ A = \left[\dfrac{\partial f(z)}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \qquad B = \left[\dfrac{\partial f(z)}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \varphi(z) = \varepsilon(z)(z - z_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

On a de la première relation (2),

$$(4)\qquad f_1(z_0) = f(z_0).$$

De plus, on voit des relations (3) que la dérivée $\varphi'(z_0)$ existe et possède une valeur nulle; donc la fonction $\varphi(z)$ est monogène au point z_0

Puisque, par hypothèse, la condition K‴ est remplie au point z_0, il existe deux rayons rectilignes t_1 et t_2, issus du point z_0, situés sur deux droites différentes et tels que les deux limites

$$(5)\qquad \lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (i = 1, 2),$$

existent et possèdent la même valeur finie λ [1]. En comparant la relation (1) avec la relation $\varphi'(z_0) = 0$, on obtient

$$(6)\qquad \lim_{\Delta z \to 0} (t_i) \frac{f_1(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lambda \qquad (i = 1, 2).$$

Lorsque $A = B = 0$, nous avons de la première relation (2)

$$f_1(z) = f(z_0) = \text{const.}$$

et par suite, en vertu de (1) et de la relation $\varphi'(z_0) = 0$, la fonction $f(z)$ est monogène au point z_0.

Supposons, à présent, que l'une au moins des quantités A ou B soit différente de zéro. Supposons, par exemple, que $B \neq 0$. Nous considérerons tout d'abord le cas où le rapport $\frac{A}{B}$ est réel. Soit d une droite quelconque, passant par le point z_0 et située dans le plan de la variable z. Supposons tout d'abord que la droite d ne coïncide pas avec la droite d_0 définie par l'équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

(1) Le nombre λ peut être égal à zéro.

La fonction $f_1(z)$ étant linéaire par rapport à $x - x_0$ et $y - y_0$, si le point z parcourt la droite d le point correspondant $w_1 = f_1(z)$ décrit dans le plan de la variable w_1 une droite $\Delta(d)$. Il est clair que le nombre λ qui figure dans les relations (6), n'est égal à zéro que dans le cas où les deux rayons t_1 et t_2 coïncident avec la droite d_0, ce qui est impossible, puisque ces deux rayons se trouvent sur deux droites différentes. Donc, dans le cas considéré, $\lambda \neq 0$. Par suite, si le point z parcourt un des rayons t_1 ou t_2, le point correspondant $w_1 = f_1(z)$ décrit respectivement des rayons rectilignes T_1 ou T_2 dont l'extrémité commune se trouve au point

$$w_0 = f_1(z_0) = f(z_0).$$

De plus, il résulte de (6) que

$$\left[t_1 \hat{,} t_2\right] = \left[T_1 \hat{,} T_2\right],$$

le sens de rotation des angles étant le même. Lorsque le rapport $\frac{A}{B}$ est réel, on voit facilement que toutes les droites $\Delta(d)$ se confondent, ce qui est incompatible avec la relation (7), puisque les rayons t_1 et t_2 se trouvent sur deux droites différentes. Donc le rapport $\frac{A}{B}$ est imaginaire, d'où il résulte que la fonction $f_1(z)$ effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points des deux plans z et w_1.

En tenant compte des relations (6), on voit que la transformation $w_1 = f_1(z)$ est une transformation de similitude, c'est-à-dire la fonction $f_1(z)$ est une fonction linéaire de la variable z. Il résulte donc de (1) et de la relation $\varphi'(z_0) = 0$ que la fonction $f(z)$ est monogène au point z_0. C. Q. F. D.

Le second lemme que nous démontrerons dans ce paragraphe est une conséquence immédiate du second lemme du paragraphe 5.

Lemme 2. — *Supposons que la fonction $f(z)$, continue et univalente dans un domaine* D, *est monogène en chaque point de ce domaine, sauf peut-être aux points d'un ensemble parfait* P *qui contient des points intérieurs à* D. *Supposons de plus qu'il existe un ensemble* H, *appartenant à* P *et partout de deuxième catégorie sur* P, *dont chaque point possède la propriété* K‴.

