Bulletin de la S. M. F.

E. Goursat

Sur la méthode de Weingarten pour le problème de la déformation des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 5-38
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__5_0>

SUR LA MÉTHODE DE WEINGARTEN POUR LE PROBLÈME DE LA DÉFORMATION DES SURFACES;

PAR M. E. GOURSAT.

On doit à Weingarten ([1]) une « méthode singulière » pour la détermination des surfaces admettant un élément linéaire donné, par laquelle il ramène le problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre tout à fait différente des équations classiques de Bour et de Bonnet. Cette méthode a permis de résoudre le problème dans un nombre illimité de cas nouveaux, et il semble résulter de recherches récentes que ce sont les seuls cas où le problème admette une solution générale de la première classe. Weingarten n'a pas indiqué les idées qui l'avaient guidé, et l'on en est réduit sur ce point aux conjectures. En exposant les résultats obtenus par cette nouvelle méthode ([2]), G. Darboux a indiqué une interprétation géométrique où interviennent les droites isotropes.

Quelques années plus tard, dans un Mémoire ([3]) couronné par l'Académie des Sciences en 1894, Weingarten faisait connaître, toujours sans aucune indication sur la suite de ses idées, une méthode beaucoup plus générale en apparence que la première. En exposant cette méthode dans le dernier Chapitre ([4]) de son grand Ouvrage, G. Darboux a donné la signification géométrique

([1]) J. WEINGARTEN, *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée; Extrait d'une lettre à M. Darboux* (*Comptes rendus*, t. 112, p. 607 et 706, 1891).

Voir aussi mon Mémoire *Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. 5; 1891).

([2]) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3, p. 308-337, 1896.

([3]) JULIUS WEINGARTEN, *Sur la déformation des surfaces* (*Acta mathematica*, t. 20, p. 159-200, 1896).

([4]) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, p. 338-352, 1896.

du principe de la méthode et de la transformation qui lui sert de base. Malgré les remarques de G. Darboux, cette méthode présentait encore un côté un peu mystérieux, que j'ai essayé d'éclaircir. Je montre dans ce Mémoire comment on est conduit naturellement à la transformation de Weingarten par l'étude d'un problème très simple de Géométrie, analogue par exemple aux problèmes de Bäcklund qui se rattachent à la théorie des surfaces à courbure constante. J'arrive aussi à cette conclusion que toutes les équations que l'on peut obtenir par l'application de la méthode générale de Weingarten se ramènent à une seule par des transformations de contact. Le dernier Mémoire de Weingarten ne constitue donc pas un moyen d'investigation plus puissant que ses notes de 1891; il permet cependant d'éviter, si l'on veut, l'introduction des imaginaires dans l'étude de la déformation de surfaces réelles.

J'ai indiqué sommairement les résultats de ce travail dans une Note présentée à l'Académie des Sciences [1].

1. Soit S une surface admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{1}$$

où E, F, G sont des fonctions données des paramètres u, v. A chaque point m (u, v) de cette surface associons le trièdre T qui a pour sommet ce point m, et pour arêtes les tangentes aux deux courbes (u) et (v) qui passent par ce point et la normale à S. On peut, d'une façon tout à fait arbitraire, associer à chaque point m de S un autre point μ invariablement lié au trièdre T quand la surface se déforme en entraînant ce trièdre. Par un point fixe de l'espace, l'origine par exemple, menons un vecteur OM, équipollent au vecteur $m\mu$. Lorsque le point m décrit la surface S, le point M décrit une surface Σ admettant en M une normale MN; soit mn la parallèle à cette normale menée par le point m. Nous allons d'abord rechercher s'il est possible de déterminer le point μ invariablement lié au trièdre T de façon que la droite mn soit

(1) E. Goursat, *Sur quelques équations aux dérivées partielles de la théorie de la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. 180, p. 1303, 1925).

elle-même invariablement liée au trièdre T dans une déformation de S.

Pour abréger, nous appellerons *déformation* l'opération qui consiste à remplacer la surface S par une autre surface S′ admettant le même élément linéaire (1), en faisant correspondre les points m, m' des deux surfaces de mêmes coordonnées curvilignes (u, v). On sait d'ailleurs que l'on ne peut pas toujours passer de S à S′ par une suite continue de déformations, au sens physique du mot. Dans la suite des énoncés, on peut aussi remplacer la déformation de la surface S par le roulement de cette surface sur une surface applicable S′, de façon que le point de contact admette sur chaque surface les mêmes coordonnées (u, v), les éléments linéaires en coïncidence se correspondant de la même façon. Dans ce mouvement de roulement, chaque trièdre T est entraîné avec son sommet ; à chaque surface S′ applicable sur S correspond une surface Σ′ déduite de S′ par la même construction que Σ se déduit de S.

Analytiquement, le problème à résoudre est le suivant. Les coordonnées du point M ont des expressions de la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + c\gamma, \\ Y &= a\frac{\partial y}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial v} + c\gamma', \\ Z &= a\frac{\partial z}{\partial u} + b\frac{\partial z}{\partial v} + c\gamma'', \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées, par rapport au même système d'axes, du point m de S, γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de la normale à S, et a, b, c des fonctions de (u, v) qui définissent la liaison entre le point μ et le trièdre T de sommet m. Il s'agit de reconnaître si l'on peut choisir ces fonctions a, b, c, de façon que les paramètres directeurs de la normale à la surface Σ décrite par M aient aussi des expressions de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + C\gamma, \\ \mu &= A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\gamma', \\ \nu &= A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} + C\gamma''. \end{aligned}\right.$$

A, B, C ne dépendant que de a, b, c, E, F, G. Ces paramètres directeurs λ, μ, ν sont déterminés, à un facteur près, par les conditions

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial X}{\partial u}+\mu\frac{\partial Y}{\partial u}+\nu\frac{\partial Z}{\partial u}=0,\\ &\lambda\frac{\partial X}{\partial v}+\mu\frac{\partial Y}{\partial v}+\nu\frac{\partial Z}{\partial v}=0;\end{aligned}\right.$$

en tenant compte des relations classiques

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E, \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=F, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=G,\\ &S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\\ &S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},\\ &S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

et des conditions $S\gamma\frac{\partial x}{\partial u}=0$, $S\gamma\frac{\partial x}{\partial v}=0$, d'où l'on tire

$$S\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=-S\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad S\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=S\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=-S\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v},$$
$$S\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}=-S\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2};$$

les relations (4) développées deviennent

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial a}{\partial u}E+\frac{Aa}{2}\frac{\partial E}{\partial u}+A\frac{\partial b}{\partial u}F+\frac{Ab}{2}\frac{\partial E}{\partial v}-AcS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\ &\quad+B\frac{\partial a}{\partial u}F+Ba\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)+B\frac{\partial b}{\partial u}G\\ &\quad+\frac{Bb}{2}\frac{\partial G}{\partial u}-BcS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+aCS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+bCS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+C\frac{\partial c}{\partial u}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial a}{\partial v}E+\frac{Aa}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+A\frac{\partial b}{\partial v}F+Ab\left[\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right]-AcS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\\ &\quad+B\frac{\partial a}{\partial v}F+\frac{Ba}{2}\frac{\partial G}{\partial u}+B\frac{\partial b}{\partial v}G+\frac{Bb}{2}\frac{\partial G}{\partial v}-BcS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\\ &\qquad\qquad+aCS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+bCS\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+C\frac{\partial c}{\partial v}=0.\end{aligned}$$

Les seuls termes qui varient quand on remplace S par une surface applicable sont les termes qui contiennent

$$S\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad S\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad S\gamma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2};$$

pour que ces termes disparaissent, il faut et il suffit que l'on ait

$$Ac - aC = 0, \quad bC - Bc = 0.$$

Si c n'est pas nul, on déduit de ces conditions

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c},$$

de sorte que les paramètres directeurs de la normale en M sont proportionnels aux coordonnées du point M. La normale en M doit donc coïncider avec le rayon OM, et la surface Σ est une sphère de centre O. Nous laissons de côté cette solution banale, évidente *a priori*, qui correspond au cas où la distance $m\mu$ est constante.

