MICHEL PETROVITCH

Sur les intégrales réelles de l'équation linéaire du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 127-134
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__127_0>

SUR LES INTÉGRALES RÉELLES DE L'ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE ;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

1. L'équation

$$y'' = ay \qquad (a = \text{const. réelle}) \tag{1}$$

a ses intégrales oscillantes ou non oscillantes suivant que la constante a est négative ou positive.

Si dans l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}}$$

correspondant à a *positif*, on prend pour constantes d'intégration les constantes x_0 et y_0, liées à C_1 et C_2 par les relations

$$C_1 = \frac{1}{2} y_0 e^{-x_0\sqrt{a}}, \qquad C_2 = \frac{1}{2} y_0 e^{x_0\sqrt{a}},$$

d'où

$$x_0 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{C_2}{C_1}, \qquad y_0 = 2\sqrt{C_1 C_2}; \tag{3}$$

cette intégrale générale s'écrit

$$y = \frac{y_0}{2}(e^{X} + e^{-X}), \tag{4}$$

où

$$X = (x - x_0)\sqrt{a}. \tag{5}$$

La constante x_0, mobile d'une intégrale particulière à une autre, représente, lorsqu'elle est réelle, la valeur de x pour laquelle y atteint son maximum ou minimum unique; la constante y_0 représente la valeur mobile de cet extremum.

Si $y_0 > 0$, l'intégrale y présente au point $x = x_0$ un minimum positif; pour les valeurs $x < x_0$ l'intégrale est positive et constamment décroissante; pour $x > x_0$ elle est positive et constamment croissante.

Si $y_0 < 0$, y présente au point $x = x_0$ un maximum négatif;

pour $x < x_0$ elle est négative et constamment croissante; pour $x > x_0$ elle est négative et constamment décroissante.

Si, maintenant, dans l'intégrale générale

$$y = C_1 \sin x \sqrt{\alpha} + C_2 \cos x \sqrt{\alpha} \qquad (\alpha = -a) \tag{6}$$

de l'équation (1), correspondant à a *négatif*, on prend pour constantes d'intégration les constantes x_0 et y_0, liées à C_1 et C_2 par les relations

$$C_1 = y_0 \sin x_0 \sqrt{\alpha},$$
$$C_2 = y_0 \cos x_0 \sqrt{\alpha},$$

d'où

$$\begin{cases} y_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \\ x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tang} \dfrac{C_1}{C_2}; \end{cases} \tag{7}$$

cette intégrale générale s'écrit

$$y = y_0 \cos Y, \tag{8}$$

où

$$Y = (x - x_0) \sqrt{\alpha}. \tag{9}$$

La constante x_0, toujours réelle, mobile d'une intégrale particulière à une autre, représente la valeur de x pour laquelle y atteint son maximum ou minimum y_0. La courbe intégrale se compose de demi-ondes alternativement positives et négatives, auxquelles correspond une même amplitude y_0. L'intégrale change de signe toutes les fois qu'elle s'annule. L'intervalle des x, séparant deux zéros consécutifs de y, est égal à $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$.

2. *Les faits analogues se présentent dans le cas de l'équation*

$$y'' = f(x) y. \tag{10}$$

Pour le faire voir, soit d'abord (a, b) un intervalle des x dans lequel la fonction $f(x)$ est réelle, finie, continue et *positive*. Soit x_0 une valeur mobile de x, comprise dans cet intervalle, annulant la dérivée y' de l'intégrale y. Comme, d'après (10), y'' et y sont de même signe pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (a, b), l'intégrale y ne peut présenter dans cet intervalle ni des maxima positifs ni des minima négatifs. D'autre part, la valeur $x = x_0$ mobile ne saurait annuler y'', car d'après (10) elle annulerait alors aussi y et serait un zéro multiple de y, et l'on sait que de tels zéros sont fixes. Par suite :

1° Si $y_0 > 0$, y présentera au point $x = x_0$ un minimum positif; pour les valeurs de x comprises entre a et x_0 l'intégrale est positive et constamment décroissante; pour x compris entre x_0 et b elle est positive et constamment croissante;

2° Si $y_0 < 0$, y présentera en $x = x_0$ un maximum négatif; pour x compris entre a et x_0 elle est négative et croissante; pour x compris entre x_0 et b elle est négative et décroissante.

Il s'ensuit que le produit yy' ne change de signe dans l'intervalle (a, b) qu'au point $x = x_0$.

