E. CARTAN

Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. II

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 114-134
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__114_0>

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE D'ESPACES DE RIEMANN

(suite et fin) (1);

PAR M. E. CARTAN.

CHAPITRE III.

LA SECONDE MÉTHODE : LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS.

I. — La structure du groupe G des déplacements.

47. Nous avons déjà attiré l'attention (n° 22) sur la forme $\varphi(e)$ attachée à un groupe quelconque, forme qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique relative à une transformation infinitésimale arbitraire $\sum e_i X_i f$ du groupe. On a

$$\varphi(e) = \sum_{i,j,\rho,\sigma} e_i e_j c_{i\rho\sigma} c_{j\sigma\rho}. \tag{24}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit simple ou semi-simple est que cette forme ait son discriminant différent de zéro (2).

Nous allons faire le calcul pour le groupe G des déplacements (Chap. I, § IV). Nous désignerons par

$$\sum_i e_i X_i f + \sum_\alpha \eta_\alpha Y_\alpha f$$

une transformation arbitraire du groupe. Nous poserons

$$-\frac{1}{2}\varphi(e, \eta) = \sum_{i,j} G_{ij} e_i e_j + 2\sum_{i,\alpha} G_{i\alpha} e_i \eta_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta.$$

En nous servant des formules (12) (n° 8), que nous écrivons

(1) Voir *Bulletin Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 214-264.

(2) E. CARTAN, *Thèse*, p. 51-52. En réalité, le théorème démontré se rapporte à la forme $\psi_2(e)$. Mais il est également vrai pour la forme $\varphi(e)$.

de nouveau,

$$(12)\quad \begin{cases} (X_i X_j) = -\sum_{\rho,\sigma} a_{\rho ij} A_{\rho\sigma} Y_\sigma f, \\ (X_i Y_\alpha) = \sum_k a_{\alpha ik} X_k f, \\ (Y_\alpha Y_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} Y_\rho f, \end{cases}$$

nous trouvons

$$G_{ij} = \sum_{\rho,\sigma,k} A_{\rho\sigma} a_{\rho ik} a_{\sigma jk},$$
$$G_{i\alpha} = 0,$$
$$G_{\alpha\beta} = \sum_{(ij)} a_{\alpha ij} a_{\beta ij} - \frac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma} c_{\alpha\rho\sigma} c_{\beta\sigma\rho}.$$

Tenons compte maintenant des relations (23) et supposons le groupe Γ décomposé en ses sous-groupes simples, chacun d'eux étant ramené à sa forme normale. Nous aurons

$$(25)\quad \begin{cases} G_{ii} = C, & G_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \\ G_{i\alpha} = 0, & \\ G_{\alpha\alpha} = 1 + \sum_{(\rho\sigma)} (c_{\alpha\rho\sigma})^2 = 1 + H_\alpha^2, & G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

Finalement nous obtenons

$$(26)\qquad -\frac{1}{2}\varphi(e,\eta) = C(e_1^2 + \ldots + e_n^2) + \sum_\alpha (1 + H_\alpha^2)\eta_\alpha^2.$$

48. La partie de la forme $-\frac{1}{2}\varphi(e,\eta)$ qui contient les variables η_α est *définie positive*. Quant à la partie qui contient les variables e_i, elle est aussi définie, positive ou négative, à moins que C ne soit nul. On pourrait se servir des résultats du Chapitre II pour montrer que C n'est jamais nul; *nous allons le montrer directement*.

En effet les relations (12) montrent que le groupe G est son propre groupe dérivé; par suite les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_\alpha} = 0$$

définissent *le plus grand sous-groupe invariant intégrable* de G [1]. Si C était nul, ce sous-groupe serait engendré par les transformations $X_i f$; or elles n'engendrent manifestement aucun groupe, d'après (12).

On peut tirer de là une conclusion que nous avons déjà obtenue d'une autre manière dans le Chapitre II. Supposons que, le groupe Γ étant donné, il existe pour les coefficients $A_{\rho\sigma}$ deux systèmes de valeurs distinctes, c'est-à-dire ne différant pas uniquement par un facteur constant; on pourrait en déduire un troisième conférant à la constante C la valeur zéro, ce qui est impossible. On pourrait objecter que, pour ce troisième système de valeurs, la forme R pourrait être dégénérée, mais les relations (12) n'en définiraient pas moins un groupe et les transformations $X_i f$ ne pourraient engendrer un sous-groupe que si toutes les transformations $\sum_\sigma A_{\rho\sigma} Y_\sigma f$ étaient nulles, c'est-à-dire si tous les $A_{\rho\sigma}$ étaient nuls.

Nous retrouvons donc ainsi en partie le théorème du n° 41, d'après lequel *à tout groupe* Γ *correspond une classe d'espaces irréductibles dont la courbure ne dépend que d'un paramètre.*

49. Le groupe G étant simple ou semi-simple, nous allons chercher dans quels cas il n'est pas simple.

Faisons d'abord la remarque que, d'après (12), les transformations $X_i f$ sont transformées par les $Y_\alpha f$ comme les variables x_i le sont par les $U_\alpha f$.

Supposons en premier lieu qu'un sous-groupe invariant g contienne toutes les transformations $X_i f$. Il contiendra alors, d'après la forme des $(X_i X_j)$, toutes les transformations $Y_\alpha f$; il serait donc identique au groupe G.