Ce cas singulier écarté, on voit que c et C doivent être nuls à la fois. *La droite* OM *doit donc être parallèle au plan tangent en* m *à la surface* S, *et les plans tangents aux deux surfaces* S *et* Σ *aux points* m *et* M *doivent être orthogonaux.*

2. Nous sommes donc conduits à traiter le problème suivant. A chaque point M de la surface S associons une droite Δ tangente à S en ce point, et faisant avec les courbes coordonnées (u) et (v) qui passent par ce point des angles qui ne varient pas quand on remplace la surface S par une surface applicable sur S. Nous dirons, pour abréger, que la surface entraîne ces droites dans sa déformation. Les paramètres directeurs de la droite Δ qui est tangente en m à la surface S ont pour expressions

$$(6) \qquad a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}, \quad a\frac{\partial y}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial v}, \quad a\frac{\partial z}{\partial u} + b\frac{\partial z}{\partial v},$$

a et b étant des fonctions des paramètres u, v, dont le rapport définit la congruence de droites que nous considérons. A chaque point m de S faisons ensuite correspondre un point M de la parallèle menée par l'origine à la droite Δ qui est tangente en m à S.

Nous allons montrer qu'on peut choisir, et d'une infinité de manières, la distance OM, de façon que la normale à la surface Σ décrite par M soit parallèle au plan tangent en m à la surface S. La propriété que l'on veut établir est évidemment indépendante du choix des courbes coordonnées. Les calculs se simplifient si l'on prend pour l'une des familles de courbes coordonnées, les courbes (u) par exemple, les arêtes de rebroussement situées sur S des développables de la congruence. Ceci suppose que l'on connaît ces arêtes de rebroussement, c'est-à-dire que l'on a intégré l'équation différentielle $b\,du - a\,dv = 0$. On emploiera souvent ce système de coordonnées pour démontrer certaines propriétés, mais on peut établir la proposition générale sans qu'il soit nécessaire de choisir un système particulier de coordonnées.

Les coordonnées d'un point M de la droite menée par l'origine parallèlement à Δ sont

$$(7)\qquad \begin{cases} X = \lambda\left(a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \\ Y = \lambda\left(a\dfrac{\partial y}{\partial u} + b\dfrac{\partial y}{\partial v}\right), \\ Z = \lambda\left(a\dfrac{\partial z}{\partial u} + b\dfrac{\partial z}{\partial v}\right), \end{cases}$$

λ étant une fonction de (u, v) qu'il s'agit de déterminer de façon que la normale à la surface Σ décrite par ce point soit parallèle au plan tangent en m à S. Les paramètres directeurs de cette normale doivent donc être de la forme

$$c = l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad c' = l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad c'' = l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v},$$

et la condition d'orthogonalité

$$c\,dX + c'\,dY + c''\,dZ = 0$$

ou

$$S\left(l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left[\left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}\right)d\lambda + \lambda d\left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] = 0$$

donne deux relations distinctes en égalant à zéro les coefficients de du et de dv. En tenant compte des équations (5), ces conditions s'écrivent

$$(8)\quad \begin{cases} l\left[(a\mathrm{E}+b\mathrm{F})\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\left(\mathrm{E}\dfrac{\partial a}{\partial u}+\mathrm{F}\dfrac{\partial b}{\partial u}+\dfrac{a}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}+\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)\right] \\ \quad +m\left\{(a\mathrm{F}+b\mathrm{G})\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\left[\mathrm{F}\dfrac{\partial a}{\partial u}+\mathrm{G}\dfrac{\partial b}{\partial u}+a\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)+\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right]\right\}=0, \\ l\left\{(a\mathrm{E}+b\mathrm{F})\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}+\lambda\left[\mathrm{E}\dfrac{\partial a}{\partial v}+\mathrm{F}\dfrac{\partial b}{\partial v}+\dfrac{a}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}+b\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)\right]\right\} \\ \quad +m\left[(a\mathrm{F}+b\mathrm{G})\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}+\lambda\left(\mathrm{F}\dfrac{\partial a}{\partial v}+\mathrm{G}\dfrac{\partial b}{\partial v}+\dfrac{a}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}+\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\right)\right]=0. \end{cases}$$

L'élimination du rapport $\frac{l}{m}$ conduit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont les coefficients ne dépendent que de E, F, G, a, b. Si $\lambda(u, v)$ est une intégrale de cette équation, les formules (7) donnent une solution du problème proposé, et le rapport $\frac{l}{m}$ conserve aussi la même valeur quand on remplace la surface S par une surface admettant le même élément linéaire. La parallèle à la normale en M à Σ menée par le point m est donc invariablement liée au trièdre T dans une déformation de S.

Si l'on prend pour inconnue la distance OM

$$\rho=\lambda\sqrt{\mathrm{E}a^2+2\mathrm{F}ab+\mathrm{G}b^2},$$

on trouve, après quelques simplifications, que ρ doit satisfaire à l'équation

$$(9)\qquad \mathrm{L}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\mathrm{M}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0,$$

les coefficients L et M ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}= {} & (a\mathrm{F}+b\mathrm{G})\left\{\mathrm{E}\frac{\partial a}{\partial v}+\mathrm{F}\frac{\partial b}{\partial v}+\frac{a}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}+b\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)\right\} \\ & -(a\mathrm{E}+b\mathrm{F})\left\{\mathrm{F}\frac{\partial a}{\partial v}+\mathrm{G}\frac{\partial b}{\partial v}+\frac{a}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}+\frac{b}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\right\}, \\ \mathrm{M}= {} & (a\mathrm{E}+b\mathrm{F})\left\{\mathrm{F}\frac{\partial a}{\partial u}+\mathrm{G}\frac{\partial b}{\partial u}+a\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)+\frac{b}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right\} \\ & -(a\mathrm{F}+b\mathrm{G})\left\{\mathrm{E}\frac{\partial a}{\partial u}+\mathrm{F}\frac{\partial b}{\partial u}+\frac{a}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}+\frac{b}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right\}. \end{aligned}$$

On pouvait prévoir *a priori* qu'en prenant pour inconnue la distance $\rho=\mathrm{OM}$ on obtiendrait une équation ne contenant pas de terme en ρ. En effet, si ρ est constant, la surface Σ est une sphère de centre O, et la normale à cette sphère, c'est-à-dire le rayon OM est bien parallèle au plan tangent en m à la surface S.

L'intégration de l'équation (9) se ramène elle-même à l'intégration de l'équation différentielle

$$M\,du - L\,dv = 0\,; \tag{10}$$

si $\psi(u, v) =$ const. représente l'intégrale générale de cette équation, l'intégrale générale de l'équation (9) est une fonction arbitraire de $\psi(u, v)$. On prévoit par là le rôle important que vont jouer dans la question les courbes intégrales de l'équation (10). Ces courbes dépendent évidemment de la congruence de droites considérée ; nous les appellerons pour abréger les courbes (K) de la congruence. Le résultat obtenu peut alors s'énoncer ainsi :

Par l'origine O *on mène une droite parallèle à la droite* Δ *de la congruence qui est tangente en* m *à la surface* S, *et l'on porte sur cette droite une longueur* OM *qui reste constante quand le point m décrit une courbe* (K) *et qui varie suivant une loi arbitraire quand on passe d'une courbe* (K) *à une autre.*

Les surfaces Σ obtenues par cette construction sont telles que le plan tangent en M à Σ et le plan tangent en m à S sont orthogonaux. Quand la surface S se déforme en entraînant les droites de la congruence, les courbes (K) sont conservées, mais les surfaces Σ varient de forme et de position. Nous verrons un peu plus loin que toutes ces surfaces Σ sont les surfaces intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, ne dépendant que de l'élément linéaire considéré.

Si la congruence est formée des droites tangentes aux courbes coordonnées $u =$ const., on peut prendre $a = 0$, $b = 1$, et les équations (8) et (9) deviennent

$$\tag{8'} \left\{ \begin{aligned} & l\left(F\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) + m\left(G\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0, \\ & l\left[F\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right] + m\left(G\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{9'} \left[2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v}\right]\frac{\partial\rho}{\partial u} + \left[F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right]\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

3. Les courbes (K) sont identiques aux courbes introduites par G. Darboux dans l'interprétation géométrique de la méthode générale de Weingarten, et qu'il désigne par cette notation. Ce sont *les*

lignes de striction situées sur S *des surfaces réglées engendrées par les droites de la congruence.*

Il est facile de le déduire sans aucun calcul des résultats qui précèdent. Soit en effet (K) une courbe intégrale de l'équation (10). A cette courbe (K) de S correspond, d'après la construction qui vient d'être établie, une courbe Γ située sur une sphère de centre O. Soient m et M deux points correspondants de S et de Σ sur ces deux courbes ; la normale en M à Σ étant perpendiculaire à la tangente MT à la courbe Γ est située dans le plan normal OMN à cette courbe, plan qui contient aussi la droite OM. Il s'ensuit que ce plan normal est parallèle au plan tangent en m à S, puisqu'il contient deux droites parallèles à ce plan tangent. D'autre part, lorsque m décrit la courbe (K), la droite Δ de la congruence tangente en m à S engendre une surface réglée tangente à la surface S en tous les points de (K), et le plan tangent au point à l'infini à la génératrice qui passe au point m est parallèle au plan tangent au cône (T) de sommet O, ayant pour directrice la courbe Γ, c'est-à-dire au plan OMT. Les deux plans OMN et OMT étant rectangulaires, il s'ensuit que le point m est le point central de la génératrice qui passe par ce point. La courbe (K) est donc la ligne de striction de la surface réglée engendrée par ces droites.

