BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur les solutions d'une équation différentielle fonctionnelle

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 53-68

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__53_0>

SUR LES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE ;

Par M. G. Valiron.

M. Flamant a montré dans sa Thèse ([1]) que l'équation différentielle fonctionnelle

$$f'(z\sigma) - A(z)f(z) = 0 \qquad (|\sigma| > 1),$$

où $A(z)$ est holomorphe à l'origine, possède, en outre de la solution holomorphe à l'origine, des solutions admettant une singularité à l'origine et qui ont en général ce point pour point critique.

En supposant σ *réel et positif* et $A(z)$ fraction rationnelle, on peut obtenir des solutions par une voie différente de celle employée par M. Flamant. On applique la méthode d'approximations successives à l'équation à second membre

$$f'(z\sigma) - A(z)f(z) = e^{bz}$$

en prenant comme première approximation $\frac{-1}{A(z)}e^{bz}$, ce qui introduit les développements en série jouissant de quelques propriétés communes avec les séries de Dirichlet. Lorsque $A(z)$ est constant, on obtient de véritables séries de Dirichlet dont le demi-plan de convergence, limité par une droite passant par l'origine, est le domaine naturel d'existence de la solution, ce qui conduit pour l'équation homogène à des solutions nouvelles dont le domaine d'existence est un angle arbitraire de sommet origine et d'ouverture au plus égale à π. Le cas le plus simple au point de vue des développements en série est ensuite celui où $\frac{1}{A(z)}$ est un polynome ; mais c'est seulement lorsque $A(z)$ est un polynome que l'on est assuré d'avoir des solutions entièrement nouvelles et non pas d'autres branches de la solution holomorphe à l'origine.

([1]) *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 48, 1924.

En étendant aux développements en série obtenus la formule de Cahen-Hadamard de la théorie des séries de Dirichlet, on est conduit à une nouvelle méthode de sommation de ces séries du genre de la méthode des moyennes typiques de M. Riesz.

1. Considérons d'abord l'équation

$$f(z) - af'(z\sigma) = e^{bz}, \tag{1}$$

où a et b sont constants. On peut chercher une solution par approximations successives en résolvant le système

$$f_0(z) = e^{bz} \qquad f_n(z) = af'_{n-1}(z\sigma),$$

ce qui donne

$$f_n(z) = (ab)^n \sigma^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\sigma^n bz}.$$

La série

$$F(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

est une série de Dirichlet dont le demi-plan de convergence est le demi-plan Δ dans lequel la partie réelle de bz est négative; dans ce demi-plan, la somme $F(z)$ est une solution de l'équation (1). En outre, cette série est de la catégorie des séries de puissances du type lacunaire auxquelles s'appliquent les théorèmes récents [1] qui généralisent et complètent le théorème de M. Hadamard sur les séries de Taylor : *la droite* D *sur laquelle bz est imaginaire pure est une ligne singulière pour la fonction* $F(z)$.

Prenons maintenant deux équations (1) avec deux valeurs b_1 et b_2 de b et la même valeur de a, et soient $F_1(z)$ et $F_2(z)$ les solutions correspondantes, l'équation

$$f(z) - af'(z\sigma) = \lambda e^{b_1 z} + \mu e^{b_2 z} \tag{2}$$

admettra pour solution $f(z) = \lambda F_1(z) + \mu F_2(z)$. Supposons d'abord que la différence des arguments de b_1 et b_2 ne soit pas multiple de π; la fonction $f(z)$ sera une fonction holomorphe dans l'angle dans lequel les parties réelles de $b_1 z$ et $b_2 z$ seront négatives et cet angle sera le domaine d'existence de cette fonction. Suppo-

---

[1] *Voir* les Mémoires de E. LANDAU et F. CARLSON, *Göttinger Nachr.*, 1921; O. SZASZ, *Math. Annalen*, t. 85, 1922; A. OSTROWSKI et G. POLYA, *Sitzb. der Berliner Akad.*, 1923.

sons maintenant que le rapport $b_1 : b_2$ soit réel et positif et ne soit pas puissance entière de σ; $f(z)$ pourra être considérée comme une série de Dirichlet unique dont les coefficients des exponentiels satisferont encore aux conditions suffisantes pour que la droite D soit coupure. Les fonctions $F_1(z)$ et $F_2(z)$ qui sont représentées par des séries de Dirichlet de coefficients exponentiels différents sont d'ailleurs distinctes.