Supposons en second lieu que le sous-groupe g contienne une ou plusieurs combinaisons linéaires des transformations $X_i f$; il contiendra celles qu'on en déduira en les combinant avec les $Y_\alpha f$, et il est facile de voir que l'ensemble de toutes ces transformations correspond à une multiplicité plane invariante par le groupe Γ. Or nous avons vu que les seules multiplicités planes invariantes par Γ étaient de dimension $\frac{n}{2}$ et totalement isotropes. On peut

[1] E. CARTAN, *Thèse*, p. 109, th. VI.

donc supposer que les combinaisons linéaires des $X_i f$ contenues dans g sont

$$X_1 f + i X_2 f, \quad X_3 f + i X_4 f, \quad \ldots, \quad X_{n-1} f + i X_n f.$$

Or

$$(X_{2i-1} f + i X_{2i} f, Y_\alpha) = \sum_k (a_{\alpha,2i-1,k} + i a_{\alpha,2i,k}) X_k f;$$

donc

$$a_{\alpha,2i-1,2k-1} = a_{\alpha,2i,2k}, \qquad a_{\alpha,2i-1,2k} = -a_{\alpha,2i,2k-1}.$$

Appelons, comme au n° 35, i et i' deux indices consécutifs dont le plus grand soit pair, le plus grand pouvant être i ou i'. On a

$$a_{\alpha ij} = (-1)^{i+j} a_{\alpha i' j'}.$$

On a maintenant

$$\begin{aligned}&(X_{2i-1} f + i X_{2i} f, X_{2j-1} f - i X_{2j} f)\\ &= -2 \sum_{\rho,\sigma} (a_{\rho,2i-1,2j-1} + i a_{\rho,2i,2j-1}) A_{\rho\sigma} Y_\sigma f.\end{aligned}$$

On en déduit que le sous-groupe g contient toutes les transformations $\sum_\sigma A_{\rho\sigma} Y_\sigma f$, c'est-à-dire toutes les transformations $Y_\rho f$, par suite aussi toutes les transformations $(X_i Y_\alpha)$, c'est-à-dire toutes les transformations $X_i f$. Le groupe g se confond donc avec G.

Supposons en troisième lieu que le sous-groupe g contienne une transformation $Y_\alpha f$; il contiendra alors les transformations $(X_i Y_\alpha)$, et l'on retombe sur les cas précédents.

50. Reste le seul cas où le groupe g serait engendré par un certain nombre s de transformations de la forme

$$X_1 f + Z_1 f, \quad X_2 f + Z_2 f, \quad \ldots, \quad X_s f + Z_s f,$$

les $Z_i f$ étant des combinaisons linéaires indépendantes des $Y_\alpha f$. On en déduit immédiatement que les $r + s$ transformations

$$X_1 f, \quad \ldots, \quad X_s f; \qquad Z_1 f, \quad \ldots, \quad Z_s f$$

formeraient aussi un sous-groupe invariant. Cela n'est possible que si l'on a

$$s = n = r.$$

Les $Z_i f$ ne sont pas nécessairement des combinaisons *réelles* des $Y_i f$. Quoi qu'il en soit, on a des relations de la forme

$$(X_i + Z_i,\ X_j) = \sum_k A_{ijk}(X_k f + Z_k f),$$

$$(X_i + Z_i,\ Z_j) = \sum_k B_{ijk}(X_k f + Z_k f),$$

d'où, d'après la forme des équations (12),

$$(27)\qquad \begin{cases} (X_i X_j) = \sum\limits_k A_{ijk} Z_k f, & (Z_i X_j) = \sum\limits_k A_{ijk} X_k f, \\ (X_i Z_j) = \sum\limits_k B_{ijk} X_k f, & (Z_i Z_j) = \sum\limits_k B_{ijk} Z_k f; \end{cases}$$

on a donc

$$(28)\qquad A_{ijk} = -A_{jik}, \qquad B_{ijk} = A_{ijk}.$$

Les transformations $X_i f - Z_i f$ forment aussi un sous-groupe invariant, puisqu'on a

$$(X_i - Z_i,\ X_j) = -\sum_k A_{ijk}(X_k f - Z_k f),$$

$$(X_i - Z_i,\ Z_j) = \sum_k A_{ijk}(X_k f - Z_k f).$$

Le groupe semi-simple G se décompose donc en deux sous-groupes simples. Soit alors

$$-\frac{1}{2}\varphi(e, \zeta) = C(e_1^2 + \ldots + e_n^2) + \sum_{\alpha, \beta} H_{\alpha\beta}\zeta_\alpha\zeta_\beta$$

la forme qui donne la demi-somme changée de signe des carrés des racines de l'équation caractéristique de la transformation

$$\sum (e_i X_i f + \zeta_\alpha Z_\alpha f).$$

Le premier sous-groupe invariant est défini par

$$e_i = \zeta_i;$$

donc le second sous-groupe invariant sera défini par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_i} = 0$$

ou

$$Ce_i + \sum_k H_{ik}\zeta_k = 0;$$

ces équations devant se réduire à $e_i + \zeta_i = 0$, il en résulte

$$H_{ij} = 0, \qquad H_{ii} = C,$$

$$(29) \qquad -\frac{1}{2}\varphi(e, \zeta) = C(e_1^2 + \ldots + e_n^2 + \zeta_1^2 + \ldots + \zeta_r^2).$$