Inversement, supposons qu'une courbe (K') de S soit la ligne de striction de la surface réglée engendrée par les droites de la congruence tangentes à la surface S aux différents points de cette courbe. Si par un point fixe O de l'espace on mène des parallèles aux génératrices de cette surface réglée, sur lesquelles on porte une longueur constante l, cette construction fait correspondre au point m de (K') un point M d'une courbe sphérique Γ, et le raisonnement précédent prouve que le plan normal en M à Γ est parallèle au plan tangent en m à S, puisque ce point m est le point central de la génératrice qui passe par ce point. Toute surface Σ passant par la courbe Γ aura un plan tangent passant par la tangente MT à Γ, et par suite orthogonal au plan tangent en m à S. La courbe (K') est donc une courbe intégrale de l'équation (10).

Le raisonnement qui précède suppose que la surface réglée engendrée par les droites de la congruence tangentes à S aux différents points de (K) n'est pas une surface développable ayant cette courbe (K) pour arête de rebroussement. Pour voir si ce cas peut se présenter, supposons que l'on ait pris pour courbes (u) les arêtes de rebroussement des développables de la congruence situées sur S. Pour que ces courbes (u) soient en même temps les courbes (K) correspondant à cette congruence, il faut et il suffit, d'après l'équation $(9')$, que les coefficients E, F, G vérifient la relation

$$2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v} = 0. \tag{11}$$

Or cette condition exprime que les courbes $u =$ const. forment une famille de géodésiques [G. Darboux, t. II, p. 403, *formule* (8)]. On en déduit aisément une construction des surfaces Σ connaissant une famille de géodésiques de S, construction qui peut aussi s'établir par la géométrie. Soit en effet g une ligne géodésique de S ; à chaque point m de g faisons correspondre un point M obtenu en menant par un point fixe O de l'espace une parallèle à la tangente en m à g sur laquelle on porte une longueur constante $OM = l$. Le lieu du point M est encore une courbe sphérique Γ et le plan tangent au cône τ de sommet O ayant Γ pour directrice suivant OM est parallèle au plan osculateur en m à la courbe g. Cette courbe g étant une ligne géodésique, il s'ensuit que ce plan contient la parallèle à la normale mn à S au point m menée par M, et, comme cette parallèle doit être perpendiculaire à OM, elle coïncide avec la tangente MT à Γ au point M. Toute surface passant par Γ aura donc son plan tangent en M orthogonal au plan tangent en m à la surface S.

Les raisonnements géométriques qui précèdent supposent aussi que le point de coordonnées (X, Y, Z) décrit une surface Σ et non une courbe. Pour examiner tous les cas, cherchons s'il est possible que ce point M décrive une courbe Γ et non une surface, quand on prend pour ρ une intégrale particulière de l'équation (9). S'il en est ainsi, il existe sur S une famille de courbes, dont chacune correspond à un point de Γ. Si l'on a pris ces courbes pour les courbes (v), on aura

$$X = \lambda\left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}\right) = f(v),$$

$$Y = \lambda\left(a\frac{\partial y}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial v}\right) = g(v),$$

$$Z = \lambda\left(a\frac{\partial z}{\partial u} + b\frac{\partial z}{\partial v}\right) = h(v),$$

et par suite $\rho^2 = f^2(v) + g^2(v) + h^2(v)$. Les courbes (v) sont donc identiques aux courbes (K). On voit d'autre part que, le long d'une de ces courbes, les rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$ restent constants, et par suite les droites de la congruence restent parallèles. Les courbes (K) sont donc les courbes de contact d'une famille de cylindres circonscrits à S, et la congruence est formée des génératrices de ces cylindres. Ce résultat est bien d'accord avec le théorème général; en effet les surfaces réglées circonscrites suivant les courbes (K) sont des cylindres, dont la ligne de striction est indéterminée.

Cherchons encore si les courbes (K) correspondant à une congruence de droites peuvent être indéterminées. Si l'on a pris pour courbes (u) les arêtes de rebroussement des développables de la congruence situées sur S, les coefficients de $\frac{\partial \rho}{\partial u}$ et de $\frac{\partial \rho}{\partial v}$ dans l'équation $(9')$ doivent être nuls. La première condition exprime que les courbes (u) sont des lignes géodésiques ; si l'on a pris pour les courbes (v) leurs trajectoires orthogonales, on peut supposer $G = 1$, $F = 0$. Le coefficient de $\frac{\partial \rho}{\partial v}$ devant être nul aussi, on a $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, et le ds^2 est de la forme $du^2 + dv^2$. *La surface* S *est donc une surface développable, et la congruence est formée par les tangentes à une famille de géodésiques parallèles.*

Quelle que soit la famille de courbes que l'on prenne sur S pour les courbes (K), on vérifie facilement que la surface Σ est un cône (T′) engendré par une droite, passant par l'origine, du plan tangent au cône directeur (T) de S, lorsque ce plan roule sans glisser sur le cône (T). On verra de même que les équations (7), qui déterminent l et m sont indéterminées dans le cas considéré si l'on prend en outre $\rho = \text{const.}$ La surface Σ se réduit alors à une courbe sphérique du cône (T′).

4. Quand on se donne la congruence de droites, c'est-à-dire les fonctions a et b, ou leur rapport $\frac{b}{a}$, la détermination des courbes (K) exige l'intégration de l'équation (9). Si l'on connaît une surface S admettant l'élément linéaire donné, on peut choisir, d'une infinité de façons, une congruence de droites tangentes à S dont les courbes (K) se déterminent sans aucune intégration. Si l'on prend par exemple les tangentes parallèles aux génératrices d'un cône choisi arbitrairement, les courbes (K) seront les courbes de contact de S avec les cylindres circonscrits dont les génératrices sont parallèles à une génératrice du cône. On obtient la solution la plus simple en prenant la congruence des tangentes parallèles à un plan P; les courbes (K) sont les courbes conjuguées des sections planes dont le plan est parallèle à P. C'est cette congruence qui a été utilisée par J. Weingarten dans ses premières notes.

Plus généralement, considérons, en même temps que S, une autre surface *quelconque* Σ, et par un point fixe O menons un plan parallèle au plan tangent en m à la surface S. Soit σ la courbe d'intersection de ce plan avec Σ; sur cette courbe σ il existe en général un ou plusieurs points où le plan tangent est perpendiculaire au plan précédent. Soit M un de ces points ; en faisant correspondre le point M de Σ au point m de S nous obtenons une solution du problème posé au n° 1. La droite de la congruence qui passe en m est parallèle à la droite OM, et les lignes de striction (K) situées sur S des surfaces réglées de cette congruence correspondent aux courbes d'intersection de Σ avec les sphères de centre O.

Si l'on connaît seulement l'élément linéaire (1), il ne semble pas facile de choisir $\frac{b}{a}$ de façon que l'équation (9) soit intégrable. Mais *si l'on se donne les courbes* (K) *elles-mêmes, on peut toujours, par une quadrature, déterminer les congruences de droites correspondantes.* Cette proposition joue un rôle essentiel dans le Mémoire de J. Weingarten. La démonstration ci-dessous ne diffère pas au fond de la démonstration donnée par Darboux (*loc. cit.*, t. IV, p. 342 et suivantes).

