BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. VAROPOULOS

Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes et de leurs dérivées

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 23-34

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__23_1>

SUR LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES ET DE LEURS DÉRIVÉES;

PAR M. TH. VAROPOULOS.

1. Dans la première partie de ce travail, j'établis un théorème qui concerne la limite supérieure du nombre de valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes à un nombre fini de branches.

Ce théorème fournit une limite supérieure plus avantageuse que celle du théorème démontré par M. Rémoundos dans sa Thèse [1]. Elle tient compte des relations linéaires à coefficients

[1] Sur les zéros d'une classe des fonctions transcendantes, Paris, 1906.

constants qui peuvent exister entre les coefficients $A_i(x)$ de l'équation

$$u^\nu + A_1(x)\, u^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = 0,$$

qui définit l'algébroïde. Ces relations jouent un rôle essentiel.

Lorsqu'une fonction entière admet une valeur exceptionnelle, sa dérivée admet la valeur zéro comme valeur exceptionnelle. Il n'en est plus ainsi en général pour une algébroïde d'ordre ν admettant ν valeurs exceptionnelles.

Dans la deuxième partie de ce travail, j'établis une condition suffisante pour que la dérivée d'une fonction multiforme à un nombre fini de branches admette la valeur zéro comme valeur exceptionnelle.

Ce travail est le développement de deux Notes insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris : *Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes* (30 juillet 1923); *Sur les dérivées des fonctions multiformes* (29 septembre 1924).

J'exprime ici mes vifs remerciements à M. Paul Montel qui s'est beaucoup intéressé à mes recherches et à qui je dois des remarques très utiles.

2. Considérons une fonction multiforme ayant ν branches, définie par une équation de la forme

$$f(x, u) \equiv u^\nu + A_1(x)\, u^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = 0, \tag{1}$$

où $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ désignent des fonctions entières de x.

Suivant l'expression classique, appelons *valeur exceptionnelle* de la fonction $u(x)$ définie par l'équation (1) toute valeur u_0 telle que l'équation

$$u(x) = u_0$$

n'admette qu'un nombre fini de racines : il est évident qu'il en sera de même pour l'équation

$$f(x, u_0) = 0.$$

Entre les coefficients $A_i(x)$, il peut exister des relations linéaires à coefficients constants; soit λ le nombre de ces relations qui sont indépendantes : on sait que ce nombre λ ne peut dépasser $\nu - 1$.

Nous démontrerons que *le nombre total des valeurs exceptionnelles n'est jamais supérieur à* $\nu+\lambda+1$ *l'infini compris*.

Pour fixer les idées, nous nous bornerons au cas où l'ordre des fonctions entières $A_i(x)$ est fini. Nous pouvons exprimer les ν fonctions $A_i(x)$ linéairement au moyen de $\nu-\lambda$ d'entre elles.

Posons

$$A_i(x) = a_{i1}g_1(x) + a_{i2}g_2(x) + \ldots + a_{i\rho}g_\rho(x) + a_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, \nu; \qquad \rho = \nu - \lambda$$

$a_i, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\rho}$ étant des constantes et $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_\rho(x)$ des fonctions linéairement indépendantes.

J'entends par là, qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants de la forme

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots + c_\rho g_\rho(x) \equiv c.$$

L'équation (1) prend la forme

$$f(x, u) \equiv p_0(u) + g_1(x)p_1(u) + g_2(x)p_2(u) + \ldots + g_\rho(x)p_\rho(u) = 0,$$

où

$$p_0(u) = u^\nu + a_1 u^{\nu-1} + \ldots + a_\nu,$$
$$p_j(u) = a_{1j}u^{\nu-1} + a_{2j}u^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu j}; \qquad j = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Il est clair que si une valeur u_0 rend $f(x, u_0)$ constant, comme $g_1, g_2, \ldots, g_\rho$ sont linéairement indépendantes, elle doit annuler les polynomes $p_j(u)$ et, puisque

$$u^\nu + A_1(x)u^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = p_0(u) + g_1(x)p_1(u) + \ldots + g_\rho(x)p_\rho(u),$$

cette valeur nous donnera une relation linéaire particulière à coefficients constants de la forme

$$u_0^{\nu-1} + A_1(x)u_0^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = \text{const}.$$

Réciproquement : une telle relation, quand elle existe, nous fournit une valeur exceptionnelle du premier type, c'est-à-dire telle que $f(x, u_0) = \text{const}$.

