J. KAUCKÝ

Sur la réduction de certaines sommes de la théorie des différences

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 74-79

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__74_1>

SUR LA RÉDUCTION DE CERTAINES SOMMES DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

PAR M. JOS. KAUCKÝ.

1. Désignons avec M. Nörlund la différence du premier ordre par le symbole

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega},$$

et la moyenne du premier ordre par le symbole

$$\underset{\omega}{\nabla} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2};$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ étant des nombres positifs quelconques, on détermine la différence et la moyenne d'ordre n par les équations

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta}} F(x) = \underset{\omega_n}{\Delta}\left[\overset{n-1}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}{\Delta}} F(x)\right],$$

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} F(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\left[\overset{n-1}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}{\nabla}} F(x)\right].$$

Dans divers Mémoires ([1]), M. Nörlund a étudié la somme de première espèce et d'ordre n

$$G_n(x) = \mathbf{S}\, \varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} x$$

([1]) *Voir* N.-E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Berlin. 1924).

et la somme de seconde espèce et d'ordre n

$$F_n(x) = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \dots \omega_n}^{n} z,$$

qui satisfont aux équations suivantes :

$$\mathop{\nabla}_{\omega_1 \dots \omega_n}^{n} G_n(x) = \varphi(x),$$

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1 \dots \omega_n}^{n} F_n(x) = \varphi(x).$$

Si $\omega_1 = \omega_2, \dots = \omega_n = \omega$, on écrit plus brièvement

$$\mathop{\Delta}_{\omega}^{n} F(x), \quad \mathop{\nabla}_{\omega}^{n} F(x), \quad \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega}^{n} x, \quad \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega}^{n} z.$$

2. Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux polynomes et supposons qu'on peut écrire la décomposition suivante

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_\nu(x)}{F_\nu(x)},$$

où $F_\nu(x)$ sont les diviseurs de $F(x)$. θ étant une opération distributive quelconque, considérons l'équation fonctionnelle symboliquement écrite

$$(2) \qquad F(\theta) y(x) = f(\theta) \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée. Soient $y_\nu(x)$ les solutions des équations

$$(3) \qquad F_\nu(\theta) y_\nu(x) = f_\nu(\theta) \varphi(x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

on peut poser

$$(4) \qquad y(x) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(x).$$

Pour démontrer l'affirmation précédente, on peut procéder comme il suit.

Posons

$$(5) \qquad \frac{F(x)}{F_\nu(x)} = \overline{F_\nu}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n);$$

en multipliant l'équation (1) par $\overline{F}_1(x)$, nous obtenons l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{n} \overline{F}_\nu(x) f_\nu(x) = f(x). \tag{6}$$

Mais on obtient manifestement aussi une identité si, en remplaçant x par θ dans (6), on applique tous deux côtés de l'équation ainsi obtenue sur une fonction $\varphi(x)$. On a donc

$$\sum_{\nu=1}^{n} \overline{F}_\nu(\theta) f_\nu(\theta)\,\varphi(x) = f(\theta)\,\varphi(x). \tag{6'}$$

Appliquons maintenant sur l'équation (3) l'opération $\overline{F}_\nu(\theta)$ en faisant compte de (5); nous avons

$$F(\theta) y_\nu(x) = \overline{F}_\nu(\theta) f_\nu(\theta)\,\varphi(x),$$

dont la sommation, en regardant (6'), nous donne enfin

$$F(\theta) \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(x) = f(\theta)\,\varphi(x).$$

Le théorème est ainsi démontré.

En écrivant encore les équations (2) et (3) symboliquement

$$y(x) = \frac{f(\theta)}{F(\theta)}\,\varphi(x), \tag{7}$$

$$y_\nu(x) = \frac{f_\nu(\theta)}{F_\nu(\theta)}\,\varphi(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{7'}$$

on peut donner à l'équation (4) la forme suivante :

$$\frac{f(\theta)}{F(\theta)}\,\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_\nu(\theta)}{F_\nu(\theta)}\,\varphi(x) \quad (^1). \tag{8}$$

3. Pour aller plus loin, considérons l'équation

$$\left(\underset{\omega}{\Delta} - r\right) y(x) = \underset{\omega}{\Delta} y(x) - r y(x) = \varphi(x), \tag{9}$$

---

(1) A. Cauchy indiqua, pour quelques cas spéciaux de θ, cette formule dans son Mémoire : *Sur l'emploi des équations symboliques dans le calcul infinitésimal et dans le calcul aux différences finies* (*Œuvres* (I), t. VIII, p. 28); mais la démonstration de Cauchy n'est pas complète.