En multipliant l'équation (10) par $y'\,dx$, intégrant entre les limites

$$x \quad \text{et} \quad x_0, \qquad \text{où} \qquad a < x < x_0,$$

et en tenant compte de ce que $y'_0 = 0$ on obtient

$$(11) \qquad -\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x) yy'\,dx,$$

d'où

$$(12) \qquad y'^2 = f(\xi)(y^2 - y_0^2) \qquad (x < \xi < x_0),$$

et par suite

$$(13) \qquad y = \frac{y_0}{2}(e^{X} + e^{-X}),$$

où

$$(14) \qquad X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(\xi)}\,dx = (x - x_0)\sqrt{f(\theta)} \qquad (x < \theta < x_0).$$

Si, maintenant, l'équation (10) étant multipliée par $y'\,dx$, on l'intègre entre les limites

$$x_0 \quad \text{et} \quad x, \qquad \text{où} \qquad x_0 < x < b;$$

on obtient

$$(15) \qquad \frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x) yy'\,dx,$$

d'où l'on tire encore les formules (13) et (14) avec $x_0 < \theta < x$.

D'où la proposition suivante :

Toute intégrale réelle de l'équation

$$y'' = f(x)y, \tag{16}$$

dont la dérivée première s'annule en un point x_0 situé dans un intervalle (a, b) de x, dans lequel la fonction $f(x)$ est positive, peut s'écrire sous la forme

$$y = \frac{y_0}{2}(e^{X} + e^{-X}), \tag{17}$$

où

$$X = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)}, \tag{18}$$

ξ étant une valeur comprise entre x_0 et x, et cela pour toute valeur $a < x < b$.

Comme la dérivée de l'intégrale (17) ne change de signe que pour $x = x_0$, on en conclut que :

Pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b), l'intégrale y est constamment comprise entre

$$\frac{y_0}{2}(e^{X_1} + e^{-X_1}) \quad \text{et} \quad \frac{y_0}{2}(e^{X_2} + e^{-X_2}), \tag{19}$$

où

$$X_1 = (x - x_0)\sqrt{N}, \qquad X_2 = (x - x_0)\sqrt{M}, \tag{20}$$

N et M désignant une limite inférieure et une limite supérieure de $f(\xi)$ pour les valeurs comprises entre x_0 et x, et cela pour toute valeur de x telle que $a < x < b$.

3. Soit maintenant (a, b) un intervalle des x dans lequel la fonction $f(x)$ est réelle, finie, continue et *négative*. On sait que, dans ce cas, l'intégrale y change de signe chaque fois qu'elle s'annule, et que, l'intervalle (a, b) étant suffisamment étendu, la courbe intégrale y est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives.

Envisageons d'abord une demi-onde *positive*. D'après l'équation (10) même, la dérivée y'' étant négative tout le long d'une telle demi-onde, celle-ci ne peut présenter qu'un seul maximum.

Soient $x = x_0$ la valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint, x_1 et x_2 les valeurs de x définissant les deux extrémités de la demi-onde.

Lorsque x varie de x_1 à x_0, l'ordonnée y est constamment positive et croissante; pour x variant de x_0 à x_2 elle est constamment positive et décroissante. Dans chacun des deux intervalles (x_1, x_2) et (x_0, x_2) le produit yy' garde un signe invariable.

Considérons la courbe intégrale dans l'intervalle (x_1, x_0). En multipliant l'équation (10) par $y'\,dx$ et intégrant entre les limites

$$x \quad \text{et} \quad x_0, \qquad \text{où} \qquad x_1 < x < x_0,$$

on obtient

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x)yy'\,dx = (y_0^2 - y^2)\lambda, \tag{21}$$

où λ est une valeur que prend $f(t)$ pour t compris entre x et x_0. On en tire

$$y = y_0 \cos \mathrm{X}, \tag{22}$$

où

$$\mathrm{X} = (x - x_0)\sqrt{-f(\xi)}, \tag{23}$$

ξ étant une valeur comprise entre x et x_0, et cela pour toute valeur de x telle que $x_1 < x < x_0$.

Si l'on considère la courbe intégrale dans l'intervalle (x_0, x_2), en multipliant (10) par $y'\,dx$ et intégrant entre les limites

$$x^0 \quad \text{et} \quad x, \qquad \text{où} \qquad x_0 < x < x_2,$$

on obtient

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)yy'\,dx = (y^2 - y_0^2)\,\mu, \tag{24}$$

où μ est une valeur que prend $f(t)$ pour t compris entre x_0 et x. On en tire une équation de la forme (22) valable pour toute valeur de x telle que $x < x < x_2$.