Il est évident que le nombre maximum des valeurs exceptionnelles du premier type est inférieur ou égal à λ. Ce nombre λ ne peut dépasser $\nu-1$, car les polynomes $p_j(u)$, de degré $\nu-1$, ne peuvent s'annuler pour plus de $\nu-1$ valeurs distinctes de u, sans être identiquement nuls. Dans ce cas, on a

$$f(x, u) = p_0(u),$$

et l'algébroïde se réduit à des constantes; on retrouve ainsi un résultat connu.

Je vais montrer que le nombre de toutes les autres valeurs telles que $f(x, u)$ soit un polynome non constant où le produit d'un polynome par une exponentielle ne peut dépasser ν.

Supposons, en effet, qu'il existe $\nu + 1$ telles valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{\nu-1}, \quad u_\nu, \quad u_{\nu+1}.$$

Nous distinguerons deux cas :

1° Il n'y a pas de valeurs u_i pour lesquelles $f(x, u_i)$ soit un polynome; alors, si l'on élimine les $A_i(x)$, ce qui est toujours possible, entre les $\nu + 1$ équations

$$\begin{aligned} &u_1^\nu \;\;\; + A_1(x)\,u_1^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = \varphi_1(x)\,e^{Q_1(x)},\\ &u_2^\nu \;\;\; + A_1(x)\,u_2^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = \varphi_2(x)\,e^{Q_2(x)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &u_{\nu+1}^\nu + A_1(x)\,u_{\nu+1}^{\nu-1} + \ldots + A_\nu(x) = \varphi_{\nu+1}(x)\,e^{Q_{\nu+1}},\end{aligned}$$

on aura une identité de la forme

$$\lambda_1\varphi_1(x)\,e^{Q_1(x)} + \lambda_2\varphi_2(x)\,e^{Q_2(x)} + \ldots + \lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}(x)\,e^{Q_{\nu+1}(x)} = \lambda_0,$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu+1}$ étant des constantes *différentes de zéro* et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\nu+1}$ des polynomes en x, dont aucun ne se réduit à une constante. Une telle identité est impossible; son impossibilité est un cas particulier d'une proposition fondamentale de M. Borel [1].

2° Il existe des valeurs de u_i pour lesquelles $f(x, u_i)$ est un polynome : leur nombre ne peut dépasser $\nu - 1$, sinon $A_i(x)$ seraient des polynomes et u une fonction algébrique.

Je considère une valeur u_1, il y aura parmi les nombres

$$p_1(u_1), \quad p_2(u_1), \quad \ldots, \quad p_\rho(u_1)$$

---

[1] E. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. 20, 1897).

un au moins, $p_\alpha(u_1)$ par exemple, qui est différent de zéro, sinon u_1 serait une valeur exceptionnelle du premier type.

Je forme l'équation

$$\begin{vmatrix} p_\alpha(u_1) & p_\beta(u_1) \\ p_\alpha(u) & p_\beta(u) \end{vmatrix} = 0,$$

elle ne peut pas être identiquement nulle car on aurait

$$p_\beta(u) = kp_\alpha(u)$$

k étant un nombre fini, et par conséquent les fonctions $A_i(x)$ seraient définies linéairement au moyen de $\nu - \lambda - 1$ autres fonctions et il y aurait entre elles $\lambda + 1$ relations.