La forme obtenue pour $\varphi(e)$ montre que les transformations $Z_i f$ peuvent être regardées comme proportionnelles aux $Y_i f$, le facteur de proportionnalité étant réel si $C > 0$, purement imaginaire si $C < 0$. Si donc on pose

$$Z_i f = m Y_i f,$$

on trouve immédiatement, d'après (27) et (28),

$$A_{ijk} = m^2 c_{ijk},$$

$$(X_i Y_\alpha) = m \sum_k c_{i\alpha k} X_k f,$$

d'où

$$a_{\alpha ij} = -m c_{\alpha ij}.$$

Le groupe Γ *est donc le groupe adjoint d'un groupe simple unitaire.* On retrouve la classe d'espaces étudiée aux n$^{\text{os}}$ 45 et 46.

La conclusion est la suivante :

Le groupe G *des déplacements d'un espace* $\mathcal{E}$ *irréductible est simple, exception faite pour la classe qui contient les espaces de groupes simples, pour laquelle le groupe* G *se décompose en deux groupes simples isomorphes entre eux* (*réels si l'espace est à courbure positive, imaginaires conjugués si l'espace est à courbure négative*).

II. — Réduction du problème à un problème de la théorie des groupes simples réels.

51. Supposons, à partir de maintenant, le groupe G simple. On peut formuler de différentes manières le problème de la recherche des espaces irréductibles $\mathcal{E}$ pour lesquels G est simple.

Tout d'abord on voit que les n transformations infinitésimales $X_i f$ jouissant de la propriété que les transformations

$$\big(X_i(X_j X_k)\big)$$

se déduisent linéairement des $X_k f$; elles n'appartiennent de plus à aucun sous-groupe de G.

Réciproquement, supposons qu'on ait trouvé, dans un groupe simple à $n+r$ paramètres, n transformations indépendantes $X_1 f, \ldots, X_n f$ telles que les combinaisons

$$\big(X_i(X_j X_k)\big) \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ne dépendent linéairement que des $X_i f$, et telles que les $X_i f$ n'appartiennent à aucun sous-groupe de G. Les crochets $(X_i X_j)$ doivent fournir au moins r transformations infinitésimales indépendantes nouvelles, sans quoi les transformations $X_i f$ et $(X_i X_j)$ engendreraient un sous-groupe de G. Nous allons montrer que les crochets $(X_i X_j)$ sont au nombre de r indépendants.

Supposons en effet qu'ils soient au nombre de $r+s$ indépendants, combinaisons linéaires de

$$X_1 f, \quad \ldots, \quad X_s f; \qquad X_{n+1} f, \quad \ldots, \quad X_{n+r} f.$$

S'il en était ainsi, les transformations $X_1 f, \ldots, X_s f$ engendreraient un sous-groupe invariant de G. On aurait en effet, pour $i \leqq s$, $j \leqq n$,

$$(X_i X_j) = \sum_{(kh)}^{1,\ldots,n} A_{kh}\big((X_k X_h) X_j\big) = \sum_{l}^{1,\ldots,n} B_l X_l f;$$

mais d'autre part $(X_i X_j)$ devrait être une combinaison linéaire de $X_1 f, \ldots, X_s f, X_{n+1} f, \ldots, X_{n+r} f$; donc $(X_i X_j)$ ne dépend que de $X_1 f, \ldots, X_s f$. De même $(X_i X_{n+j})$, pour $i \leqq s$, est de la forme

$$\left(X_i, \sum_{(kh)}^{1,\ldots,n} A_{kh}(X_k X_h)\right) = \sum_{l}^{1,\ldots,n} B_l X_l f;$$

mais c'est aussi une combinaison des quantités

$$\big((X_j X_k)(X_h X_l)\big) \qquad (j, k, h, l \leqq n)$$

qui se ramènent à des combinaisons linéaires de crochets simples, c'est-à-dire des combinaisons linéaires de $X_1 f, \ldots, X_s f$; $X_{n+1} f, \ldots, X_{n+r} f$.

Donc les transformations $X_1 f, \ldots, X_s f$ engendrent bien un sous-groupe invariant. Comme G est simple, cela est impossible.

Par suite on a des relations de la forme

$$(X_i X_j) = \sum_\alpha A_{ij\alpha} X_{n+\alpha} f;$$

les crochets $(X_i X_{n+\alpha})$, qui se ramènent à des crochets $(X_i(X_j X_h))$ sont donc de la forme

$$(X_i X_{n+\alpha}) = \sum_k B_{\alpha ik} X_k f,$$

et enfin on a, pour une raison analogue,

$$(X_{n+\alpha} X_{n+\beta}) = \sum_\rho C_{\alpha\beta\rho} X_{n+\rho} f.$$

On retrouve donc des équations de même forme que les équations (12). Le groupe Γ a ici la même structure que le sous-groupe engendré par les transformations $X_{n+\alpha} f$. Il faut naturellement ajouter la condition supplémentaire que Γ se décompose en groupes unitaires.