On pourra de même considérer une équation à second membre, dont le second membre sera la somme de trois exponentielles, et ainsi de suite. Chaque équation de cette forme admet d'autre part une solution qui est une fonction entière prenant une valeur donnée à l'origine. *L'équation homogène*

$$af'(z\sigma) - f(z) = 0 \tag{3}$$

admet donc des solutions dépendant d'un nombre fini quelconque de constantes et dont le domaine d'existence est un angle donné de sommet O *et d'ouverture inférieure ou égale à* π.

Remarquons encore qu'en éliminant l'exponentielle du second membre de (1) entre cette égalité et sa dérivée, on obtient une équation différentielle fonctionnelle linéaire à coefficients constants

$$a\sigma f''(z\sigma) - abf'(z\sigma) - f'(z) + bf(z) = 0$$

qui admet pour solution la série de Dirichlet $F(z)$ (1).

2. Signalons en passant la nature de la solution entière $G(z)$ de l'équation (1) qui prend la valeur 0 à l'origine [Les autres solutions entières s'obtiennent en ajoutant à celle-là la solution générale entière de l'équation (3), solution que j'ai étudiée ailleurs (2)].

La méthode des approximations successives, effectuées par intégrations au lieu de dérivations, donne ici

$$G(z) = -\sum_{1}^{\infty} (ab)^{-q} \sigma^{\frac{q(q+1)}{2}} E_q(b\sigma^{-q}z) \tag{4}$$

(1) M. Ostrowski a montré que certaines séries de Dirichlet, comprenant celles du type ici envisagé, ne vérifient aucune équation différentielle et aux différences algébriques [équations où figurent $f(z+h)$ et leurs dérivées] (*Math. Zeitschrift*, t. 8, 1920).

(2) *Nouvelles Annales de Math.*, t. 3, 1925.

en posant

$$E_q(u) = e^u - 1 - u - \ldots - \frac{u^{q-1}}{(q-1)!}.$$

La différence $R_m(z)$ entre $G(z)$ et la somme des m premiers termes de la série (4) est solution de l'équation

$$af'(z\sigma) - f(z) = k_m E_m(b\sigma^{-m}z),$$

k_n étant une constante, ce qui montre qu'on a

$$\log|R_m(z)| < K_m + |bz|\sigma^{-m-1},$$

$G(z)$ se comporte comme la somme des m premiers termes de $G(z)$ dans tout angle donné de sommet O extérieur au demi-plan Δ dans lequel la partie réelle de bz est négative, l'erreur étant de l'ordre de grandeur du premier terme négligé.

On obtient aisément une limitation de $|G(z)|$ dans le demi-plan Δ, ou même dans tout demi-plan Δ_A dans lequel la partie réelle de bz est inférieure à $\log A$, $(A > 1)$. Car la partie réelle de u étant inférieure à $\log A$, on a

$$|E_q(u)| < (q + A)\left(\frac{|u|^q}{q!}\right) < (q + A)\left(\frac{e|u|}{q}\right)^q$$

lorsque $q \leqq |u|$, tandis que pour $q \geqq 1 + |u|$

$$|E_q(u)| \leqq \frac{|u|^q}{q!}\left(1 + \frac{q}{q+1} + \ldots\right) < \frac{|u|^q}{q!}\frac{e^q q!}{q^q} = \left(\frac{e|u|}{q}\right)^q,$$

donc

$$|G(z)| < \sum_1^\infty (q + A)\left|\frac{ez}{aq\sigma^{\frac{q-1}{2}}}\right|^q,$$

ce qui montre que le module de $G(z)$ *est limité dans* Δ_A *par celui d'une fonction entière d'ordre nul, on a*

$$\log|G(z)| < \frac{1 + \varepsilon(z)}{2\log\sigma}(\log|z|)^2, \tag{5}$$

$\varepsilon(z)$ tendant vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment. Cette inégalité ne semble pas pouvoir être améliorée. Supposons en effet que ab et bz soient réels et négatifs. Pour u réel et négatif, on a l'inégalité

$$0 < (-1)^q E_q(u) < \frac{(-u)^q}{q!},$$

tous les termes de $G(z)$ ont le même signe, et l'on a, pour $q+2 > -u$,

$$(-1)^q E_q(u) > \frac{(-u)^q}{q!} - \frac{(-u)^{q+1}}{(q+1)!},$$

par suite,

$$-2G(z) > \frac{1}{q!}\left(\frac{z}{a\sigma^{\frac{q-1}{2}}}\right)^q$$

pourvu que $q\sigma^q$ soit supérieur à $-2bz$. En prenant pour q le premier entier satisfaisant à cette inégalité, on voit que l'inégalité (5) se transforme alors en égalité. L'application du théorème de MM. Lindelöf et Phragmén ([1]) montre que la fonction spéciale ainsi obtenue d'une façon très naturelle vérifie la condition

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{2\log|G(re^{i\varphi})|\log\sigma}{(\log r)^2} = 1$$

sur toute demi-droite pour laquelle $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$.