Comme elle est de degré $\nu - 1$, je peux trouver parmi les $(\nu + 1)$ valeurs différentes $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu+1}$ une, soit u_2, telle que

$$\begin{vmatrix} p_\alpha(u_1) & p_\beta(u_1) \\ p_\alpha(u_2) & p_\beta(u_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Je forme maintenant l'équation

$$\begin{vmatrix} p_\alpha(u_1) & p_\beta(u_1) & p_\gamma(u_1) \\ p_\alpha(u_2) & p_\beta(u_2) & p_\gamma(u_2) \\ p_\alpha(u) & p_\beta(u) & p_\gamma(u) \end{vmatrix} = 0,$$

elle n'est pas identiquement nulle, car on aurait

$$p_\gamma(u) = hp_\alpha(u) + kp_\beta(u),$$

h, k étant des nombres finis, puisque le coefficient de $p_\gamma(u)$, dans le développement, n'est pas nul. Alors, les fonctions $A_i(x)$ seraient définies linéairement au moyen de $\nu - \lambda - 1$ d'entre elles.

Donc l'équation n'est pas identiquement nulle et nous pouvons trouver une valeur u_3 telle que l'on ait

$$\begin{vmatrix} p_\alpha(u_1) & p_\beta(u_1) & p_\gamma(u_1) \\ p_\alpha(u_2) & p_\beta(u_2) & p_\gamma(u_2) \\ p_\alpha(u_3) & p_\beta(u_3) & p_\gamma(u_3) \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'une façon générale, nous pouvons choisir les valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_{\rho-1}$ telles que

$$\delta = \begin{vmatrix} p_{\alpha_1}(u_1) & p_{\alpha_2}(u_1) & \ldots & p_{\alpha_{\rho-1}}(u_1) \\ p_{\alpha_1}(u_2) & p_{\alpha_2}(u_2) & \ldots & p_{\alpha_{\rho-1}}(u_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{\alpha_1}(u_{\rho-1}) & p_{\alpha_2}(u_{\rho-1}) & \ldots & p_{\alpha_{\rho-1}}(u_{\rho-1}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

et alors j'envisage l'équation

$$\Delta(u) = \left|\begin{array}{cccc|c} & & & & p_{\alpha_\rho}(u_1) \\ & & \delta & & p_{\alpha_\rho}(u_2) \\ & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & p_{\alpha_\rho}(u_{\rho-1}) \\ \hline p_{\alpha_1}(u) & p_{\alpha_2}(u) & \dots & p_{\alpha_{\rho-1}}(u) & p_{\alpha_\rho}(u) \end{array}\right| = 0;$$

elle n'est pas identiquement nulle, car dans ce cas nous aurions

$$p_{\alpha_\rho}(u) = h_1 p_{\alpha_1}(u) + h_2 p_{\alpha_2}(u) + \ldots + h_{\rho-1} p_{\alpha_{\rho-1}}(u) \qquad (h_j \text{ étant finis})$$

et par conséquent, les fonctions $A_i(x)$ seraient définies au moyen de $\nu - \lambda - 1 = \rho - 1$ d'entre elles.

Donc nous pouvons choisir parmi les valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu+1}$ une valeur, soit u_ρ, telle que l'on ait

$$\Delta(u_\rho) \neq 0.$$

Nous pouvons mettre $\Delta(u_\rho)$ sous la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1(u_1) & p_2(u_1) & \dots & p_\rho(u_1) \\ p_1(u_2) & p_2(u_2) & \dots & p_\rho(u_2) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ p_1(u_{\rho-1}) & p_2(u_{\rho-1}) & \dots & p_\rho(u_{\rho-1}) \\ p_1(u_\rho) & p_2(u_\rho) & \dots & p_\rho(u_\rho) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Je considère alors les équations

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} f(x, u_1) = \varphi_1(x)\, e^{Q_1(x)}, \\ f(x, u_2) = \varphi_2(x)\, e^{Q_2(x)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f(x, u_\rho) = \varphi_\rho(x)\, e^{Q_\rho(x)}, \end{array}\right.$$

parmi les fonctions $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_\rho(x)$ il y en aura une au moins qui n'est pas constante, sinon u serait une fonction algébrique.