52. J'ai démontré dans un autre Mémoire (*Journal de Mathématiques*) (¹) que la recherche des ensembles de transformations $X_i f$ satisfaisant aux propriétés indiquées revient à la recherche, dans l'espace de Riemann représentatif du groupe G, des variétés totalement géodésiques qui ne sont pas des variétés représentatives d'un sous-groupe et qui ne sont contenues dans aucune variété représentative d'un sous-groupe. De plus *ces variétés totalement géodésiques sont elles-mêmes des espaces de Riemann applicables sur l'espace* $\mathcal{E}$ *cherché.*

Le problème proposé revient donc à la recherche des variétés totalement géodésiques des espaces de Riemann représentatifs des groupes simples, espaces dont il a été question aux n^os 45-46.

53. On peut encore envisager le problème d'un autre point de

(¹) T. 6, 1927, p. 1-119, spécialement p. 80-90.

vue, géométriquement moins intuitif, mais qui conduit à un problème de la théorie des groupes qui a déjà été résolu.

Considérons un espace $\mathcal{E}$ irréductible dont le groupe des déplacements G soit simple. Le groupe d'holonomie Γ étant donné, changeons les signes des coefficients $A_{\alpha\beta}$ de la forme de Riemann

$$R = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta\,;$$

nous avons un autre espace irréductible $\mathcal{E}'$ correspondant à un autre groupe des déplacements G'. Désignons par $X'_i f$, $Y'_\alpha f$ les transformations infinitésimales réelles du groupe G'. On voit immédiatement qu'on peut réaliser l'isomorphisme des deux groupes G et G' en posant

$$\begin{aligned} X'_k f &= i\, X_k f \qquad (k = 1, \ldots, n), \\ Y'_\alpha f &= Y_\alpha f \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)\,; \end{aligned}$$

mais, d'autre part, il n'existe pas de correspondance isomorphique *réelle* entre les deux groupes, puisque les deux formes $\varphi(e)$ sont, l'une définie négative, l'autre indéfinie, avec r carrés négatifs et n positifs.

A tout espace irréductible $\mathcal{E}$ correspondent donc deux structures simples réelles distinctes appartenant au même type complexe ; il existe entre les deux structures réelles une correspondance imaginaire isomorphique, dans laquelle r transformations infinitésimales réelles de l'un des groupes correspondent à r transformations réelles de l'autre, et n transformations réelles de l'un des groupes corresvondent à n transformations purement imaginaires de l'autre. Enfin la forme $\varphi(e)$ correspondant à l'une des structures réelles est définie négative.

54. Réciproquement, considérons deux structures simples réelles appartenant au même type complexe, l'une étant unitaire. Soient G et G' deux groupes à paramètres réels ayant respectivement ces deux structures. Si l'on considère une correspondance isomorphique donnée (nécessairement imaginaire), entre les transformations infinitésimales de G et celles de G', on ne pourra pas *en général* choisir les transformations infinitésimales réelles de base

du groupe G de manière que chacune d'elles corresponde à une transformation infinitésimale réelle ou purement imaginaire de G′; si une telle correspondance existe, nous l'appellerons *normale*. Elle sera définie par des relations de la forme

$$(28)\qquad \begin{cases} X'_k f = i X_k f & (k = 1, \ldots, n), \\ Y'_\alpha f = \ \ Y_\alpha f & (\alpha = 1, \ldots, r); \end{cases}$$

si la forme $\varphi(e)$ du groupe G′ est définie négative, la forme $\varphi(e)$ du groupe G se décompose en une somme de n carrés positifs et r négatifs. De plus les crochets $(X'_i X'_j)$ et $(Y'_\alpha Y'_\beta)$ ne dépendent manifestement que des $Y'_\alpha f$, et les crochets $(X'_i Y'_\alpha)$ ne dépendent que des $X'_i f$. Il existe donc une classe d'espaces irréductibles $\mathcal{E}$ associés au couple des deux groupes G et G′; pour ceux qui sont à courbure positive, le groupe des déplacements est de structure unitaire.

Il se pose alors deux questions importantes :

1° *Étant données deux structures réelles simples distinctes correspondant au même type complexe, l'une de ces structures étant unitaire, peut-on établir entre ces deux structures une correspondance isomorphique normale?*

2° *Les différentes correspondances isomorphiques normales qu'on peut établir entre les deux structures conduisent-elles toujours au même groupe d'holonomie* Γ?

55. Les réponses à ces deux questions sont affirmatives, mais je n'aperçois pas de moyen pour le démontrer directement, c'est-à-dire sans être obligé de faire, pour chaque type de groupe simple, une démonstration spéciale. Les éléments de la démonstration se trouvent tous dans le Mémoire déjà cité des *Annales de l'École Normale*, et je vais me contenter d'indiquer quelle marche on peut suivre.

Supposons que ce soit le groupe G′ qui soit de structure unitaire. Imaginons d'abord qu'il existe une correspondance isomorphique normale entre G et G′. Les transformations $Y_\alpha f = Y'_\alpha f$ engendrent un sous-groupe (isomorphe à Γ). Prenons dans ce sous-groupe une transformation générale $Y'f$; elle fait partie d'un sous-groupe de λ transformations échangeables entre elles, λ désignant le *rang* de Γ. Les transformations de G' échangeables avec $Y'f$ contiennent en outre des combinaisons linéaires des $X'_i f$, qui sont également échangeables entre elles; on obtient ainsi en tout l transformations (l étant le rang du groupe G') engendrant un sous-groupe abélien γ'.