Dans ces conditions, on peut déterminer un domaine D', *inté-*

rieur à D et contenant à son intérieur les points de P, et deux droites non parallèles d_1 et d_2 situées dans le plan du domaine D et telles que chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D' et parallèle à l'une des droites d_1 ou d_2, possède la propriété N.

Démonstration. — Lorsque la propriété K''' est remplie en un point z, on peut déterminer deux rayons rectilignes $t_1(z)$ et $t_2(z)$ issus du point z, situés sur deux droites différentes et tels que

$$\lim_{\Delta z \to 0} |t_i(z)| \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| < +\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme 2 du paragraphe 5, en y posant $\nu = 2$. Par suite, il existe un domaine D', intérieur à D et contenant à son intérieur les points de P, un nombre positif σ et deux rayons rectilignes fixes Δ_1, Δ_2 qui sont situés dans le plan du domaine D et possèdent les propriétés *a.* et *b.* indiquées dans l'énoncé du lemme 2 du paragraphe 5.

En tenant compte de la propriété *a.*, on peut déterminer dans le plan du domaine D deux droites d_1 et d_2 possédant les propriétés suivantes :

α. Les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles;

β. Les rayons Δ_1 et Δ_2 sont dirigés du même côté de chaque droite d_1 et d_2 et vérifient les inégalités

$$\sigma < [\Delta_i, \widehat{\ } d_j]_\pi < -\sigma \qquad (i = 1, 2;\ j = 1, 2). \quad (^1)$$

On en conclut, d'après la propriété *b.*, que chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D' et parallèle à l'une des droites d_1 ou d_2, possède la propriété N. C. Q. F. D.

8. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé au début du paragraphe précédent. Les raisonnements seront à peu près les mêmes que dans le paragraphe 6. Nous considérerons les points intérieurs au domaine D au voisinage desquels la fonction $f(z)$ n'est pas partout holomorphe et nous désignerons par P un ensemble parfait qui consiste en tous les points qui possèdent cette propriété et leurs points limites sur la frontière de D.

---

(1) Nous choisissons sur chacune des droites d_1 et d_2 une direction quelconque.

Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que l'ensemble P ne contient pas de points intérieurs à D.

Supposons, au contraire, que l'ensemble P contient des points intérieurs à D et soit E l'ensemble de points intérieurs à D dans lesquels la propriété K''' n'est pas remplie. Par hypothèse, l'ensemble E est fini ou dénombrable (¹). En désignant par H l'ensemble de tous les points de P, intérieurs à D, mais n'appartenant pas à E, on voit donc que H est partout de deuxième catégorie sur P. D'ailleurs chaque point de H possède la propriété K'''. Il en résulte, d'après le lemme 2 du paragraphe 7, qu'on peut déterminer un domaine D', contenant à son intérieur les points de l'ensemble P, et deux droites d_1, d_2, non parallèles et telles que chaque segment $\overline{z'z''}$, intérieur au domaine D' et parallèle à l'une des droites d_1 ou d_2, possède la propriété N.

Nous allons démontrer que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D'. Soit Q un parallélogramme quelconque qui est situé à l'intérieur de D' et dont les côtés sont parallèles aux droites d_1 et d_2. Comme il est facile de voir, pour démontrer que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de D', il suffit de démontrer que

$$(1) \qquad \int_C f(z)\,dz = 0,$$

où C est le contour du parallélogramme Q.

Posons, comme précédemment,

$$(2) \qquad z = x + iy, \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

où x, y, $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des quantités réelles. Par hypothèse, la fonction $f(z)$ possède la propriété K''' en chaque point intérieur du domaine D, sauf peut-être aux points de l'ensemble E, qui est fini ou dénombrable. Donc chaque point z, intérieur au domaine D, mais n'appartenant pas à l'ensemble E, est l'extrémité de deux rayons rectilignes $t_1(z)$ et $t_2(z)$ situés sur deux droites différentes et tels que les deux limites

$$\lim_{\Delta z \to 0} [t_i(z)] \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (i = 1, 2)$$

(¹) L'ensemble E peut même être vide.

existent et possèdent la même valeur finie. Par suite, on a pour les mêmes points z

$$\lim_{\Delta z \to 0} |t_i(z)| \left| \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \right| < +\infty \qquad (i=1, 2).$$