3. On peut appliquer la méthode du n° 1 aux équations de la forme

$$f(z) - a(z)f'(z\sigma) = e^{bz}, \tag{6}$$

où $a(z)$ est un polynome. On obtient ici une série mixte

$$H(z) = \sum_1^\infty c_n(z)\, e^{\sigma^{n-1}bz}, \tag{7}$$

où les $c_n(z)$ sont des polynomes déterminés de proche en proche par les égalités

$$c_1(z) = 1 \qquad c_n(z) = a(z)[c'_{n-1}(z\sigma) + b\sigma^{n-2}c_{n-1}(z\sigma)].$$

Si P désigne le degré de $a(z)$, $c_n(z)$ est de degré $(n-1)$ P et si K est supérieur aux modules des coefficients de $a(z)$, à $|b|$ et à 1, les coefficients de $c_n(z)$ ont un module moindre que

$$M(P+1)^n \sigma^{(P+1)\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

([1]) *Acta. math.*, t. 31.

M étant une constante indépendante de n. La série (7) converge donc absolument et uniformément dans toute région intérieure au demi-plan Δ; dans ce demi-plan, sa somme est une fonction holomorphe vérifiant l'équation (6). Nous allons montrer que la série (7) ne peut converger à l'extérieur de Δ qu'en des points formant un ensemble de mesure linéaire nulle. En effet, si A est le coefficient de z^P dans $a(z)$, $c_n(z)$ est de la forme

$$c_n(z) = (Ab)^{n-1}\sigma^{(P+1)\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(z-\alpha^n_1)\dots(z-\alpha^n_{P_n-P}).$$

Entourons les zéros de $c_n(z)$ de cercles Γ_n ayant pour centres ces zéros et pour rayon commun $\sigma^{1-\frac{1}{2}n}$. A l'extérieur de ces cercles ou sur leurs circonférences, $|c_n(z)|$ dépassera tout nombre donné dès que n sera assez grand. Il suffit donc que le point z, extérieur au demi-plan Δ, ne soit pas à l'intérieur d'une infinité de cercles Γ_n pour que la série diverge en ce point. Les seuls points de convergence extérieurs à Δ doivent être intérieurs à un cercle Γ_n au moins dès que n est suffisamment grand. Comme la somme $P(n-1)\sigma^{1-\frac{1}{2}n}$ des rayons des cercles Γ_n est arbitrairement petite, l'ensemble E des points de convergence est de mesure linéaire nulle. (Les points de E peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des rayons est aussi petite que l'on veut.) La proposition est établie. En particulier, sur la frontière D de Δ, $H(z)$ ne peut converger qu'en des points d'un ensemble de mesure nulle.

Le seul domaine de convergence de la série (7) *est le demi-plan* Δ, *cette série ne définit qu'une seule fonction analytique.*

Je n'ai pu reconnaître si la série (7) admet encore la droite D comme coupure, de sorte que l'on ne peut assurer [dans le cas $a(0) \neq 0$] que la solution obtenue soit distincte de la solution holomorphe à l'origine [1]. Toutefois, les branches de cette dernière solution admettent probablement pour points singuliers les zéros de $a\left(\frac{z}{\sigma}\right)$ tandis que la solution $H(z)$ possède une branche régulière en ceux de ces points intérieurs à Δ.

---

[1] *Voir* à ce sujet ma Note *Sur une classe de développements en série* (*C. R. Acad. Sc.*, t, 181, 1925, p. 763).

4. La propriété qui vient d'être établie pour les séries de la forme (7) se généralise à la classe des séries

$$(8) \qquad \varphi(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n(z)\, e^{-\lambda_n z} \qquad (z = x + iy),$$

où les λ_n sont des nombres positifs croissants tels que

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0.$$

Nous allons montrer que, *si le degré μ_n de $c_n(z)$ est suffisamment petit par rapport à λ_n, la série* (8) *possède un seul domaine de convergence qui est le même que celui de la série*

$$(10) \qquad \sum_{1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n z},$$

où C_n désigne le plus grand des modules des coefficients du polynome $c_n(z)$.