Au sous-groupe abélien γ' de G' correspond, par l'isomorphie (28), un sous-groupe abélien γ de G et, comme on le voit, ce sous-groupe γ est réel, en ce sens qu'en même temps qu'une transformation imaginaire il contient la transformation imaginaire conjuguée.

Enfin on voit que si les transformations réelles de γ qui correspondent à des transformations réelles de γ' sont toutes échangeables avec une certaine transformation réelle de G correspondant à une transformation réelle de G', cette transformation fait nécessairement partie de γ.

56. Cela posé, partons d'un groupe simple G dont la forme $\varphi(e)$ soit de *caractère* $\delta = n - r$ (différence entre le nombre des carrés positifs et celui des carrés négatifs). Prenons de toutes les manières possibles un sous-groupe abélien réel γ d'ordre l (rang du groupe G). Soit λ le nombre des transformations infinitésimales indépendantes de γ pour lesquelles les racines de l'équation caractéristique sont toutes purement imaginaires. S'il existe entre G et G' une correspondance isomorphique normale et si le sous-groupe γ' qui correspond à γ est réel, ces λ transformations seront celles qui correspondent à des transformations réelles de γ'. On regardera alors si la correspondance isomorphique peut être complétée de manière à être normale, mais si cela est possible (en fait cela l'est toujours), on exclura le cas où les λ transformations considérées de γ seraient toutes échangeables avec d'autres transformations réelles de G correspondant à des transformations réelles de G'. Il ne restera donc à considérer que certains choix du sous-groupe réel γ [en fait ce sont ceux pour lesquels le caractère δ_0 de la forme $\varphi_0(e)$ à laquelle se réduit $\varphi(e)$ pour la transformation générale de γ a la valeur minima]. Il restera alors à voir si les correspondances normales relatives à ces sous-groupes γ conduisent toutes au même groupe Γ. C'est ce que le calcul vérifie dans chaque cas.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

A toute structure réelle simple comportant une forme $\varphi(e)$ *indéfinie correspond une classe d'espaces irréductibles* $\mathcal{E}$ *et une seule.*

57. Nous allons, sans entrer dans le détail des calculs, passer en revue les différents types de structures simples réelles et indiquer, pour chacun d'eux, la nature du groupe d'holonomie Γ. Nous utiliserons les notations employées dans le Mémoire déjà cité des *Annales de l'École Normale*, en renvoyant à ce Mémoire pour les équations de structure de chaque groupe. Nous indiquerons, pour chaque type de structure simple complexe, les relations qui définissent les transformations réelles de la structure unitaire; pour chaque structure non unitaire, nous formerons un tableau indiquant, dans une case supérieure, les transformations réelles du groupe unitaire G' qui correspondent à des transformations réelles du groupe non unitaire G, puis, dans une case inférieure, celles qui correspondent à des transformations purement imaginaires. Le tableau contiendra aussi l'indication du *caractère* du groupe G, du nombre n des variables de Γ (nombre de transformations de la case inférieure du tableau), du nombre r des paramètres de Γ (nombre de transformations de la case supérieure), du rang λ du groupe Γ et de sa structure. Nous emploierons les notations du Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France* ([1]); l'égalité

$$\Gamma = g_1 g_3^2(A_4) \times g_2(B_6)$$

signifie par exemple que Γ résulte de la multiplication (marquée par le signe $\times$) de deux sous-groupes simples; l'un appartient au type (unitaire) (A) de rang 4, et son poids dominant s'obtient en ajoutant le poids dominant du groupe fondamental g_1 au double du poids dominant du groupe fondamental g_3; le second est le groupe fondamental g_2 du type (unitaire) (B) de rang 6. Nous désignons enfin par l le rang du groupe G, son ordre étant $n + r$.

([1]) La notion de *poids dominant* est introduite page 58; celle de *groupe fondamental* page 66.

III. — Les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles du type (A).

58. Les transformations du groupe unitaire G′, qui est ici isomorphe au groupe unimodulaire d'une forme d'Hermite à $l+1$ variables, sont définies par les relations ([1])

$$X_{\alpha\beta} = -\overline{X_{\beta\alpha}} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, l+1).$$

Il existe deux catégories de structures réelles; les caractères correspondant à la première sont $\delta = l$ et $\delta = -l-2$, ce dernier cas ne se présentant que pour l impair. Les caractères correspondant à la deuxième catégorie sont $\delta = 1-(p-q)^2$, où p et q sont deux entiers positifs dont la somme est $l+1$.

59. Pour le type réel de caractère $\delta = l$, on obtient le tableau suivant, où l'on a défini le groupe G par les transformations $X_{\alpha\beta}$, supposées réelles ([2]) :

(A I)	$X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}$		
	$iX_{\alpha\alpha}$ $i(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha})$		
	$\delta = l,$	$r = \dfrac{l(l+1)}{2},$	$n = \dfrac{l(l+3)}{2}$

Le groupe Γ est celui qui indique comment les coefficients d'une forme quadratique harmonique à $l+1$ variables sont transformés par les substitutions orthogonales effectuées sur les variables; il est du type (D) et de rang $\dfrac{l+1}{2}$ si l est impair, du type (B) et de rang $\dfrac{l}{2}$ si l est pair.