Nous chercherons d'abord l'interprétation de la condition

$$F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \tag{12}$$

qui exprime que les courbes (v) sont les courbes (K) relatives à la congruence formée par les tangentes aux courbes (u) (formule 9'). Pour cela, il suffit de se reporter à la formule qui donne la courbure géodésique des courbes (v) (G. Darboux, t. II, p. 403)

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u}}{2E\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}}. \tag{13}$$

Soit α l'angle des courbes coordonnées (u) et (v), c'est-à-dire l'angle que fait la droite de la congruence qui passe en un point m de la surface avec la courbe (K) qui passe au même point. De la formule

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

on tire

$$-\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{2EG\dfrac{\partial F}{\partial u} - FG\dfrac{\partial E}{\partial u} - EF\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG)^{\frac{3}{2}}};$$

ou encore, en tenant compte de la relation (12),

$$-\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial E}{\partial u}}{2E^{\frac{3}{2}}\sqrt{G}}.$$

En rapprochant les formules qui donnent $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$ et $\frac{1}{\rho_g}$, on a immédiatement

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{\rho_g};$$

si l'on considère α comme une fonction de l'arc s de la courbe (K), on a encore

$$(14)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{1}{\rho_g}.$$

Les courbes (K) étant données, ρ_g est une fonction connue de u et de v et l'angle α est donné par une quadrature

$$(15)\qquad \alpha = \int_{s_0}\frac{ds}{\rho_g} + C,$$

la constante C variant arbitrairement quand on passe d'une courbe (K) à une autre. On voit donc que si l'on se donne une famille de courbes définies par une relation $\varphi(u, v) = \text{const.}$, on peut, par une quadrature, en déduire toutes les congruences de droites pour lesquelles les courbes données sont les courbes (K). Ces congruences dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable, et si l'on connaît l'une d'elles, on peut en déduire toutes les autres par la construction suivante :

On fait tourner la droite Δ de la congruence connue, qui est tangente en m à S, d'un angle Θ autour de la normale en *ce point, cet angle Θ restant constant lorsque le point m décrit une courbe* (K), *et variant suivant une loi arbitraire quand on passe d'une courbe* (K) *à une autre.*

On vérifiera aisément ce résultat en se reportant à la construction des surfaces Σ, connaissant les courbes (K).

En particulier, si l'on connaît une famille de lignes géodésiques de l'élément linéaire (1), on peut les prendre pour les courbes (K) de la congruence cherchée. On a dans ce cas ρ_g infini, et par suite $\alpha =$ const. le long d'une de ces lignes. On prendra donc une congruence de droites tangentes à S et coupant sous le même angle chacune de ces géodésiques, cet angle variant arbitrairement d'une géodésique à l'autre. Si cet angle est nul, on obtient la congruence formée par les tangentes à ces géodésiques (n° 3).

5. Considérons en particulier le cas d'une surface S développable, et soit (K) une famille de courbes situées sur cette surface. Pour obtenir une congruence de droites tangentes à S, et dont les courbes (K) soient les lignes de striction, appliquons la surface S sur un plan, et soient (K') les courbes planes sur lesquelles viennent s'appliquer les courbes (K) après le développement de S sur le plan. Par chaque point m' du plan menons une droite qui reste parallèle à elle-même lorsque le point m' décrit une courbe (K'), et dont la direction varie arbitrairement quand on passe d'une courbe (K') à une autre. Les droites tangentes à S qui viennent s'appliquer sur les droites du plan ainsi déterminées forment une congruence admettant les courbes (K) comme lignes de striction.

La même méthode permet de résoudre le problème inverse. Étant donnée une congruence de droites tangentes à une développable S, après l'application de S sur un plan, à chaque point m' du plan correspond une droite issue de ce point. On aura les courbes (K'), images des courbes (K) de S en joignant les points du plan pour lesquels les droites issues de ces points sont parallèles. On peut remarquer que le problème est indéterminé si les droites du plan qui correspondent aux droites de la congruence sont parallèles à une même droite, c'est-à-dire si la congruence donnée est formée par les tangentes à une famille de géodésiques parallèles de S (*cf.* n° 3).

Les surfaces Σ qui correspondent à une surface développable S par la construction générale expliquée plus haut (n° 2) *sont des surfaces de Monge*. En effet, les courbes C de Σ qui sont les images des génératrices rectilignes G de S sont des courbes planes dont le plan est parallèle au plan tangent à S le long de G. Lorsque G décrit la surface S, le plan de la courbe C enveloppe le cône directeur (T) de S. Mais en chaque point de Σ, le plan tangent doit être perpendiculaire au plan tangent au point correspondant de S, c'est-à-dire au plan de la courbe C elle-même. Les courbes C sont donc des lignes de courbure de la surface Σ, qui est une surface de Monge engendrée par les diverses positions d'une courbe plane C dont le plan roule sans glisser sur le cône (T).

Inversement, *si la surface Σ est une surface de Monge, la surface* S *est une surface développable*. Soient en effet M et m deux points correspondants de Σ et de S, P le plan de la ligne de courbure plane de Σ passant par M. Le plan tangent en m à S doit être parallèle à OM et orthogonal au plan tangent en M à Σ. Il est donc parallèle au plan P. Le plan tangent en un point quelconque de S est donc parallèle à un plan tangent à un cône ; par suite, S est une surface développable.

Les secondes lignes de courbure d'une surface de Monge sont situées sur des sphères ayant pour centre l'origine, et par conséquent sont les images des courbes (K) de S relatives à la congruence considérée. Le long de l'une de ces lignes de courbure sphériques, la surface Σ et la sphère se coupent sous un angle constant. Si donc par un point m de S on mène la parallèle à la normale à Σ au point correspondant, cette droite coupe la droite de la congruence qui est tangente en m à S sous un angle θ qui reste constant lorsque le point m décrit une courbe (K). Réciproquemment, si cet angle θ reste constant lorsque le point m décrit une courbe (K) de S, la surface Σ coupe sous un angle constant la sphère qui contient l'image de (K). Cette surface Σ est donc une surface de Monge. Les courbes (K) étant choisies, il existe une relation déterminée entre l'angle θ que fait la normale à Σ en un point M et la distance $OM = \rho$, et par suite une relation de forme déterminée entre la distance ρ et la distance de l'origine au plan tangent en M. Cette relation détermine la forme de la courbe plane C dont les positions successives engendrent la surface Σ, mais le plan sur lequel roule le plan de la courbe C reste arbitraire.

6. Supposons que l'on connaisse une solution $\rho(u, v)$ de l'équation (9), dont les coefficients dépendent de E, F, G et du rapport $\frac{b}{a}$ qui détermine la congruence de droites considérée. L'intégration de cette équation (9) fait connaître les courbes (K) correspondantes, et les relations compatibles (8) donnent ensuite le rapport $\frac{l}{m}$. A chaque surface S admettant l'élément linéaire (1) les formules (7) font correspondre une surface Σ pouvant, dans certains cas qui ont été précisés, se réduire à une courbe. Les coefficients angulaires P, Q du plan tangent à cette surface Σ sont donnés par les relations

$$(16) \qquad \frac{P}{l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{Q}{l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{-1}{l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v}} = \mu;$$

des combinaisons faciles donnent deux nouvelles expressions de la valeur commune de ces rapports, en tenant compte des formules (2), (3), (5),

$$(17) \qquad \mu = \frac{PX + QY - Z}{\lambda[Eal + F(am + bl) + Gbm]} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}{\sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}}.$$

Des relations (5), (16), (17), on peut déduire un système de *quatre* équations où ne figurent que X, Y, Z, P, Q, u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$(18) \qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda^2(Ea^2 + 2Fab + Gb^2), \\ \dfrac{PX + QY - Z}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}} = \dfrac{\lambda[Eal + F(am + bl) + Gbm]}{\sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}}, \\ Z = \lambda\left(a\dfrac{\partial z}{\partial u} + b\dfrac{\partial z}{\partial v}\right), \\ l\dfrac{\partial z}{\partial u} + m\dfrac{\partial z}{\partial v} + \dfrac{\sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}} = 0. \end{cases}$$

Ces équations établissent une correspondance entre un élément (X, Y, Z, P, Q) de Σ et un élément $\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ de la surface auxiliaire représentée en coordonnées (u, v, z) par l'équation

$$z = \psi(u, v),$$

déduite de la représentation paramétrique de S.