* Le déterminant

$$\Delta(u) = \begin{vmatrix} p_0(u_1) & p_1(u_1) & \dots & p_\rho(u_1) \\ p_0(u_2) & p_1(u_2) & \dots & p_\rho(u_2) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ p_0(u_\rho) & p_1(u_\rho) & \dots & p_\rho(u_\rho) \\ p_0(u) & p_1(u) & \dots & p_\rho(u) \end{vmatrix} = \pm \Delta p_0(u) + \ldots,$$

de degré ν, admet les racines $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$; comme il n'est pas identiquement nul car le coefficient de u^ν est Δ, on peut trouver, parmi les valeurs considérées $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu+1}$, une racine $u_{\rho+1}$ telle que

$$\Lambda(u_{\rho+1}) \neq 0.$$

J'élimine, entre les équations (2) et l'équation

$$f(x_1, u_{\rho+1}) = p_0(u_{\rho+1}) + g_1(x)p_1(u_{\rho+1}) + g_2(x)p_2(u_{\rho+1}) + \\ + g_\rho(x)p_\rho(u_{\rho+1}) = \varphi_{\rho+1}e^{Q_{\rho+1}}$$

les fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_\rho$, ce qui est possible, puisque

$$\Delta(u_\rho) \neq 0,$$

et j'obtiens

$$(3) \qquad \lambda_1\varphi_1(x)e^{Q_1(x)} + \lambda_2\varphi_2(x)e^{Q_2(x)} \\ + \ldots \pm \lambda_{\rho+1}\varphi_{\rho+1}(x)e^{Q_{\rho+1}(x)} = \lambda_0 \equiv \Lambda(u_{\rho+1}) \neq 0,$$

et je démontre que cette identité est impossible.

Soit μ le nombre des termes $(\mu \leqq \rho)$ $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_\mu(x)$ qui sont des constantes; on aura l'identité

$$-\lambda_0 + \lambda'_1\varphi_1 + \lambda'_2\varphi_2 + \ldots + \lambda'_\mu\varphi_\mu \\ + \lambda_{\mu+1}\varphi_{\mu+1}(x)e^{Q_{\mu+1}(x)} + \ldots + \lambda_{\rho+1}\varphi_{\rho+1}(x)e^{Q_{\rho+1}(x)} \equiv 0.$$

Nous ne pouvons pas avoir

$$\lambda_0 \equiv \lambda'_1\varphi_1 + \ldots + \lambda'_\mu\varphi_\mu;$$

en effet, s'il en était ainsi, nous aurions entre les $g_1, g_2, \ldots, g_\rho$ la relation suivante

$$[\lambda'_1 p_1(u_1) + \lambda'_2 p_1(u_2) + \ldots + \lambda'_\mu p_1(u_\mu)]\, g_1(x) \\ + [\lambda'_1 p_2(u_1) + \lambda'_2 p_2(u_2) + \ldots + \lambda'_\mu p_2(u_\mu)]\, g_2(x) + \ldots \\ + [\lambda'_1 p_\rho(u_1) + \lambda'_2 p_\rho(u_2) + \ldots + \lambda'_\mu p_\rho(u_\mu)]\, g_\rho(x) \\ + [\lambda'_1 p_0(u_1) + \lambda'_2 p_0(u_2) + \ldots + \lambda'_\mu p_0(u_\mu) - \lambda_0] \equiv 0,$$

relation qui entraîne, puisque les $g_j(x)$ sont linéairement indépendantes,

$$\lambda'_1 p_i(u_1) + \lambda'_2 p_i(u_2) + \ldots + \lambda'_\mu p_i(u_\mu) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho.)$$

Or les $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\mu$ ne sont pas tous nuls, sinon on aurait

$$\lambda_0 \equiv \Lambda(u_{\rho+1}) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; alors nous devrions avoir

$$\Delta(u_\rho) \equiv 0,$$

ce qui est aussi contraire à l'hypothèse.

Donc l'identité (3) est impossible, ce qui démontre notre théorème.