Les espaces irréductibles du type (AI) à courbure négative sont les espaces représentatifs des formes quadratiques définies positives; deux formes qui ne diffèrent que par un facteur sont représentées par le même point. Le groupe G est celui qui indique comment ces formes sont transformées entre elles par les substitutions linéaires effectuées sur les variables.

([1]) E. Cartan, *Annales*, p. 276; la structure unitaire correspond au caractère $1-n^2$ (notations du Mémoire), pour lequel les quantités ε_i sont toutes égales à 1.

([2]) E. Cartan, *Annales*, p. 272.

60. Le second type d'espaces [1], correspondant au caractère $\delta = -2-l$, n'existe que pour l impair. Nous désignerons par α, β les indices impairs, par α', β' les indices pairs qui les suivent immédiatement.

(A II)

$i(X_{\alpha\alpha} - X_{\alpha'\alpha'})$ $X_{\alpha\alpha'} - X_{\alpha'\alpha}$ $i(X_{\alpha\alpha'} + X_{\alpha'\alpha})$ $X_{\alpha\beta} + X_{\alpha'\beta'} - X_{\beta\alpha} - X_{\beta'\alpha'}$ $i(X_{\alpha\beta} - X_{\alpha'\beta'} + X_{\beta\alpha} - X_{\beta'\alpha'})$ $X_{\alpha\beta'} - X_{\alpha'\beta} + X_{\beta\alpha'} - X_{\beta'\alpha}$ $i(X_{\alpha\beta'} + X_{\alpha'\beta} + X_{\beta\alpha'} + X_{\beta'\alpha})$
$i(X_{\alpha\alpha} + X_{\alpha'\alpha'})$ $X_{\alpha\beta} - X_{\alpha'\beta'} - X_{\beta\alpha} + X_{\beta'\alpha'}$ $i(X_{\alpha\beta} + X_{\alpha'\beta'} + X_{\beta\alpha} + X_{\beta'\alpha'})$ $X_{\alpha\beta'} + X_{\alpha'\beta} - X_{\beta\alpha'} - X_{\beta'\alpha}$ $i(X_{\alpha\beta'} - X_{\alpha'\beta} - X_{\beta\alpha'} + X_{\beta'\alpha})$
$\delta = -l-2, \qquad r = \dfrac{(l+1)(l+2)}{2}, \qquad n = \dfrac{(l-1)(l+2)}{2}$
$\lambda = \dfrac{l+1}{2}, \qquad \Gamma = g_2(C_\lambda)$

61. La seconde catégorie de structures réelles du type (A) donne le tableau suivant [2] :

(A III)

$X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}, \quad i(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}), \quad iX_{\alpha\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, p)$ $X_{\lambda\mu} - X_{\mu\lambda}, \quad i(X_{\lambda\mu} + X_{\mu\lambda}), \quad iX_{\lambda\lambda}$ $(\lambda, \mu = p+1, \ldots, l+1)$
$X_{\alpha\lambda} - X_{\lambda\alpha}, \quad i(X_{\alpha\lambda} + X_{\lambda\alpha})$
$\delta = 1-(p-q)^2, \qquad r = p^2+q^2-1, \qquad n = 2pq$
$\lambda = p+q-1, \qquad \Gamma = g_1(A_{p-1}) \times g_1(A_{q-1}) \times g_0$

On a désigné par g_0 le groupe à un paramètre $iu\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

[1] E. Cartan, *Annales*, p. 273, formule (11).
[2] E. Cartan, *Annales*, p. 276.

Les espaces du type (A III) sont précisément ceux qui ont été obtenus aux nos 27-29.

Pour $q = 1$, on obtient les espaces hermitiens, elliptiques ou hyperboliques; dans ce cas $p = l$ et l'on a

$$\Gamma = g_1(A_{l-1}) \times g_0.$$

Nous formerons pour ces espaces une classe spéciale, dont le tableau sera

(A IV)	$X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}$, $i(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha})$, $iX_{\alpha\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, l)$
	$X_{\alpha,l+1} - X_{l+1,\alpha}$, $i(X_{\alpha,l+1} + X_{l+1,\alpha})$
	$\delta = 2l - l^2$, $r = l^2$, $n = 2l$
	$\lambda = l$, $\Gamma = g_1(A_{l-1}) \times g_0$

62. Si le rang l du groupe se réduit à l'unité, il ne reste qu'une seule classe d'espaces, avec

$$\delta = 1, \quad n = 2, \quad r = 1;$$

ce sont les plans non euclidiens, elliptique ou hyperbolique. Le groupe d'isotropie est le groupe des rotations autour d'un point fixe dans le plan ordinaire.

Pour $l = 2$, on a deux classes d'espaces irréductibles (A I) et (A IV):

(A I)	$n = 5$,	$r = 3$;
(A IV)	$n = 4$,	$r = 4$.

IV. — Les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles des types (B) et (D) [1].

63. Le groupe unitaire G′ a la structure du groupe d'une forme quadratique définie à $2l+1$ variables (type B) ou $2l$ variables (type D).

Certains groupes réels du type (D) peuvent être réunis à ceux du type (B). En désignant alors par $X_{\alpha\beta}$ les transformations

---

[1] E. CARTAN, *Annales*, p. 277-286.

du groupe orthogonal à $\nu = p + q$ variables, on a le tableau

(BD I)

$X_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, p),$ $X_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu = p+1, \ldots, p+q)$
$X_{\alpha\lambda}$
$r = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2}, \quad n = pq$

Le groupe Γ résulte de la multiplication du groupe orthogonal à p variables par le groupe orthogonal à q variables. On retrouve la classe d'espaces obtenue directement aux n[os] 32-33.