r étant une constante, $\varphi(x)$ une fonction donnée. On peut vérifier aisément que l'équation précédente a la solution particulière

$$(10)\qquad y(x) = \frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\Delta} - r} = \underset{a}{\overset{x}{S}} (1 + r\omega)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z;$$

car, en remarquant que (9) dans le cas $\varphi(x) \equiv 0$, a la solution

$$u(x) = (1 + r\omega)^{\frac{x}{\omega}},$$

et en posant

$$y(x) = c(x)\, u(x),$$

on obtient pour $c(x)$ l'équation

$$\underset{\omega}{\Delta}\, c(x) = \frac{\varphi(x)}{u(x+\omega)}.$$

4. Considérons maintenant l'équation

$$(11)\qquad \left(\underset{\omega}{\nabla} - r\right) y(x) = \underset{\omega}{\nabla} y(x) - r y(x) = \varphi(x);$$

une solution particulière est

$$(12)\qquad y(x) = \frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\nabla} - r} = \frac{2}{\omega} \underset{a}{\overset{x}{S}} (2r - 1)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z,$$

car on peut écrire (11) sous la forme

$$\left[\underset{\omega}{\Delta} - \frac{2(r-1)}{\omega}\right] y(x) = \frac{2}{\omega} \varphi(x).$$

En posant $r = 0$ dans (11) et (12), on obtient

$$(13)\qquad S\, \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \frac{2}{\omega} \underset{a}{\overset{x}{S}} (-1)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z.$$

5. Supposons, pour plus de commodité, le degré de $f(x)$ inférieur à celui de $F(x)$ et considérons au lieu de (1) la décomposition en fractions simples

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \mathcal{E} \frac{1}{x - r} \left[\frac{f(r)}{F(r)}\right],$$

où la somme $\mathcal{E}$ ne comprend que les résidus de $\frac{f(r)}{(x-r)F(r)}$ relatifs aux pôles de $\frac{f(r)}{F(r)}$.

On aura au lieu de (8)

$$\frac{f(\theta)}{F(\theta)}\varphi(x) = \mathcal{E}\,\frac{\varphi(x)}{\theta - r}\left[\frac{f(r)}{F(r)}\right], \tag{14}$$

où, d'après ce qui précède, le symbole

$$\frac{\varphi(x)}{\theta - r}$$

signifie la solution de l'équation

$$(\theta - r)y(x) = \varphi(x).$$

Dans le cas $f(x) = 1$, $F(x) = x^n$, nous obtenons enfin

$$\frac{\varphi(x)}{\theta^n} = \mathcal{E}\,\frac{\varphi(x)}{\theta - r}\left[\frac{1}{r^n}\right]. \tag{15}$$

6. Posons

$$\theta = \underset{\omega}{\Delta}.$$

En remarquant que

$$\frac{\varphi(x)}{\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}} = \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} z,$$

on obtient, en tenant compte de (10),

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} z &= \mathop{\mathbf{S}}_a^x \left\{ \mathcal{E}\,(1 + r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\left[\frac{1}{r^n}\right]\right\}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\mathop{\mathbf{S}}_a^x (x - z - \omega)(x - z - 2\omega)\ldots \\ &\qquad \times [x - z - (n-1)\omega]\,\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z.\end{aligned} \tag{16}$$

7. D'une manière tout à fait analogue, pour

$$\theta = \underset{\omega}{\nabla},$$

on obtient la relation suivante :

$$(17)\quad \underset{\omega}{\mathbf{S}}\varphi(x)\overset{n}{\nabla}x = \frac{2}{\omega}\mathbf{S}_a^x\left\{\mathcal{L}(1-2r)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\left[\frac{1}{r^n}\right]\right\}(-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{2}{\omega}\right)^n$$
$$\times \mathbf{S}_a^x (x-z-\omega)\ldots[x-z-(n-1)\omega](-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z.$$

8. On peut simplifier encore l'équation précédente. Posons d'abord $(n+1)$ au lieu de n dans (17) et remarquons qu'on a

$$(x-z-\omega)(x-z-2\omega)\ldots(x-z-n\omega)$$
$$=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}x(x-\omega)\ldots[x-(n-s-1)\omega](z+\omega)\ldots(z+s\omega)$$

On trouvera enfin

$$(18)\quad \underset{\omega}{\mathbf{S}}\varphi(x)\overset{n+1}{\nabla}x$$
$$=\left(\frac{2}{\omega}\right)^n\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}x(x-\omega)\ldots[x-(n-s-1)\omega]\,G_{1,s}(x),$$

où l'on a posé, en tenant compte de (13),

$$G_{1,s}(x) = \frac{2}{\omega}\mathbf{S}_a^x(z+\omega)\ldots(z+s\omega)(-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z$$
$$= \mathbf{S}(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+s\omega)\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla} x.$$

9. Il est nécessaire de remarquer que M. Nörlund, par une voie tout à fait différente, démontra les formules (16) et (18) dans son travail : *Remarques diverses sur le calcul aux différences finies* [1].

---

[1] *Journal de Math.*, 9e série, t. II, 1923. Cauchy indiqua une formule de réduction pour la somme $\sum_{x_0}^{x}\ldots\sum_{x_0}^{x}f(x)$, mais cette formule n'est pas exacte voir *loc. cit.*, p. 34 (25).