Exemples. — I. Prenons

$$f(x, u) \equiv u^3 + u^2(e^x + x + 12) + u(47 - 5e^x - 6x) + (6e^x + 8x - 60),$$
$$A_1 = e^x + x - 12, \qquad A_2 = 47 - 5e^x - 6x, \qquad A_3 = 6e^x + 8x - 60,$$

avec la relation

$$2^2 A_1 + 2A_2 + A_3 + 6 = 0;$$

comme l'équation se met sous la forme

$$(u^3 - 12u^2 + 47u - 60) + e^x(u^2 - 5u + 6) + x(u^2 - 6u + 8) = 0;$$
$$g_1(x) = e^x, \qquad g_2(x) = x,$$

on voit que les valeurs exceptionnelles sont : 3, 4, 5 et 2 celle qui correspond à la relation

$$2^2 A_1 + 2A_2 + A_3 + 6 = 0.$$

II.

$$u^3 + (x - 6)u^2 + (e^x - 3x + 11)u + (2x - 3e^x - 6) = 0.$$

Nous avons ici $\nu = 3$, $\lambda = 1$; les coefficients sont liés par la relation

$$7A_1 + 3A_2 + A_3 + 15 = 0.$$

Nous écrivons l'équation comme suit :

$$(u^3 - 6u^2 + 11u - 6) + e^x(u - 3) + x(u^2 - 3u + 2) = 0,$$

et l'algébroïde admet les valeurs exceptionnelles : 1, 2, 3.

Il n'y a pas de valeurs exceptionnelles du premier type.

Nous avons donc établi le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Une transcendante algébroïde à ν branches définie par une équation de la forme*

$$u^\nu + A_1(x)u^{\nu-1} + A_2(x)u^{\nu-2} + \ldots + A_\nu(x) = 0,$$

prend, dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf *peut-être* $\nu + \lambda + 1$, λ *désignant le nombre des relations linéaires indépendantes à coefficients constants entre les fonctions* $A_i(x)$.

Ce théorème peut aussi s'énoncer sous la forme suivante :

La différence entre le nombre λ *de relations linéaires indépendantes à coefficients constants qui lient les fonctions* $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ *et le nombre maximum des valeurs exceptionnelles d'une transcendante algébroïde, est toujours* $\nu + 1$, ν *désignant le nombre des branches.*

3. Le théorème ci-dessus énoncé correspond au cas où tous les $A_i(x)$ ont une valeur exceptionnelle commune, la valeur ∞. Dans le cas où les $A_i(x)$ ont une valeur exceptionnelle commune finie u_0, nous pourrons, comme on sait, nous borner, sans nuire à la généralité, au cas où le coefficient de u^ν, dans l'équation qui définit la transcendante, est une constante.

Soit, en effet, l'équation

$$f(x, u) \equiv A_0(x)\,u^\nu + A_1(x)\,u^{\nu-1} + \ldots + A_{\nu-1}(x)\,u + A_\nu(x) = 0,$$

où $A_0(x)$ n'est pas une constante.

La transformation

$$y = \frac{1}{u - u_0}$$

conduit à une équation dans laquelle le coefficient de y^ν sera $f(x, u_0)$ qui est de la forme $p(x)e^{Q(x)}$, $p(x)$ étant un polynome. En divisant par $f(x, u_0)$ on obtiendra des coefficients dépourvus de pôles dans le domaine de l'infini.

Exemple. — Posons

$$\begin{aligned} f(x, u) \equiv\; & u^3(2x - 3e^x - 6) + u^2(10e^x - 9x + 29) \\ & + u(13x - 11e^x - 46) + 4e^x - 6x + 24, \end{aligned}$$

la valeur $u = 1$ est exceptionnelle car $f(x, 1) \equiv 1$; par transformation $y = \frac{1}{u-1}$, notre équation se transforme en

$$y^3 + (x - 6)y^2 + (e^x - 3x + 11)y + (2x - 3e^x - 6) = 0$$

et définit une algébroïde admettant, comme nous l'avions vu, les valeurs exceptionnelles 1, 2, 3, ∞; par conséquent notre fonction $u(x)$ admet les valeurs exceptionnelles

$$2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{3},\quad 1.$$

Nous avons ici

$$f(x, 2) \equiv -2e^x, \quad f\left(x, \frac{3}{2}\right) \equiv -\frac{e^x}{8}, \quad f\left(x, \frac{4}{3}\right) = \frac{2x}{27}, \quad f(x, 1) \equiv 1.$$

Remarque. — Le théorème ci-dessus démontré fournit comme limite supérieure du nombre de valeurs exceptionnelles $\nu^2 + \lambda + 1$. Il est évident que cette limite peut être abaissée au nombre $\nu + \theta + 1$, θ [1] désignant le nombre de relations particulières entre les coefficients $A_i(x)$, c'est-à-dire des relations de la forme

$$c^{\nu-1} A_1 + c^{\nu-2} A_2 + \ldots + A_\nu = \text{const.}$$

c étant constante.