Le cas $q = 1$ est particulièrement remarquable; le groupe Γ devient simple, et les espaces correspondants sont les espaces à courbure constante. Nous leur consacrons un tableau spécial :

(BD II)

$X_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$
$X_{\alpha, n+1}$
$r = \frac{n(n-1)}{2}$

64. Il existe maintenant, pour le type (D), une structure réelle spéciale de caractère $\delta = -l$ (¹). Les transformations réelles de G' étant définies par les relations

$$X_{\alpha\beta} = \overline{X}_{\alpha'\beta'},$$

le tableau qui donne les espaces de ce nouveau type est

(D III)

$iX_{\alpha\alpha'}, \quad X_{\alpha\beta'} + X_{\alpha'\beta}, \quad i(X_{\alpha\beta'} - X_{\alpha'\beta})$
$X_{\alpha\beta} + X_{\alpha'\beta'}, \quad i(X_{\alpha\beta} - X_{\alpha'\beta'})$
$\delta = -l, \quad r = l^2, \quad n = l(l-1)$
$\lambda = l, \quad \Gamma = g_2(A_{l-1}) \times g_0$

(¹) E. CARTAN, *Annales*, p. 285, formule (10).

On a donc, dans ce tableau,

$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, l;$$
$$\alpha', \beta' = -1, -2, \ldots, -l.$$

V. — Les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles du type (C) [1].

65. Les transformations réelles de G' sont définies par

$$X_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \overline{X}_{\alpha'\beta'},$$

où

$$\varepsilon_\alpha = 1 \text{ si } \alpha > 0, \qquad \varepsilon_\alpha = -1, \text{ si } \alpha < 0.$$

On a un premier type réel [2] qui donne le tableau

(C I)

$iX_{\alpha\alpha'}$, $X_{\alpha\beta'} - X_{\alpha'\beta}$, $i(X_{\alpha\beta'} + X_{\alpha'\beta})$
$X_{\alpha\beta} + X_{\alpha'\beta'}$, $i(X_{\alpha\beta} - X_{\alpha'\beta'})$
$\delta = l$, $r = l^2$, $n = l(l+1)$
$\lambda = l$, $\Gamma = g_1^2(A_{l-1}) \times g_0$

Les indices α, β sont positifs, les indices α', β' sont égaux à $-\alpha, -\beta$.

66. Il existe maintenant un autre type dépendant de deux entiers positifs p et q de somme l [3]. Le tableau correspondant est

(C II)

$X_{\alpha\beta} + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta X_{\alpha'\beta'}$, $i(X_{\alpha\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta X_{\alpha'\beta'})$ $(\alpha, \beta = \pm 1, \ldots, \pm p)$ $X_{\lambda\mu} + \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu X_{\lambda'\mu'}$, $i(X_{\lambda\mu} - \varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu X_{\lambda'\mu'})$ $[\lambda, \mu = \pm(p+1), \ldots, \pm l]$
$X_{\alpha\lambda} + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\lambda X_{\alpha'\lambda'}$, $i(X_{\alpha\lambda} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\lambda X_{\alpha'\lambda'})$
$\delta = -l - 2(p-q)^2$, $r = p(2p+1) + q(2q+1)$, $n = 4pq$
$\lambda = l$, $\Gamma = g_1(C_p) \times g_1(C_q)$

Nous retrouvons les espaces obtenus directement aux n^{os} 34-35.

---

[1] E. CARTAN, *Annales*, p. 287-292.
[2] E. CARTAN, *Annales*, p. 290-291.
[3] E. CARTAN, *Annales*, p. 291-292.

VI. — Les espaces $\mathcal{E}$ irréductibles des types exceptionnels.

67. Nous allons nous borner, pour les structures simples des types exceptionnels (E), (F), (G), à indiquer les valeurs de n, de r et la nature du groupe d'holonomie.

Le type (E) de rang 6 donne quatre classes ([1]), à savoir :

(E I) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = 6, \quad r = 36, \quad n = 42 \\ \lambda = 4, \quad \Gamma = g_4(C_4)\end{array}}$

(E II) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = 2, \quad r = 38, \quad n = 40 \\ \lambda = 6, \quad \Gamma = g_3(A_5) \times g_1(A_1)\end{array}}$

(E III) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = -14, \quad r = 46, \quad n = 32 \\ \lambda = 6, \quad \Gamma = g_1(D_5) \times g_0\end{array}}$

(E IV) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = -26, \quad r = 52, \quad n = 26 \\ \lambda = 4, \quad \Gamma = g_1(F)\end{array}}$

Le type (E) de rang 7 donne trois classes ([2]), à savoir :

(E V) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = 7, \quad r = 63, \quad n = 70 \\ \lambda = 7, \quad \Gamma = g_4(A_7)\end{array}}$

(E VI) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = -5, \quad r = 69, \quad n = 64 \\ \lambda = 7, \quad \Gamma = g_1(D_6) \times g_1(A_1)\end{array}}$

(E VII) $\boxed{\begin{array}{c}\delta = -25, \quad r = 79, \quad n = 54 \\ \lambda = 7, \quad \Gamma = g_1(E_6) \times g_0\end{array}}$

([1]) E. Cartan, *Annales*, p. 298-313.
([2]) E. Cartan, *Annales*, p. 313-328.