La recherche des systèmes de deux multiplicités d'éléments satisfaisant à ces quatre relations est un *problème de Bäcklund*, qui peut en général se ramener de plusieurs façons à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du second ordre [1]. Dans le cas actuel, on aperçoit facilement une solution. En effet, les quatre équations (18) permettent en général d'exprimer u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ au moyen de X, Y, Z, P, Q ; nous examinerons un peu plus loin les cas exceptionnels où cette résolution ne serait pas possible. En remplaçant u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ par les expressions ainsi obtenues dans la relation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv,$$

on obtient une équation aux différentielles totales de la forme

$$dz = \mathrm{F}\,d\mathrm{X} + \mathrm{F}_1\,d\mathrm{Y}, \tag{19}$$

F et F_1 étant des fonctions de X, Y, Z, P, Q et des dérivées secondes

$$\mathrm{R} = \frac{\partial^2 \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{X}^2}, \qquad \mathrm{S} = \frac{\partial^2 \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{X}\,\partial \mathrm{Y}}, \qquad \mathrm{T} = \frac{\partial^2 \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{Y}^2},$$

linéaires en R, S, T. La condition d'intégrabilité de cette équation (19) conduit, comme on le vérifie sans difficulté, à une équation de Monge-Ampère E_2

$$\mathrm{HR} + 2\,\mathrm{KS} + \mathrm{LT} + \mathrm{M} + \mathrm{N}(\mathrm{RT} - \mathrm{S}^2) = 0, \tag{20}$$

H, K, L, M, N étant des fonctions de X, Y, Z, P, Q. A toute surface S admettant l'élément linéaire (1) correspond une surface intégrale Σ de l'équation (20), pouvant dans certains cas se réduire à une courbe, c'est-à-dire à une intégrale généralisée au sens de S. Lie. Il est évident, d'après les formules (5), que la surface Σ ne change pas quand S subit une translation quelconque. Si l'on fait tourner la surface S, la surface Σ subit la même rotation autour d'un axe parallèle mené par l'origine. Si l'on remplace S par sa symétrique relativement à un point fixe quelconque, Σ est de même remplacé par la surface Σ', symétrique de Σ par rapport à l'origine. Il résulte

---

[1] E. Goursat, *Sur le problème de Bäcklund et les systèmes de deux équations de Pfaff* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1918).
Le problème de Bäcklund (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 6, 1918).

de ces propriétés que l'équation (20) admet le groupe des rotations autour de l'origine, et aussi le groupe obtenu en combinant ce premier groupe avec une transformation par symétrie relativement à l'origine. Voici une conséquence immédiate de cette remarque, qui nous sera utile. Des relations (5), (16), (17), on peut de même déduire un système de quatre relations entre X, Y, Z, P, Q, u, v, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$. Les deux premières équations du système (18) restent les mêmes et les deux dernières sont remplacées par les suivantes :

$$(18') \qquad \left\{ \begin{aligned} & X = \lambda\left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ & l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{P\sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}. \end{aligned} \right.$$

Le nouveau système se déduirait aussi du premier en remplaçant z par x, et en considérant X comme fonction de Y et de Z dans l'équation de la surface Σ. On a en effet

$$P' = \frac{\partial X}{\partial Z} = \frac{1}{P}, \qquad Q' = \frac{\partial X}{\partial Y} = -\frac{Q}{P},$$

et inversement

$$P = \frac{1}{P'}, \qquad Q = -\frac{Q'}{P'},$$

de sorte que les équations (16) deviennent

$$(16') \qquad \frac{P'}{l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{Q'}{l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{-1}{l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}},$$

tandis que les deux premières équations (18) ne changent pas. La condition d'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$ se déduirait donc de l'équation (20) en prenant X pour fonction inconnue, Y et Z pour les variables indépendantes au lieu de regarder Z comme une fonction de X, Y. Ce changement de variables revient à une transformation ponctuelle qui appartient au groupe de l'équation (20). Cette condition d'intégrabilité est donc identique à l'équation (20) elle-même, et il en serait évidemment de même de la condition obtenue en partant de $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$.

7. Réciproquement, *à toute surface intégrale Σ de l'équa-*

tion (20) *correspondent une infinité de surfaces* S, *admettant l'élément linéaire* (1), *qui se déduisent de l'une d'elles par une translation arbitraire.*

Soit en effet Σ une intégrale de E_2 ; X, Y, Z, P, Q peuvent être exprimés d'une infinité de façons au moyen de deux paramètres variables α, β. Nous supposerons que l'on a pris pour paramètres les variables u et v elles-mêmes, ce qui exige que u et v ne soient liées par aucune relation sur cette surface Σ. Les équations (7) et (16) donnent alors pour $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ des fonctions de u, v. Pour éviter toute confusion, nous désignerons ces six fonctions par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$,

$$(21)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \eta_1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \eta_2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \varepsilon_3, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \eta_3;$$

d'après ce qui vient d'être démontré, les trois équations

$$(22)\qquad dx = \varepsilon_1\, du + \eta_1\, dv, \qquad dy = \varepsilon_2\, du + \eta_2\, dv, \qquad dz = \varepsilon_3\, du + \eta_3\, dv$$

sont complètement intégrables, et les formules

$$(23)\qquad x = \int \varepsilon_1\, du + \eta_1\, dv, \qquad y = \int \varepsilon_2\, du + \eta_2 dv, \qquad z = \int \varepsilon_3 du + \eta_3\, dv$$

représentent une surface S, qui est complètement définie, à une translation près. On a pour cette surface

$$ds^2 = (\Sigma\, \varepsilon_i^2)\, du^2 + 2\,(\Sigma\, \varepsilon_i \eta_i)\, du\, dv + (\Sigma\, \eta_i^2)\, dv^2.$$

Des relations

$$a\varepsilon_1 + b\eta_1 = \frac{X}{\lambda}, \qquad a\varepsilon_2 + b\eta_2 = \frac{Y}{\lambda}, \qquad a\varepsilon_3 + b\eta_3 = \frac{Z}{\lambda},$$

$$\frac{l\varepsilon_1 + m\eta_1}{P} = \frac{l\varepsilon_2 + m\eta_2}{Q} = \frac{l\varepsilon_3 + m\eta_3}{-1} = \frac{\lambda\,[Eal + F(am + bl) + Gbm]}{PX + QY - Z}$$

on tire, en tenant compte des formules (18),

$$\Sigma\,(a\varepsilon_i + b\eta_i)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\lambda^2} = Ea^2 + 2Fab + Gb^2,$$
$$\Sigma\,(l\varepsilon_i + m\eta_i)^2 = El^2 + 2Flm + Gm^2,$$
$$\Sigma\,(a\varepsilon_i + b\eta_i)(l\varepsilon_i + m\eta_i) = Eal + F(am + bl) + Gbm,$$

et par suite

$$\Sigma\,\varepsilon_i^2 = E, \qquad \Sigma\,\varepsilon_i\eta_i = F, \qquad \Sigma\,\eta_i^2 = G,$$

à moins que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ l^2 & 2\,lm & m^2 \\ al & am+bl & bm \end{vmatrix} = (bl-am)^3$$

ne soit nul, hypothèse qui a été réservée. Sauf ce cas tout particulier qui sera examiné tout à l'heure, on voit que la surface S admet bien l'élément linéaire (1), et la recherche de ces surfaces est ramenée à l'intégration de l'équation (20).

Dans le cas particulier où u et v sont liés par une relation sur Σ, le point x, y, z décrit une courbe et non une surface. A l'intégrale Σ de E_2 correspond une intégrale, au sens de Lie (formée d'une courbe et de l'ensemble de ses plans tangents), pour l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction $z(u, v)$.

L'équation (20) est équivalente à l'équation de Weingarten. En effet, si l'on a pris pour les courbes (v) les courbes (K) de la congruence, $X^2+Y^2+Z^2=\rho^2$ est une fonction de v (n° **2**). Si, de plus, on prend comme variables indépendantes un système de deux variables définissant la direction de OM, par exemple

$$u' = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad v' = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

il est clair que l'équation à laquelle satisfait v, considérée comme fonction de u', v' se déduit de l'équation (20) par une transformation ponctuelle.

8. Avant de continuer l'étude du système (18), nous allons examiner les cas exceptionnels où ce système ne peut pas être résolu par rapport à u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Il en sera ainsi si le jacobien des seconds membres des deux premières équations par rapport à u et à v est identiquement nul, ou si les deux dernières équations (18) ne peuvent pas être résolues en $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, c'est-à-dire si $am - bl$ est nul. Dans ce dernier cas, la normale à Σ se confond avec la droite OM, et les surfaces Σ se réduisent à des sphères. C'est le cas banal déjà signalé n° **1**.