En tenant compte que la fonction $f(z)$ est continue et univalente et en appliquant le théorème sur les différentielles totales dont l'énoncé se trouve dans le paragraphe 6, on voit que la fonction $f(z)$ possède une différentielle totale de Stoltz presque partout à l'intérieur du domaine D. D'après le lemme 1 du paragraphe 7, la fonction $f(z)$ est monogène en chaque point z où elle a la propriété K''' et, en même temps, possède une différentielle totale de Stoltz. Donc la fonction $f(z)$ est monogène presque partout à l'intérieur du domaine D. Il en résulte, d'après le lemme du paragraphe 3, que le module $|f'(z)|$ est une fonction sommable à l'intérieur de D. On voit, en résumant, que les quatre dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existent et vérifient les relations

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

presque partout à l'intérieur de D. De plus, chacune de ces dérivées partielles est sommable à l'intérieur de D.

Considérons l'intégrale

$$\int_C f(z)dz,$$

le contour C ayant la même signification que plus haut. Choisissons les directions sur les droites d_1 et d_2 de telle façon que l'angle $\left[d_1 \overset{\wedge}{,} d_2\right]$ compris entre zéro et π, soit parcouru dans le sens positif de d_1 vers d_2. Désignons par α et β les angles formés par les directions choisies sur les droites d_1 et d_2 avec la direction positive de l'axe des x. Soient $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, les sommets du parallélogramme Q, numérotés de telle façon que le contour C soit parcouru dans le sens positif et que les directions des segments $\overline{z_1 z_2}$ et $\overline{z_1 z_4}$ coïncident respectivement avec les directions sur les droites d_1 et d_2. Prenons deux variables réelles ξ et

η définies par les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} x - x_1 = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta, \\ y - y_1 = \xi \sin\alpha + \eta \sin\beta \end{cases}$$

et considérons une variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$.

Soient ξ_k et η_k les valeurs des variables ξ et η qui correspondent aux valeurs x_k et y_k des variables x et y. Posons $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. On voit immédiatement que

$$(5)\qquad \xi_1 = \eta_1 = \eta_2 = \xi_4 = 0, \qquad \xi_2 = \xi_3, \qquad \eta_3 = \eta_4.$$

Par suite, le point ζ décrit dans un plan auxiliaire le contour Γ d'un rectangle R, lorsque le point z décrit le contour C. Les côtés du rectangle R sont parallèles aux axes des ξ et des η et leurs longueurs sont égales à ξ_2 et η_3.

Faisons une transformation de l'intégrale $\int_C f(z)dz$, en introduisant la variable auxiliaire $\zeta = \xi + i\eta$. Nous aurons

$$(6)\qquad \int_C f(z)dz = \int_\Gamma [(u\cos\alpha - v\sin\alpha)\,d\xi + (u\cos\beta - v\sin\beta)\,d\eta]$$
$$+ i\int_\Gamma [(v\cos\alpha + u\sin\alpha)\,d\xi + (v\cos\beta + u\sin\beta)\,d\eta],$$

où les fonctions u et v sont considérées comme des fonctions des variables ξ et η, c'est-à-dire

$$(7)\qquad \begin{cases} u = u(x_1 + \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta,\ y_1 + \xi\sin\alpha + \eta\sin\beta), \\ v = v(x_1 + \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta,\ y_1 + \xi\sin\alpha + \eta\sin\beta). \end{cases}$$

Transformons l'intégrale curviligne (6) en une intégrale double. D'après la définition du parallélogramme Q, tous les segments rectilignes joignant deux côtés opposés de ce parallélogramme et parallèles aux deux autres côtés possèdent la propriété N. De plus, lorsque le point z décrit un de ces segments, le point correspondant ζ décrit un segment parallèle à l'axe des ξ ou à l'axe des η. Les sommets du rectangle R ayant les coordonnées $(0, 0)$, $(\xi_2, 0)$, (ξ_2, η_2), $(0, \eta_3)$ on démontre, en raisonnant comme dans le paragraphe 6, que les fonctions u et v, définies par les relations (7) et considérées comme des fonctions d'une seule variable ξ, possèdent la propriété N dans l'intervalle $(0, \xi_2)$ pour toutes les valeurs constantes de η dans l'intervalle $(0, \eta_3)$. De même, pour toutes les valeurs constantes de ξ dans l'intervalle (o, ξ_2) les fonctions u et v possèdent la propriété N dans l'intervalle (o, η_3), lorsqu'on les considère comme des fonctions d'une seule variable η.