Si la série (10) converge au point z_0, C_n est inférieur à $e^{\lambda_n x_0}$ à partir d'une valeur de n, donc, à partir de ce rang

$$|c_n(z)| < (\mu_n + 1)\, |z|^{\mu_n} e^{\lambda_n x_0},$$

si $|z| > 1$, tandis que pour $|z| \leqq 1$ on a l'inégalité analogue dans laquelle le second facteur est supprimé. On en déduit de suite que la série (8) converge absolument pour $x > x_0$ pourvu que $\mu_n : \lambda_n$ tende vers zéro. Dans ces conditions, la série (8) converge uniformément et absolument dans toute région intérieure au demi-plan de convergence de (10).

Considérons d'autre part les points z intérieurs à un cercle Γ, $|z| < R$, R étant donné. Si l'on exclut du cercle Γ les points intérieurs à des circonférences Γ_n dont la somme des rayons est moindre que

$$\frac{k R \log \mu_n}{M_n},$$

on a

$$|c_n(z)| > C_n \frac{1}{(k' M_n)^{\mu_n}} \quad (^1),$$

(1) *Voir* mon Mémoire sur *Les fonctions entières de deux variables et les ensembles de mesure nulle* (*Bull. Sciences math.*, 1920).

k et k' étant deux nombres indépendants de n et M_n un entier arbitraire mais supérieur à une constante k'' (on suppose μ_n supérieur à 10). Supposons que l'on puisse choisir M_n de façon que la série

$$\sum \frac{\log \mu_n}{M_n} \tag{11}$$

converge, mais que

$$\frac{\mu_n \log M_n}{\lambda_n}$$

tende vers zéro. On voit alors que, pour les points z_0 du cercle Γ extérieurs à un ensemble E de mesure linéaire nulle, on a

$$|c_n(z)| > C_n e^{-\varepsilon\lambda_n}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, pourvu que n soit assez grand. L'ensemble E est l'ensemble des points intérieurs à une infinité de cercles Γ_n. Si la série (8) converge en un point z_0 extérieur à E, on aura, à partir d'une valeur de n,

$$C_n < e^{(\varepsilon+x_0)\lambda_n},$$

ce qui montre que la série (10) converge absolument pour $x > x_0$. En dehors du domaine de convergence de (10) la série (8) ne peut converger que sur un ensemble de mesure linéaire nulle. Les conditions imposées à λ_n et μ_n se résument en une seule ; *on suppose que* μ_n *est tel que la série*

$$\Sigma \log \mu_n e^{-\varepsilon \frac{\lambda_n}{\mu_n}} \tag{12}$$

converge pour toute valeur positive de ε [cette condition implique la condition (9)].

Lorsque l'abscisse de convergence de la série (10) vérifiant la condition (9) est finie et que les C_n sont réguliers en ce sens que

$$\underline{\lim} \frac{\log C_n}{\lambda_n} = \overline{\lim} \frac{\log C_n}{\lambda_n},$$

il suffit que $\mu_n \log_2 \mu_n : \lambda_n$ tende vers zéro pour que les domaines de convergence des séries (8) et (10) coïncident, car il suffit alors que le terme général de la série (11) tende vers zéro, les autres conditions restant les mêmes.

On remarquera que dès que le rapport $\mu_n : \lambda_n$ reste supérieur à un nombre fixe à partir d'une valeur de n, la proposition énoncée n'est plus vraie, il n'y a plus de relation simple entre les domaines de convergence des séries (8) et (10).

Nous supposerons désormais que la condition imposée à la série (12) est remplie. Lorsque le point z s'éloigne indéfiniment en restant dans un angle aigu A dont la bissectrice est Ox, la fonction $\varphi(z)$ converge uniformément vers zéro, on en déduit qu'une série de la forme (8) ne peut représenter zéro si elle possède un domaine de convergence; le développement d'une fonction en série de la forme (8) est unique (les λ_n étant arbitraires). Dans un angle tel que A et intérieur au domaine de convergence, $\varphi(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros. Ces propriétés subsistent si l'on remplace l'angle A par un domaine limité par deux arcs de courbe du genre exponentiel.