Dans le premier cas, à toute surface S admettant l'élément linéaire (1), les formules (7) font correspondre une surface Σ, pour laquelle il existe une relation entre la distance OM et la distance du point O au plan tangent en M. L'angle du plan tangent avec le rayon OM est donc aussi une fonction de OM, et par suite Σ admet une famille de lignes de courbure situées sur des sphères concentriques à l'origine. Ces surfaces Σ sont donc des *surfaces de Monge* engendrées par une courbe plane C de forme invariable dont le plan Π roule sans glisser sur un cône (T) de sommet O. Soit L la courbe de S qui correspond à la courbe C dans une de ses positions. Le plan tangent en un point M de L est parallèle à la droite OM qui joint l'origine au point correspondant M de C et à la normale à Σ en ce point M, qui est aussi dans le plan Π. Le plan tangent à S en tous les points de L est donc parallèle au plan Π. Il s'ensuit que cette surface S est une surface développable, dont le cône (T) est le cône directeur, et il est aisé d'en conclure comment les surfaces S et Σ se correspondent (*cf.* n° 5). On obtiendrait le cas singulier signalé plus haut (n° 3), où l'équation (9) est vérifiée identiquement, en supposant que la ligne C est une droite passant par le sommet du cône.

Nous laisserons de côté ces cas exceptionnels sans intérêt pour le problème de la déformation.

9. L'équation (20) est une *résolvante de seconde espèce* du système de Bäckhlund (18), qui s'obtient aisément en remarquant que z ne figure pas dans les équations (18), c'est-à-dire que ce système admet la transformation infinitésimale dont le symbole est $\frac{\partial f}{\partial z}$. Mais, d'après son origine, il est évident que ce système admet une autre transformation infinitésimale qu'il est facile de mettre en évidence. Il suffit pour cela de passer aux coordonnées semi-polaires ρ, ω, Z en posant

$$X = \rho\cos\omega, \qquad Y = \rho\sin\omega;$$

on a, d'après les formules classiques,

$$P = \cos\omega\frac{\partial Z}{\partial\rho} - \frac{\sin\omega}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial\omega},$$

$$Q = \sin\omega\frac{\partial Z}{\partial\rho} + \frac{\cos\omega}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial\omega},$$

$$P^2 + Q^2 + 1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\omega}\right)^2 + 1,$$

$$PX + QY - Z = \rho\frac{\partial Z}{\partial\rho} - Z.$$

Les formules (18) deviennent

$$\rho^2 + Z^2 = \lambda^2(Ea^2 + 2Fab + Gb^2),$$

$$\frac{\rho \frac{\partial Z}{\partial \rho} - Z}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \omega}\right)^2 + 1}} = \frac{\lambda \{ Eal + F(am + bl) + Gbm \}}{\sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}};$$

$$Z = \lambda\left(a\frac{\partial z}{\partial u} + b\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\sqrt{El^2 + 2Flm + Gl^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \omega}\right)^2 + 1}},$$

et ω n'y figure pas, de sorte que le système admet la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial \omega}$. On peut toujours résoudre ces équations par rapport à Z, ρ, $\frac{\partial Z}{\partial \rho}$, $\frac{\partial Z}{\partial \omega}$, qui s'expriment au moyen de u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. En considérant ω comme une fonction de Z et de ρ, on a

$$\omega'_Z = \frac{1}{\frac{\partial Z}{\partial \omega}}, \qquad \omega'_\rho = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial \rho}}{\frac{\partial Z}{\partial \omega}},$$

et par suite, le second membre de l'équation aux différentielles totales

$$d\omega = \omega'_Z\, dZ + \omega'_\rho\, d\rho$$

peut se mettre sous la forme

$$d\omega = F\,du + F_1\,dv,$$

F et F_1 ne dépendant que de u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. La condition d'intégrabilité est encore une équation de Monge-Ampère, à laquelle doit satisfaire la fonction z de u, v, quelle que soit la surface S admettant l'élément linéaire (1). Cette équation est forcément identique à l'équation bien connue à laquelle satisfont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface admettant l'élément linéaire donné.

10. De chaque congruence de droites tangentes à une surface S, nous venons de voir comment on peut déduire une équation aux

dérivées partielles du second ordre dont l'intégration permettrait d'obtenir par des quadratures toutes les surfaces applicables sur la surface S. Nous allons montrer maintenant que *toutes les équations ainsi obtenues peuvent se ramener à une seule par des transformations de contact.* Il suffit évidemment, pour cela, de prouver que deux quelconques de ces équations se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact. Supposons d'abord que les deux équations (20) proviennent d'une même congruence et correspondent à deux intégrales différentes ρ et ρ' de l'équation (9). On a $\rho' = \varphi(\rho)$, et par suite on passe de la surface Σ lieu du point M à la seconde surface Σ' en portant sur chaque droite OM une longueur $OM' = \varphi(OM)$, ce qui est une transformation ponctuelle.

Considérons maintenant deux congruences distinctes et supposons que les courbes coordonnées soient les arêtes de rebroussement des développables des deux congruences situées sur S. Pour l'une d'elles, on peut prendre $a = 0$, $b = 1$, et λ, l, m sont déterminés par les deux équations

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &(lF + mG)\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2}\left(l\frac{\partial E}{\partial v} + m\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0,\\ &(lF + mG)\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\left[l\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{m}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

Les coordonnées X, Y, Z, P, Q d'un élément correspondant à un système de valeurs de u, v, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, satisfaisant aux relations (2), sont données par les formules

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &X = \lambda\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = \lambda\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = \lambda\frac{\partial z}{\partial v},\\ &\frac{P}{l\dfrac{\partial x}{\partial u} + m\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{Q}{l\dfrac{\partial y}{\partial u} + m\dfrac{\partial y}{\partial v}} = \frac{-1}{l\dfrac{\partial z}{\partial u} + m\dfrac{\partial z}{\partial v}} = \mu;\end{aligned}\right.$$

inversement, si nous reprenons les notations (21) du n° 6, nous avons vu que les équations (25) font correspondre à un élément (X, Y, Z, P, Q) un système de valeurs de u, v, ε_1, ε_2, ε_3, η_1, η_2, η_3 liées par les trois relations

$$\Sigma\varepsilon_i^2 = E, \qquad \Sigma\varepsilon_i\eta_i = F, \qquad \Sigma\eta_i^2 = G.$$

Imaginons, pour plus de symétrie, que de ces trois relations on ait tiré les expressions des ε_i, η_i au moyen de u, v, et de trois autres paramètres indépendants θ_1, θ_2, θ_3. Les formules (25) donnent alors pour X, Y, Z, P, Q des fonctions des cinq variables indépendantes u, v, θ_1, θ_2, θ_3. De ces formules, on tire

$$P\,dX + Q\,dY - dZ = \mu \sum_1^3 (l\varepsilon_i + m\eta_i)\, d(\lambda\eta_i),$$

ce qui, en tenant compte des conditions (24), devient

$$P\,dX + Q\,dY - dZ = \lambda\mu \sum_1^3 (l\varepsilon_i + m\eta_i)\, D(\eta_i),$$

où l'on a posé

$$D(\quad) = \frac{\partial}{\partial\theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial}{\partial\theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial}{\partial\theta_3} d\theta_3.$$

La somme $\Sigma\eta_i D(\eta_i)$ est nulle puisque $\Sigma\eta_i^2 = G$ ne dépend pas des θ_i. Il reste donc

$$P\,dX + Q\,dy - dZ = \lambda\mu l \sum_1^3 \varepsilon_i\, D(\eta_i).$$

En considérant de même un élément X', Y', Z', P', Q' déduit de la seconde congruence formée de droites tangentes aux courbes (v), on aurait, avec des notations analogues,

$$P'\,dX' + Q'\,dY' - dZ' = \lambda'\mu' l' \sum_1^3 \eta_i\, D(\varepsilon_i).$$

Mais la somme $\Sigma\varepsilon_i\eta_i = F$ étant indépendante des θ_i, on a

$$\Sigma\eta_i D(\varepsilon_i) + \Sigma\varepsilon_i D(\eta_i) = 0,$$

et par suite

$$(26)\qquad \lambda'\mu' l'(P\,dX + Q\,dY - dZ) - \lambda\mu l(P'\,dX' + Q'\,dY' - dZ') = 0,$$

ce qui montre bien que l'on passe de l'élément (X, Y, Z, P, Q) à l'élément (X', Y', Z', P', Q') par une transformation de contact.

11. On est ainsi conduit à un groupe de transformations de contact qu'il est possible de déterminer d'après une propriété caractéristique. Soit S une surface particulière admettant l'élément linéaire (1) et deux congruences de droites ($\mathcal{G}$) et ($\mathcal{G}'$) tangentes à S. Par un point m de S passe une droite Δ de la congruence $(\mathcal{G})$ et une droite Δ' de la congruence $(\mathcal{G}')$ qui sont l'une et l'autre situées dans le plan Π tangent à S au point m. Au moyen de la congruence $(\mathcal{G})$, on fait correspondre au point m de S un point M d'une surface Σ dont la normale en M est parallèle au plan Π. De même, au moyen de la congruence $(\mathcal{G}')$, on fait correspondre au point m de S un point M' d'une autre surface Σ', dont la normale en M' est parallèle au plan Π. De plus, les droites OM, OM' sont respectivement parallèles aux droites Δ et Δ'. On vient de démontrer que l'on passe de Σ à Σ' par une transformation de contact, qui est indépendante de la surface S, admettant l'élément linéaire (1).