4. On sait [2] que si une fonction entière $f(x)$ possède une valeur exceptionnelle a, sa dérivée $f'(x)$ ne peut admettre que la valeur zéro comme valeur exceptionnelle.

Dans le cas des fonctions multiformes, la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ multiforme à ν branches ayant ν valeurs exceptionnelles, n'admet pas toujours la valeur zéro comme valeur exceptionnelle par exemple, la dérivée de la fonction $f(x)$ définie par l'équation

$$f^2 + (e^{2x} - e^x - 1)f + e^x = 0$$

n'admet pas la valeur zéro comme valeur exceptionnelle. Or, la fonction f admet les valeurs 0 et 1 comme valeurs exceptionnelles.

J'ai cherché des conditions sous lesquelles la dérivée d'une fonction multiforme admet nécessairement la valeur zéro comme valeur exceptionnelle lorsque la fonction a ν valeurs exceptionnelles.

Voici un théorème relatif à cette question :

Théorème. — *Considérons une transcendante algébroïde*

---

(1) θ

(2) G. Polya, *Ueber die Nullstellen sukzessiver Derivierten* (*Mathematische Zeitschrift*, Berlin, 1922).

définie par une équation

$$f(x, u) \equiv u^{\nu} + A_1(x)\, u^{\nu-1} + \ldots + A_{\nu}(x) = 0;$$

s'il y a $\nu - 1$ relations linéaires à coefficients constants entre les fonctions $A_i(x)$ et si la transcendante admet une valeur exceptionnelle, sa dérivée admettra la valeur zéro comme valeur exceptionnelle.

En effet, l'équation $f(x, u) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$f(x, u) \equiv p(u) + g(x)\, q(u) = 0,$$

comme on l'a vu au n° **2**; $p(u)$, $q(u)$ étant des polynomes en u

$$p(u) = u^{\nu} + \ldots$$

et $g(x)$ une fonction entière.

Nous avons

$$[p'(u) + g(x)\, q'(u)]\, u' + g'(x)\, q(u) = 0;$$

pour $u' = 0$ il faut que $g'(x)\, q(u) = 0$ et, comme $q(u)$ n'est nu pour aucune valeur de x, on aura

$$g'(x) = 0.$$

Or,

$$p(u_0) + g(x)\, q(u_0) = \mu(x)\, e^{\nu(x)},$$

u_0 étant une valeur exceptionnelle de $u(x)$, par conséquent,

$$g'(x)\, q(u_0) = [\mu'(x) + \mu(x)\, \nu'(x)]\, e^{\nu(x)},$$

On voit que la valeur zéro est exceptionnelle pour $g'(x)$, et alors, il en sera de même pour la dérivée $u'(x)$.

Lorsqu'on ne se borne pas à des $A_i(x)$ de genre fini, il faut prendre le mot « exceptionnel » au sens large de M. Borel.

En particulier, les relations linéaires peuvent être fournies par $\nu - 1$ valeurs exceptionnelles du premier type.

Dans le cas général, elles expriment que l'algébroïde admet $\nu - 1$ *involutions exceptionnelles* du premier type comme l'a montré M. P. Montel [1].

---

[1] P. Montel, *Sur les involutions exceptionnelles des fonctions algébroïde* (*Comptes rendus*, 20 octobre 1924).

On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire dans le théorème précédent que u admette une valeur exceptionnelle du deuxième type ; mais seulement une relation exceptionnelle

$$\lambda_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_\nu A_\nu \equiv p(x)\, e^{Q(x)},$$

car on en déduit

$$\lambda_0 + \lambda g(x) = p(x)\, e^{Q(x)},$$

λ, λ_0, λ_1, ..., λ_ν étant des constantes; $g'(x)$ admet alors zéro comme valeur exceptionnelle.