La série (8) ne converge uniformément sur aucune droite $x = \text{const.}$ Sur une telle droite intérieure au demi-plan de convergence $x > \alpha$, $\varphi(z)$ est inférieur à la somme d'une fonction entière en $|y|$

$$\Sigma\, |y|^{\mu_n} e^{(\alpha+\varepsilon-x)\lambda_n}$$

dans laquelle la sommation est effectuée pour la suite des indices n tels que $\mu_{n+1} > \mu_n$. Comme $\mu_n \log_2 \mu_n : \lambda_n$ tend toujours vers zéro, on voit que, dans tous les cas,

$$\lim_{|y|=\infty} \frac{\log_3 |\varphi(x+iy)|}{\log |y|} = 0,$$

c'est la seule propriété générale de la fonction $\varphi(x+iy)$, la quantité sous le signe lim peut effectivement tendre vers zéro aussi lentement que l'on veut. Pour chaque classe de séries correspondant à des λ_n donnés et à des μ_n bornés par une fonction donnée, on aura une limitation particulière, ainsi, pour les séries du n° 3, on trouve

$$\overline{\lim_{|y|=\infty}} \frac{\log |\varphi(x+iy)|}{\log |y| \log_2 |y|} \leq \frac{P}{\log \sigma}.$$

5. Il résulte de ce qui précède que la formule de Cahen-Hadamard [1] pourra être étendue à certaines séries (8), celles

[1] Pour la démonstration de cette formule dans le cas général, *voir* le Mémoire de M. Perron, *Journal für die Math.*, t. 134.

pour lesquelles, en outre de la condition relative à la série (12), $\mu_n \log \mu_n : \lambda_n$ restera borné. $\varphi(x+iy)$ sera alors inférieur à une fonction entière d'ordre fini dont l'ordre ρ sera aussi petit que l'on voudra pourvu que x soit assez grand. On se placera sur une droite $x = x_0 > 0$ sur laquelle l'ordre ρ sera inférieur à 1 et l'on introduira la fonction entière auxiliaire

$$\Phi(z) = \prod_1^{\infty} (1 + z n^{-\beta}) \qquad \left(1 < \beta < \frac{1}{\rho}\right) \quad [1].$$

On sait que cette fonction jouit des propriétés suivantes : on a uniformément pour v compris dans un intervalle intérieur à $-\pi, +\pi$

$$\left| \log |\Phi(re^{iv})| - \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\beta}} r^{\frac{1}{\beta}} \cos\frac{v}{\beta} \right| < k$$

et

$$\log |\Phi(re^{iv})| > -2r^{\frac{1}{\beta}}$$

pour les autres valeurs de v et pour $r = n + \frac{1}{2}$. Il résulte de là que, c étant positif et p entier quelconque,

$$I_p(u) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{z^p e^{zu}}{\Phi(z)} dz = 0$$

lorsque u est négatif ou nul, tandis que pour u positif et p positif ou nul

$$I_p(u) = 2i\pi \sum_1^{\infty} \frac{(-n)^{p\beta} e^{-n^{\beta}u}}{\Phi'(-n^{\beta})} = \frac{d^p}{du^p}[I_0(u)].$$

Pour u positif et p négatif, $I_p(u)$ est la primitive d'ordre $-p$ de $I_0(u)$ augmentée des termes provenant du résidu à l'origine de la fonction sous le signe d'intégration. D'autre part, la série obtenue en divisant le module de chaque terme de $\varphi(z)$ par $|\Phi(z)e^{-uz}|$ converge quel que soit y pour $x = c \geqq x_0$ et est intégrable, ce

---

[1] On pourra employer toute autre fonction d'ordre inférieur à 1 ou même des fonctions d'ordre 1 et genre 0 jouissant de propriétés analogues.

qui permet l'intégration terme à terme et donne la formule

$$\text{(13)} \qquad \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\varphi(z)e^{zu}}{\Phi(z)}\,dz = \sum_{\lambda_n \leqq u} \left[\sum_{1}^{\mu_n} c_n^p \mathrm{I}_p(u-\lambda_n) \right],$$