D'après les constructions précédentes, les normales en M et M' aux deux surfaces Σ, Σ' sont dans le plan MOM', parallèle au plan Π. Les transformations de contact dont il s'agit sont donc telles que les normales aux deux éléments correspondants (X, Y, Z, P, Q), (X', Y', Z', P', Q') soient dans le plan MOM'. Il est facile de déterminer toutes les transformations de contact qui possèdent cette propriété. Si la transformation est déduite d'une seule équation directrice

$$\psi(X, Y, Z;\quad X', Y', Z') = 0, \tag{27}$$

cette relation fait correspondre à un élément de contact composé du point (X, Y, Z) et d'un plan passant par ce point un élément de contact de la surface (σ) représentée par l'équation (27), X', Y', Z' étant les coordonnées courantes. La normale à cet élément doit être dans un même plan avec la droite OM et par suite cette surface (σ) est une surface de révolution autour de OM. Pour la même raison, l'équation (27) représente une surface de révolution autour de OM', quand on y regarde X, Y, Z comme les coordonnées courantes. La relation (27) est donc de la forme

$$\varphi(X^2+Y^2+Z^2,\ X'^2+Y'^2+Z'^2,\ XX'+YY'+ZZ') = 0, \tag{27'}$$

et l'on vérifie bien aisément que toute transformation de contact déduite d'une relation de cette forme satisfait bien à la condition énoncée.

Si la transformation de contact est déduite d'un système de deux équations directrices

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \tag{28}$$

entre X, Y, Z, X′, Y′, Z′, on verra de même que ces deux équations représentent un cercle ayant OM pour axe, quand on regarde X′, Y′, Z′ comme les coordonnées courantes et un cercle ayant OM′ pour axe, quand on regarde au contraire X, Y, Z comme les coordonnées courantes.

Les relations (28) sont donc de la forme

$$(28') \qquad \begin{cases} X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \varphi_1(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ XX' + YY' + ZZ' = \varphi_2(X^2 + Y^2 + Z^2). \end{cases}$$

Dans ce cas, les courbes situées sur les sphères de centre O se correspondent sur les deux surfaces Σ, Σ', et les deux congruences $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{G}')$ ont les mêmes courbes (K) (n° 4).

Enfin, si la transformation est une transformation ponctuelle, la normale à l'élément (X, Y, Z, P, Q) ne peut être située dans un plan passant par les points O et M′, quels que soient P, Q, que si les trois points O, M, M′ sont en ligne droite. La transformation est alors définie par des formules

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = f(X, Y, Z).$$

Lorsque le point M décrit un cercle de centre O, on voit aisément que les normales aux deux éléments ne peuvent être dans un même plan que si le point M′ décrit aussi un cercle de centre O. On a donc $OM' = \varphi(OM)$ et l'on retrouve la transformation ponctuelle déjà signalée (n° 9). Les transformations précédentes comprennent plusieurs transformations connues, en particulier la transformation apsidale.

12. On obtient la première transformation de Weingarten en supposant l'élément linéaire mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + 2\,dv\,d\psi = du^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du\,dv + 2\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv^2,$$

et en posant

$$X = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Des relations

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 2\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

on déduit immédiatement que l'on a

$$S\frac{\partial x}{\partial u}dX = 0.$$

Les surfaces Σ décrites par le point (X, Y, Z) satisfont bien à la condition imposée. La congruence des tangentes à S est formée par les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, et les courbes (K) correspondantes sont les courbes $\frac{\partial\psi}{\partial v} = \text{const.}$ (*cf.* n° 3).

Dans ce cas particulier, l'équation aux dérivées partielles des surfaces Σ prend une forme simple

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} - (\rho' + \rho'')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \rho'\rho''\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0,$$

p et q représentant respectivement la distance de l'origine au plan tangent et le carré de la distance de l'origine au point M, ρ' et ρ'' sont les rayons de courbure principaux, et la fonction $\varphi(p, q)$ se déduit de $\psi(u, v)$ par la transformation de Legendre.

Proposons-nous de trouver tous les cas où l'équation des surfaces (Σ) est une relation d'involution entre les rayons de courbure principaux, dont les coefficients dépendent uniquement des paramètres u et v, c'est-à-dire de p et q, en conservant les notations précédentes.

Supposons que nous ayons pris pour courbes coordonnées (u) les courbes tangentes aux droites de la congruence, et que les courbes (v) aient été choisies de façon que l'on ait $m = 0$ dans les formules (5). Les surfaces Σ sont alors représentées par les formules

$$X = \lambda\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = \lambda\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = \lambda\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{29}$$

λ satisfaisant aux deux équations compatibles

$$\left\{\begin{aligned} &F\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = 0,\\ &F\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

On a dans ce cas

$$S\frac{\partial x}{\partial u}dX = 0,$$

et l'on peut prendre, pour paramètres directeurs de la normale,

$$(31) \qquad A = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad B = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad C = \frac{\partial z}{\partial u}.$$

L'équation qui détermine les rayons de courbure principaux de Σ peut s'écrire

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} - \rho \frac{\partial A}{\partial u}, & \frac{\partial X}{\partial v} - \rho \frac{\partial A}{\partial v}, & A \\ \frac{\partial Y}{\partial u} - \rho \frac{\partial B}{\partial u}, & \frac{\partial Y}{\partial v} - \rho \frac{\partial B}{\partial v}, & B \\ \frac{\partial Z}{\partial u} - \rho \frac{\partial C}{\partial u}, & \frac{\partial Z}{\partial v} - \rho \frac{\partial C}{\partial v}, & C \end{vmatrix} = 0$$

en posant $\rho = R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Remplaçons X, Y, Z, A, B, C par les expressions (29) et (31); l'équation devient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \rho \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \rho \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \rho \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, & \frac{\partial \lambda}{v}\frac{\partial z}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \rho \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions ce déterminant par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

où c, c', c'' désignent les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point (u, v). En appliquant la règle classique de multiplication des déterminants, et en tenant compte des relations (5), l'équation en ρ devient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial u} F + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\rho}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, & \frac{\partial \lambda}{\partial v} F + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{\rho}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & E \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} G + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \rho\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right), & \frac{\partial \lambda}{\partial v} G + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\rho}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, & F \\ \lambda M - \rho L, & \lambda N - \rho M, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

où l'on a posé

$$L = S\,c\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\qquad M = S\,c\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\qquad N = S\,c\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Cette équation développée devient

$$(33)\quad \rho^2(\beta M - L\delta) + \rho[\alpha M - L\gamma - \lambda(\beta N - M\delta)] + \lambda M\gamma - \lambda N\alpha = 0,$$

ou l'on a posé

$$\alpha = \frac{\partial\lambda}{\partial u}(F^2 - EG) + \frac{\lambda}{2}\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

$$\beta = E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u},$$

$$\gamma = \frac{\partial\lambda}{\partial v}(F^2 - EG) + \lambda\left(F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}\right),$$

$$\delta = \frac{1}{2}\left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right).$$

Pour qu'il existe entre les racines de l'équation (33) une relation indépendante des rapports $\frac{M}{N}$, $\frac{L}{M}$, il faut et il suffit que les trois formes linéaires en L, M, N qui forment les coefficients de ρ^2, de ρ et le terme indépendant dans l'équation (32) ne soient pas distincts. En faisant le calcul, on trouve que cette condition se dédouble en deux

$$(34)\qquad (\alpha + \delta\lambda)(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0.$$

Supposons d'abord que l'on prenne $\alpha + \delta\lambda = 0$. En remplaçant α et β par leurs expressions, cette condition devient $\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0$. La première des relations (30) montre qu'on doit avoir $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$. On peut alors supposer $E = 1$, et ds^2 est de la forme

$$ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + G\,du^2.$$

La seconde des relations (30) prouve de plus que $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}}{F}$ doit être fonction de la seule variable v, on peut donc poser

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = -FV'(v).$$

Si $V' = 0$, on a la forme même de Weingarten. Si V' n'est pas nul, on peut écrire la condition précédente

$$\frac{\partial}{\partial v}[e^{\mathrm{V}}\mathrm{F}] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}[e^{\mathrm{V}}\mathrm{G}],$$

et l'on en tire

$$\mathrm{F} = e^{-\mathrm{V}}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad \mathrm{G} = 2e^{-\mathrm{V}}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

d'où l'expression de ds^2

$$ds^2 = du^2 + e^{-\mathrm{V}}\left[2\frac{\partial\psi}{\partial u}du\,dv + 2\frac{d\psi}{dv}dv^2\right]$$

que l'on peut ramener à la forme de Weingarten, car ds^2 s'écrit aussi

$$ds^2 = du^2 + (2d\psi)(e^{-\mathrm{V}}dv).$$

Remarque. — Il y a aussi une relation d'involution entre les racines de l'équation (33), si les coefficients α, β, γ, δ satisfont à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. L'un des rayons de courbure principaux de la surface Σ est alors une fonction déterminée de u, v.