Enfin le type (E) de rang 8 donne deux classes ([1]), à savoir :

(E VIII)
$$\boxed{\begin{array}{c} \delta = 8, \quad r = 120, \quad n = 128 \\ \lambda = 8, \quad \Gamma = g_1(D_8) \end{array}}$$

(E IX)
$$\boxed{\begin{array}{c} \delta = -24, \quad r = 136, \quad n = 112 \\ \lambda = 8, \quad \Gamma = g_1(E_7) \times g_1(A_1) \end{array}}$$

68. Le type (F) de rang 4 donne naissance à deux classes ([2]) d'espaces $\mathcal{E}$ irréductibles, à savoir :

(F I)
$$\boxed{\begin{array}{c} \delta = 4, \quad r = 24, \quad n = 28 \\ \lambda = 4, \quad \Gamma = g_3(C_3) \times g_1(A_1) \end{array}}$$

(F II)
$$\boxed{\begin{array}{c} \delta = -20, \quad r = 36, \quad n = 16 \\ \lambda = 4, \quad \Gamma = g_1(B_4) \end{array}}$$

Enfin le type (G) de rang 2 donne une classe ([3]) d'espaces $\mathcal{E}$ irréductibles, à savoir :

(G)
$$\boxed{\begin{array}{c} \delta = 2, \quad r = 6, \quad n = 8 \\ \lambda = 2, \quad \Gamma = g_1^3(A_1) \times g_1(A_1) \end{array}}$$

69. On remarquera que les groupes Γ qui, au n° 37, ont été désignés comme appartenant au type II, ne se présentent que pour les espaces des types exceptionnels, à savoir :

E II, E VI, E IX, F I et G.

Les groupes désignés comme appartenant au type III se présentent pour les espaces des types

A IV, D III, C I, E III, E VII.

([1]) E. Cartan, *Annales*, p.328-343.
([2]) E. Cartan, *Annales*, p. 343-352.
([3]) E. Cartan, *Annales*, p. 292-298.

Enfin les groupes désignés comme appartenant au type I se présentent pour les espaces des types

(A I), (A II), (BD II), (E I), (E IV), (E V), (E VIII), (F II).

Les classes générales

(A I,) (A II), (A IV), (BD II), (D III), (C I)

dépendent d'un entier arbitraire; les classes

(A III), (BD I), (C II)

dépendent de deux entiers arbitraires.

VII. — Les variétés totalement géodésiques des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles.

70. Tout espace $\mathcal{E}$ irréductible pouvant être, comme nous l'avons vu (n° 52), regardé comme une variété totalement géodésique de l'espace représentatif de son groupe des déplacements G, la recherche des variétés totalement géodésiques de $\mathcal{E}$ revient à celle des variétés totalement géodésiques de l'espace représentatif de G. En nous appuyant sur les résultats indiqués dans un autre Mémoire, cette recherche revient au fond à trouver $\nu < n$ combinaisons linéaires indépendantes

$$\Xi_1 f, \quad \Xi_2 f, \quad \ldots, \quad \Xi_\nu f$$

de $X_1 f, \ldots, X_n f$, telles que les quantités

$$\big(\Xi_i(\Xi_j \Xi_k)\big)$$

soient des combinaisons linéaires des $\Xi_i f$.

Ces variétés totalement géodésiques, considérées en elles-mêmes, sont des espaces de Riemann dont la courbure se conserve par le transport parallèle, mais ce ne sont pas nécessairement des espaces irréductibles. Il est facile de montrer que, si $n > 3$, tout espace $\mathcal{E}$ irréductible contient une infinité de variétés totalement géodésiques à deux dimensions, qui sont du reste à courbure constante. En tout cas on voit que la recherche des variétés totalement géodésiques d'un espace $\mathcal{E}$ se ramène à un problème d'algèbre dépendant uniquement de la structure du groupe simple des déplacements de l'espace.

71. On peut encore se poser différents problèmes, entre autres celui de la recherche des transformations géodésiques d'un espace $\mathcal{E}$ irréductible. Si l'espace n'est pas de la classe BD II, les seules transformations géodésiques sont les transformations isométriques, et deux espaces qui admettent une représentation géodésique l'un sur l'autre appartiennent nécessairement à la même classe. On pourait de même étudier les transformations conformes et l'on arriverait à des conclusions analogues.

Ajoutons enfin que tous les espaces irréductibles obtenus sont susceptibles de définitions géométriques directes, analogues à celle que nous avons donnée pour le type (A I). Il suffit d'avoir une interprétation géométrique d'un groupe *particulier* G d'une structure simple réelle donnée et de partir d'un être géométrique invariant par le sous-groupe Γ du groupe G et par ce sous-groupe seul. Les êtres géométriques qui se déduisent de celui-là par les différentes transformations de G peuvent être considérés comme les différents éléments ou points d'un espace, qui est précisément un des espaces $\mathcal{E}$ irréductibles attachés à cette structure. C'est surtout pour les classes générales qu'une telle définition est intéressante et est susceptible de donner des résultats géométriques fructueux.