c_n^p étant le coefficient de z^p dans $c_n(z)$. Cette formule permet le calcul des c_n^p lorsque $\varphi(z)$ est donné : on peut donner pour chaque valeur de n, $\mu_n + 1$ valeurs à u (comprises entre λ_n et λ_{n+1}) les égalités obtenues donnent les coefficients de $c_n(z)$ lorsque ceux des polynomes précédents sont déjà connus. Le déterminant des c_n^p est en effet le déterminant de Wronski des $\mathrm{I}_0(u + u_i - \lambda_n)$ pour $u = 0$ et ce déterminant n'est pas nul si les u_i sont convenablement choisis car les fonctions $\mathrm{I}_0(u + h_i)$ ne peuvent être dépendantes si les h_i sont distincts, la somme

$$\Sigma \nu_i \mathrm{I}_0(u + h_i)$$

étant une série de Dirichlet en u qui ne représente zéro que si ses coefficients sont nuls, donc si

$$\Sigma \nu_i e^{-h_i n^\beta}$$

est nul pour tous les n positifs entiers, ce qui est manifestement impossible.

6. Pour une série de Dirichlet (10) absolument quelconque, on aura de même

$$\sum_{\lambda_n < u} \mathrm{C}_n \mathrm{I}_{-2}(u - \lambda_n) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\varphi(z)e^{zu}}{z^2\Phi(z)}\,dz,$$

$\varphi(z)$ désignant encore la somme de la série, pourvu que c soit positif et supérieur à l'abscisse de convergence. Ici on a

$$\mathrm{I}_{-2}(u) = 2i\pi \left[\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-n^\beta u}}{n^{2\beta}\Phi'(-n^\beta)} + u - \Phi'(0) \right].$$

On en déduit que, dès que c est supérieur à l'abscisse de convergence et à x_0, x_0 étant d'ailleurs quelconque, on a

$$\sum_{\lambda_n \leqq u} \mathrm{C}_n e^{-\lambda_n z_0} \mathrm{I}_{-2}(u - \lambda_n) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\varphi(z)e^{(z-z_0)u}}{(z-z_0)^2\Phi(z-z_0)}\,dz.$$

On peut remplacer la dernière intégrale par une autre prise sur une droite d'abscisse c' inférieure à x_0 mais supérieure à $x_0 - 1$ pourvu que, dans la bande $c' \leqq x \leqq c$, $\varphi(z)$ vérifie uniformément une inégalité convenable : il suffit que

$$\log|\varphi(z)| < \frac{1}{2}|y|^{\frac{1}{\beta}} \cos\frac{\pi}{2\beta}; \tag{14}$$

et à condition d'introduire le résidu au point z_0 de la quantité sous le signe d'intégration. La nouvelle intégrale est alors égale à

$$\sum_{\lambda_n \leqq u} C_n e^{-\lambda_n z_0} I_{-2}(u - \lambda_n) - 2i\pi[u\varphi(z_0) + \varphi'(z_0) - \Phi'(0)\varphi(z_0)]$$

et elle reste inférieure à un nombre indépendant de z_0 et u lorsque z_0 est intérieur à un domaine fini complètement intérieur à la bande $c' \leqq x \leqq c' + 1$ puisque le coefficient de u dans l'exponentielle est alors négatif. En divisant l'égalité par u et faisant croître u indéfiniment, on obtient une nouvelle expression de $\varphi(z_0)$ lorsque z_0 est dans le domaine de convergence, car l'inégalité (14) est alors vérifiée, on a

$$\varphi(z_0) = \lim_{u=\infty} \frac{1}{2i\pi u} \sum_{\lambda_n \leqq u} C_n e^{-\lambda_n z_0} I_{-2}(u - \lambda_n). \tag{15}$$

Supposons maintenant que la somme $\varphi(z)$ de la série soit prolongeable dans le demi-plan $x > d$, d étant inférieur à l'abscisse de convergence, et vérifie uniformément l'inégalité (14); on peut appliquer le résultat précédent en prenant une suite de bandes de largeur moindre que 1 empiétant les unes sur les autres et dont la plus à droite empiète sur le demi-plan de convergence : l'égalité (15) a encore lieu uniformément dans tout domaine borné complètement intérieur au demi-plan $x > d$. On est ainsi conduit à une méthode de sommation par les moyennes, sur laquelle je n'insisterai pas, qui est plus puissante que la méthode des moyenne typiques M. M. Riesz, mais qui est moins puissante que la méthode d'Abel employée par M. Hardy (¹). L'intérêt de cette

(¹) *Voir* l'Ouvrage de MM. Hardy et Riesz, *The general theory of Dirichlet's series* et le Mémoire de M. Hardy du *Quarterly Journal*, t. 47, 1916. La méthode de M. Hardy s'applique à toutes les séries de Dirichlet possédant un domaine de convergence *ordinaire* (*voir* mon fascicule sur les *Séries de Dirichlet* dans le *Mémorial des Sciences mathématiques*).