En remplaçant, dans α et γ, $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$ par les valeurs tirées des formules (30), il vient

$$\alpha = \frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}\left(\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\right),$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}\left(2\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\right),$$

et la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ devient

$$\begin{aligned}(35)\qquad &\left(\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\right)\left(\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\right) \\ &= \left(2\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\right)\left(2\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}\right).\end{aligned}$$

Rapprochons cette condition de la formule (9′) qui donne les courbes (K) pour la congruence formée des tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, et de la formule analogue obtenue en permutant u, v, E, G, qui détermine les courbes (K) pour la congruence formée des tangentes aux courbes $v = \text{const.}$; la condition (35) exprime précisément que les courbes (K) sont identiques pour les deux congruences. Il s'ensuit que les courbes (u) et les courbes (v) se coupent sous un angle constant (n° 4) tout le long d'une de ces courbes (K), et la surface S est une surface développable (n° 5).

13. Cette première méthode de Weingarten fait correspondre à une surface réelle une surface imaginaire. On peut éviter cet inconvénient en conservant la même congruence de droites. Supposons l'élément linéaire mis sous la forme

$$\begin{aligned}(36)\qquad ds^2 &= du^2 + dv^2 + [d\varphi(u, v)]^2\\ &= (1 + p^2)\,du^2 + 2pq\,du\,dv + (1 + q^2)\,dv^2,\end{aligned}$$

où

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

La relation (9)′ devient $\frac{D(p, q)}{D(u, v)} = 0$. On peut donc prendre pour λ une fonction arbitraire de q. Si l'on prend $\lambda = 1$, la surface Σ est représentée paramétriquement par les formules

$$X = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = \frac{\partial z}{\partial v},$$

et les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$q\frac{\partial x}{\partial u} - p\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad q\frac{\partial y}{\partial u} - p\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad q\frac{\partial z}{\partial u} - p\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Les coefficients angulaires du plan tangent à Σ sont donnés par les formules

$$\frac{P}{q\frac{\partial x}{\partial u} - p\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{Q}{q\frac{\partial y}{\partial u} - p\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{-1}{q\frac{\partial z}{\partial u} - p\frac{\partial z}{\partial v}},$$

et des combinaisons faciles donnent pour la valeur commune de ces rapports les deux expressions nouvelles

$$\frac{PX + QY - Z}{-p} = \pm\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}{\sqrt{q^2 + p^2}}.$$

On a donc entre u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, X, Y, Z, P, Q les quatre relations

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &Z = \frac{\partial z}{\partial v}, \qquad q\frac{\partial z}{\partial u} - p\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}},\\ &X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 + q^2, \qquad \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{PX + QY - Z}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}.\end{aligned}\right.$$

Ces quatre relations permettent d'exprimer p, q, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ au moyen de X, Y, Z, P, Q. Supposons d'autre part qu'on applique à la fonction $\varphi(u, v)$ la transformation de Legendre

$$\psi = \varphi(u, v) - u\frac{\partial \varphi}{\partial u} - v\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad p = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial v};$$

on aura

$$d\psi = -u\,dp - v\,dq$$

et par suite

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial p}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial q}.$$

La condition

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

devient

$$dz = -\frac{\partial z}{\partial u}d\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) - \frac{\partial z}{\partial v}d\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)$$

$$(38) \quad dz = -\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial p\,\partial q}\right)dp - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 \psi}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}\right)dq$$

et la condition d'intégrabilité fournira l'équation aux dérivées partielles des surfaces (Σ).

14. Si l'on connaît une famille de géodésiques du ds^2 donné et leurs trajectoirrs orthogonales, on peut prendre le ds^2 sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2;$$

On a vu plus haut (n° 4), que pour obtenir une congruence de tangentes admettant ces lignes géodésiques pour les courbes (K), il suffit de prendre des droites coupant sous un angle constant chacune de ces géodésiques, cet angle variant d'une façon arbitraire quand on passe d'une géodésique à une autre. Si l'on prend par exemple la congruence des tangentes aux trajectoires orthogonales, on a

$$a = 0, \quad b = 1, \quad X = \lambda\frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y = \lambda\frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z = \lambda\frac{\partial z}{\partial v},$$

l'équation (9') devient $\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$. On peut prendre par exemple

$$\lambda = \frac{v}{\sqrt{G}},$$

et l'on satisfait aux relations (7') en prenant

$$l = G, \qquad m = \frac{v}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Si l'on prend au contraire la congruence des tangentes aux lignes géodésiques elles-mêmes, la surface Σ est représentée par les formules

$$X = \lambda\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y = \lambda\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z = \lambda\frac{\partial z}{\partial u},$$

où λ est une fonction de v seulement. On peut prendre ici $a = 1$, $b = 0$, et les conditions (7) deviennent

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0, \qquad l\frac{\partial\log\lambda}{\partial v} + \frac{m}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'élément linéaire est de la forme

(39) $$ds^2 = du^2 + [2u + \varphi(v)]\,dv^2,$$

la surface est applicable sur une surface réglée à plan directeur isotrope, et l'équation de Weingarten peut être ramenée à la forme

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

ce qui exige que les équations différentielles de chaque famille de caractéristiques admettent une combinaison intégrable. L'existence de ces combinaisons intégrables résulte de la propriété suivante que j'ai signalée dans le Mémoire déjà cité (note de la page 11). Étant donnée une surface admettant l'élément linéaire (39), si à chaque point de cette surface on fait correspondre le point de la sphère où le rayon parallèle à la tangente à la géodésique $v =$ const. qui passe en ce point perce la sphère, aux lignes asymptotiques de la surface correspondent les génératrices rectilignes de la sphère. Il s'ensuit que les lignes asymptotiques de S ont pour images des courbes planes de Σ situées dans des plans isotropes. Les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles de Weingarten sont donc situées dans des plans isotropes, ce qui fournit bien une combinaison intégrable pour chaque famille de caractéristiques.

Prenons le cas plus général où le ds^2 est de la forme

(40) $$ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2,$$

A, B, C, D, étant des fonctions de v, qui convient à une infinité de surfaces réglées, pour lesquelles les génératrices rectilignes sont les courbes (v), et qui dépendent d'une fonction arbitraire. L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait une des coordonnées d'un point de toute surface S admettant cet élément linéaire admet donc une infinité d'intégrales, dépendant d'une fonction arbitraire, qui sont des fonctions linéaires de u; cette équation est donc en involution avec l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0.$$

L'équation de Weingarten correspondante admet aussi une involution du second ordre qu'il est facile de déterminer, si l'on part de la congruence de droites tangentes aux courbes (u). Les courbes (v) sont alors les courbes (K) de cette congruence (n° 4). Pour une surface réglée S admettant l'élément linéaire (40), la courbe Γ de Σ qui correspond à une génératrice rectiligne est un cercle ayant pour centre l'origine.

L'équation de Weingarten est donc en involution avec l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par un cercle ayant l'origine pour centre, lorsque le rayon et le plan du cercle varient d'une façon arbitraire.

Le problème que nous venons d'étudier doit être rapproché d'un problème analogue traité par M. Bianchi (1). Supposons qu'à chaque point m d'une surface S on associe un point M invariablement lié au trièdre T; peut-il se faire que la normale à la surface Σ décrite par M soit elle-même invariablement liée au trièdre T quand on remplace la surface S par une surface quelconque applicable sur S?

L'étude systématique de ce problème permet de retrouver un grand nombre de résultats importants de la théorie des surfaces, qui ont été en général établis par des méthodes très différentes.

---

(1) L. Bianchi, *Sopra una proprieta caratteristica delle congruenze rettilinee di rotolamento* (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XXIV, 5e série, 1er semestre, 1925).