Donc : chaque demi-onde positive peut s'écrire sous la forme (22) et cela pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (a, b).

Envisageons maintenant une demi-onde *négative*. La dérivée y''

étant positive tout le long d'une telle demi-onde, celle-ci ne peut présenter qu'un seul minimum. Soient x_1 et x_2 les abscisses extrêmes, et x_0 l'abscisse du minimum de cette demi-onde. Lorsque x varie de x_1 à x_0, l'ordonnée y est constamment négative et décroissante; pour x variant de x_0 à x_2 elle est constamment négative et croissante. Dans chacun des deux intervalles (x_1, x_0) et (x_0, x_2) le produit yy' garde donc un signe invariable. On s'assure alors de la même manière que tout à l'heure que la demi-onde négative peut aussi être représentée par la formule (22) pour toutes les valeus de x telles que $x_1 < x < x_2$.

D'où la proposition suivante :

Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, de l'intégrale y, comprise dans un intervalle (a, b) de x dans lequel la fonction $f(x)$ est négative, peut s'écrire sous la forme

$$y = y_0 \cos X, \qquad X = (x - x_0)\sqrt{-f(\xi)}, \tag{25}$$

où ξ est une valeur comprise entre x_0 et x.

Il s'ensuit que la demi-onde est tout entière comprise entre les deux courbes

$$y = y_0 \cos X_1 \qquad \text{et} \qquad y = y_0 \cos X_2, \tag{26}$$

où

$$X_1 = (x - x_0)\sqrt{N}, \qquad X_2 = (x - x_0)\sqrt{M}, \tag{27}$$

N et M désignant une limite inférieure et une limite supérieure de $-f(x)$ pour x variant de x_1 à x_2.

De (25) on tire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{-f(\xi)}}, \\ x_2 &= x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{-f(\xi)}}, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

ce qui montre que *la longueur $(x_2 - x_1)$ d'une demi-onde quelconque est plus grande que $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, et plus petite que $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$.*

En prenant dour N et M une limite inférieure et une limite supérieure de $-f(x)$ dans tout l'intervalle (a, b), on voit que :

Le nombre de demi-ondes contenues dans l'intervalle (a, b) *est au moins égal au nombre d'unités entières contenues dans la valeur*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} - 1 \tag{29}$$

et au plus égal au nombre d'unités entières contenues dans la valeur

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}, \tag{30}$$

ce qui est bien conforme aux résultats connus de Sturm.

On retrouve, d'ailleurs, par la même voie, les autres propositions de Sturm relatives à l'équation linéaire homogène du second ordre.

4. Ce qui précède s'applique également à l'équation

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0. \tag{31}$$

Celle-ci, par la substitution connue

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int \varphi dx}, \tag{32}$$

se transforme en

$$z'' = f(x)\, z, \tag{33}$$

où la fonction f est de la forme

$$f(x) = \frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi'}{2} - \psi, \tag{34}$$

d'où l'on conclut que :

Toute intégrale réelle de l'équation (31) *telle que la dérivée première de*

$$y e^{\frac{1}{2}\int \varphi dx} \tag{35}$$

s'annule en un point $x = x_0$ situé dans un intervalle (a, b) *dans lequel la fonction* (34) *est positive, se laisse écrire sous la forme*

$$y = \frac{y_0}{2}(e^{X} + e^{-X})e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\varphi\,dx} \tag{36}$$

avec

$$X = (x - x_0)\sqrt{f(\xi)}, \tag{37}$$

où ξ est une valeur comprise entre x_0 et x, pour toute valeur $a < x < b$.

La courbe intégrale est comprise entre les deux courbes de la forme (36) où X a respectivement l'une et l'autre des deux valeurs

$$(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{et} \quad (x - x_0)\sqrt{M}, \tag{38}$$

M et N ayant les significations précédentes.

Enfin, lorsque la fonction $f(x)$ est *négative* dans l'intervalle considéré (a, b), la courbe intégrale est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives.

Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, peut s'écrire sous la forme

$$y = y_0\, e^{-\frac{1}{2}\int\varphi\,dx} \cos X \tag{40}$$

avec

$$X = (x - x_0)\sqrt{-f(\xi)},$$

où ξ est une valeur comprise entre x_0 et x.

Le nombre de demi-ondes, contenues dans l'intervalle (a, b), est fourni par la proposition précédente, dans laquelle les nombres N et M doivent se rapporter à la fonction $f(x)$ définie par (34),

Nous remarquerons encore que ces considérations s'appliquent également à des types d'équations *non linéaires*, ce qui fera l'objet d'un autre travail.