méthode est de s'appliquer aux séries de la forme (8) et de donner le prolongement de ces séries dans le demi-plan où (14) est vérifiée (en supposant qu'un tel demi-plan existe). Par exemple, si la fonction $H(z)$ du n° 3 est holomorphe à l'origine et si tous les zéros de $a(z)$ sont dans Δ, la condition (14) est réalisé quel que soit d, $H(z)$ est une fonction entière et l'on a

$$H(z) = \lim_{u=\infty} \frac{1}{2i\pi u} \sum_{\lambda_n \leqq u} \left[e^{-\lambda_n z} \sum_{1}^{\mu_n} \frac{c_n^{(p)}(z)}{p!} I_{p-2}(u-\lambda_n) \right].$$

Les théorèmes généraux de M. Ostrowski sur les suites de fonctions (¹) s'appliquent aussi aux séries du type (8) satisfaisant aux conditions données plus haut. Notamment, dès que $n : \log\lambda_n$ tend vers zéro, on peut trouver une suite d'entiers n_q pour lesquels $\lambda_{n_q} : \lambda_{n_q+1}$ tend vers zéro, la somme des n_q premiers termes de $\varphi(z)$ converge alors vers la fonction définie par $\varphi(z)$, fonction qui est uniforme, dans tout le domaine d'existence de cette fonction. En particulier, lorsque $\lambda_n : \lambda_{n+1}$ tend vers zéro, le demi-plan de convergence de $\varphi(z)$ est le domaine naturel d'existence de cette fonction.

7. La méthode du n° 3 conduit à un résultat lorsque $a(z)$ est une fraction rationnelle. On a

$$c_n(z) = \Sigma\, b^m \sigma^q a(z) a^{(r_1)}(z\sigma) \ldots a^{(r_{n-2})}(z\sigma^{n-2}).$$

la somme contient $(n-1)!$ termes, m est au plus égal à $n-1$, q au plus égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, chaque indice de dérivation r_i est au plus égal à i. D'autre part, en supposant pour fixer les idées que le dénominateur $Q(z)$ de $a(z)$ n'a que des zéros simples, le dénominateur de $c_n(z)$ est

$$Q_n(z) = Q(z)[Q(z\sigma)]^2 \ldots [Q(z\sigma^{n-2})]^{n-1}.$$

Considérons un point z distinct des zéros de $Q(z)$ et des transformés de ces zéros par les substitutions $(z, z\sigma^{-n})$ transformés qui

(¹) *Abhand. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ.*, t. I, 1922.

tendent vers l'origine. En écrivant $a(z)$ sous la forme

$$a(z) = \mathrm{E}(z) + \sum \frac{1}{z - a_i},$$

et en désignant par P le degré de la partie entière $\mathrm{E}(z)$, on a

$$|a^{(r)}(z\sigma^s)| < \mathrm{K}\,|z\sigma^s|^{\mathrm{P}-r} + \mathrm{K}_1 \qquad \text{si } r < \mathrm{P}$$
$$|a^{(r)}(z\sigma^s)| < \mathrm{K}_1 \qquad \text{si } r \geqq \mathrm{P} \quad \text{et} \quad s \geqq r,$$

K et K_1 ne dépendant pas de r et s (mais dépendant de z). C'est le terme pour lequel tous les r_i sont nuls qui est prépondérant dans $c_n(z)$, le module de ce terme est borné par une expression de même forme que si $a(z)$ se réduisait à $\mathrm{E}(z)$. *La fonction* $\mathrm{H}(z)$ *définit encore une fonction holomorphe dans* Δ *sauf aux zéros des polynomes* $\mathrm{Q}(z\sigma^q)$ *qui sont des pôles dont le degré de multiplicité est égal au degré de multiplicité dans* $\mathrm{Q}(z)$ *augmenté de* q *unités.*