Nous avons déjà démontré que les quatre dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existent presque partout à l'intérieur du domaine D et sont des fonctions sommables à l'intérieur de ce domaine. De plus, la fonction $f(z)$ et, par suite, les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ possèdent une différentielle totale de Stoltz presque partout à l'intérieur de D. Il en résulte que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta}$, considérées comme des fonctions des variables ξ et η, existent et vérifient les relations

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha, & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\beta, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha, & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\beta + \dfrac{\partial v}{\partial y}\sin\beta, \end{cases}$$

presque partout dans le rectangle R.

Le parallélogramme Q étant à l'intérieur du domaine D, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ sont sommables à l'intérieur de Q, d'où il résulte, d'après (8), que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta}$, considérées comme des fonctions des variables ξ et η, sont sommables à l'intérieur du rectangle R.

En appliquant le théorème de M. Fubini, on voit, comme dans le paragraphe 6, que la fonction $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, considérée comme une fonction d'une seule variable ξ, est sommable dans l'intervalle (o, ξ_2) pour toutes les valeurs de η dans l'intervalle (o, η_3) qui n'appartiennent pas à un certain ensemble e de mesure nulle. De plus, on a la relation

$$(9) \quad \int\int_R \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta = \int_0^{\eta_3} d\eta \int_0^{\xi_2} \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\xi.$$

Puisque la fonction u possède la propriété N dans (o, ξ_2) pour toutes les valeurs constantes de η dans (o, η_3), on démontre, comme dans le paragraphe 6, que la fonction u est absolument continue dans (o, ξ_2) pour toutes les valeurs constantes de η qui n'appartiennent pas à l'ensemble e. Par suite, on a la relation

$$\int_0^{\xi_2} \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = u(\xi_2, \eta_1) - u(0, \eta_1), \tag{10}$$

pour les mêmes valeurs de η.

Puisque Mes$e = 0$, il résulte de (9) et (10)

$$\int\int_R \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi d\eta_1 = \int_0^{\eta_3} u(\xi_2, \eta_1)\, d\eta_1 - \int_0^{\eta_3} u(0, \eta_1)\, d\eta_1 = \int_\Gamma u\, d\eta_1.$$

En répétant les mêmes raisonnements pour les intégrales $\int_\Gamma v\, d\eta_1$, $\int_\Gamma u\, d\xi$ et $\int_\Gamma v\, d\xi$, et en tenant compte de la relation (6), on trouve

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz = \int\int_R &\left(-\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial \eta_1}\sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cos\beta - \frac{\partial v}{\partial \xi}\sin\beta\right) d\xi\, d\eta_1 \\ + i\int\int_R &\left(-\frac{\partial v}{\partial \eta_1}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial \eta}\sin\alpha \right.\\ &\left. + \frac{\partial v}{\partial \xi}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial \xi}\sin\beta\right) d\xi\, d\eta_1.\end{aligned} \tag{11}$$

Il résulte des relations (8)

$$\left\{\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta)\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi}\sin\beta + \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\sin\alpha, \\ \sin(\alpha-\beta)\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\cos\alpha, \\ \sin(\alpha-\beta)\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial \xi}\sin\beta + \frac{\partial v}{\partial \eta_1}\sin\alpha, \\ \sin(\alpha-\beta)\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\cos\beta - \frac{\partial v}{\partial \eta_1}\cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

En comparant (11), (12) et (3), on obtient finalement

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Nous avons supposé que C est le contour d'un parallélogramme quelconque situé à l'intérieur du domaine D' et ayant les côtés parallèles aux droites d_1 et d_2. Il en résulte que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de D', ce qui est impossible, puisque le domaine D' contient à son intérieur des points de l'ensemble P, au voisinage desquels la fonction $f(z)$ n'est pas partout holomorphe. Donc la fonction $f(z)$ doit être holomorphe partout à l'intérieur du domaine D. C. Q. F. D.