En désignant par $\mathrm{P}(z)$ et $\mathrm{P}_n(z)$ les numérateurs de $a(z)$ et $c_n(z)$ et en supposant que les termes de plus haut degré dans les polynomes $\mathrm{Q}(z)$ et $\mathrm{P}(z)$ sont respectivement z^q et $\mathrm{A}z^p$, on voit que le terme de plus haut degré dans $\mathrm{Q}_n(z)$ est

$$q_n(z) = z^{q_{n+1}}\sigma^{s_n}$$

avec

$$q_n = q\,\frac{(n-1)(n-2)}{2}, \qquad s_n = q[2 + 3.2 + \ldots + (n-1)(n-2)],$$

et qu'on a

$$\mathrm{Q}_n(z) = q_n(z)(1+\varepsilon_n)^{n^2}, \qquad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Dans le numérateur $\mathrm{P}_n(z)$ le terme de plus haut degré $p_n(z)$ est donné par les égalités

$$p_2(z) = \mathrm{A}bz^p, \qquad p_n(z) = \mathrm{A}b\sigma^{n-2+q_n}z^{p+q(n-2)}p_{n-1}(z\sigma),$$

ce qui fait

$$p_n(z) = (\mathrm{A}b)^{n-1}\sigma^{t_n}z^{p_n}$$

avec

$$p_n = q_n + p(n-1),$$

$$t_n = \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{2}s_{n-1} + (p+1)\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Par suite, si l'on entoure les zéros de $p_n(z)$ de cercles Γ_n ayant pour centres ces points et pour rayon σ^{-p_n}, on aura à l'extérieur de ces cercles

$$|c_n(z)| > \sigma^{-hn^4},$$

h étant un nombre fixe, ce qui montre encore que, lorsque bz a sa partie réelle positive, la série (7) ne peut converger que pour les points d'un ensemble de mesure linéaire nulle. *le seul domaine de convergence est encore le demi-plan* Δ.

La branche de solution de l'équation (6) ainsi obtenue est nécessairement distincte de la branche holomorphe à l'origine lorsque $a(o)$ n'est ni nul ni infini et qu'un pôle de $a(z)$ est situé dans le demi-plan. Si en outre $\frac{1}{a(z)}$ est un polynome, la branche $H(z)$ est distincte de la solution holomorphe à l'origine qui est une fonction entière. En passant à l'équation homogène, on voit que, dans les mêmes conditions, on a obtenu une branche nouvelle de solution et, dans le second cas, une branche de solution nouvelle.

8. Le résultat précédent relatif au domaine de convergence s'étend aux séries de la forme (8) dans lesquelles $c_n(z)$ est une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur ont des degrés vérifiant la condition imposée à μ_n au n° 4 et dont les modules maxima C_n et C'_n des coefficients sont tels que les séries (10) correspondantes admettent pour demi-plan de convergence $x > o$. La série (8) converge alors dans ce demi-plan sauf peut-être en des points appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle, elle définit une fonction holomorphe dans ce demi-plan sauf aux points de l'ensemble en question qui sont des pôles ou points essentiels ou des points limites de tels points ; elle diverge pour $x < o$ sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure linéaire nulle.

9. On peut trouver des développements analogues à ceux étudiés ci-dessus lorsque l'exponentielle du second membre de (6) est remplacée par $d(z)e^{bz^p}$, $d(z)$ étant un polynome et p un entier, développements qui sont valables dans des angles d'ouverture $\frac{\pi}{p}$.

Les développements de cette espèce s'introduisent aussi dans la recherche des solutions des équations fonctionnelles de Poincaré. L'équation

$$(16) \qquad -a(z)f(z\sigma)+f(z)=e^{bz^p},$$

où $a(z)$ est une fraction rationnelle, admet pour solution la série mixte

$$\sum_0^\infty a(z)\,a(z\sigma)\ldots a(z\sigma^{n-1})\,e^{b\sigma^{np}z^p}$$

qui converge et définit une fonction méromorphe dans p angles d'ouverture $\frac{\pi}{p}\cdot$ Dans le cas particulier $a(z)=a=$ const., et $p=1$, on a une série de Dirichlet ordinaire qui admet son demi-plan de convergence pour domaine naturel d'existence, et qui vérifie l'équation différentielle fonctionnelle

$$-\sigma af'(z\sigma)+f'(z)+abf(z\sigma)-bf(z)=0,$$

tandis qu'en général la série obtenue vérifie une équation analogue dont les coefficients sont des polynomes.

On voit que les propriétés des solutions ici envisagées des équations du type (6) sont voisines de celles des équations du type (16); dans le voisinage du point à l'infini c'est la multiplication de z par σ qui joue le rôle prépondérant et non pas le remplacement de la fonction par sa dérivée ou même par une dérivée d'ordre supérieur.