BULLETIN DE LA S. M. F.

J. WOLFF

Sur l'importance d'un théorème de M. Vitali dans la théorie de la mesure

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 578-585
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__578_1>

SUR L'IMPORTANCE D'UN THÉORÈME DE M. VITALI DANS LA THÉORIE DE LA MESURE;

PAR M. JULIUS WOLFF.

Il ne me semble pas dépourvu d'intérêt de faire remarquer qu'un grand nombre de problèmes métriques se laissent traiter de façon rapide et élégante, si l'on fait usage du théorème suivant, dû à M. Vitali, et dont la plupart des auteurs ne semblent pas jusqu'ici avoir remarqué la puissance.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Soit* E *un ensemble à mesure extérieure* μ^*E *positive, et soit donnée une certaine loi qui fait correspondre à chaque point* P *de* E *une suite d'intervalles* (*rectangles, etc., suivant la dimension de l'espace dans laquelle* E *est considéré*), $i_1(P)$, $i_2(P)$, ..., *dont les dimensions tendent vers zéro, et qui contiennent* P. *Alors, si l'on se donne un nombre positif arbitraire* ε, *et un ensemble ouvert* Ω *arbitraire contenant* E, *il est possible de recouvrir par un nombre fini de ces intervalles* $i_{n_1}(P_1)$, ..., $i_{n_k}(P_k)$, *intérieurs à* Ω, *extérieurs l'un à l'autre, une partie de* E *dont la mesure extérieure surpasse* $(1-\varepsilon)\,\mu^*E$ (2).

---

(2) *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali* (*Atti del R. Acc. di Torino*, t. XLIII, 1908).

La démonstration de ce théorème (qui est un cas particulier d'un théorème plus général de M. Vitali) étant très simple, nous passerons directement aux applications. Tout d'abord, nous mettrons en évidence son utilité en montrant que les propriétés fondamentales de la mesure des ensembles en découlent d'une manière simple; et comme dernière application nous donnerons une généralisation d'un théorème de M. H. Looman sur les fonctions analytiques d'une variable complexe.

Application I. — *Chaque ensemble mesurable a l'épaisseur un sur une pleine épaisseur* [1].

On sait que cela veut dire que si E est mesurable, E contient une pleine épaisseur E_1 telle que, si P est un point de E_1, et i_n une suite arbitraire d'intervalles de centre P tendant vers zéro ($\lim_{n=\infty} i_n = 0$), alors

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu(E i_n)}{\mu i_n} = 1, \tag{1}$$

où $E i_n$ signifie la partie de E contenue dans i_n, tandis que μ indique la mesure.

Si ce théorème n'était pas vrai, E contiendrait un ensemble H de mesure extérieure $\mu^* H$ positive, tel que, si P appartient à H, il existe une certaine suite d'intervalles i_n, de centre P, avec $\lim_{n=\infty} i_n = 0$, pour laquelle on a

$$\mu(E i_n) < \theta(P)\, \mu i_n, \tag{2}$$

où $\theta(P) < 1$ ne dépend pas de n. Soit H_k la partie de H, pour les points de laquelle $\frac{k-1}{k} \leqq \theta(P) < \frac{k}{k+1}$, alors on a

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} H_k.$$

---

[1] *Voir* A. Denjoy, *Journal de Math. pures et appliquées*, 1915, fasc. 2, p. 132. Cet énoncé, établi pour la première fois par M. Lebesgue (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1910), est impliqué dans le théorème que l'intégrale indéfinie admet son coefficient différentiel pour dérivée sur une épaisseur pleine, puisque la mesure entre a et x d'un ensemble donné est l'intégrale dans l'intervalle (a, x) de la fonction égale à 1 sur l'ensemble et à 0 sur son complémentaire.

En niant le théorème il faut admettre $\mu^* H_k > 0$ pour une certaine valeur de k. Mais alors le théorème fondamental conduit à une contradiction. En effet, je peux construire un nombre fini d'intervalles i_n, extérieurs l'un à l'autre, intérieurs à un ensemble ouvert Ω contenant H_k et de mesure $< (1+\varepsilon)\,\mu^* H_k$, recouvrant une partie de H_k dont la mesure extérieure surpasse $(1-\varepsilon)\,\mu^* H_k$, et pour lesquels l'inégalité

$$\mu(E i_n) < \frac{k}{k+1}\,\mu i_n$$

subsiste. Il s'ensuit que

$(1-\varepsilon)\,\mu^* H_k <$ mes. de la partie de E située dans les intervalles i_n construits $< \frac{k}{k+1}$ (somme des mesures des intervalles) $< \frac{k(1+\varepsilon)}{k+1}\,\mu^* H_k$,

donc

$$(k+1)(1-\varepsilon) < k(1+\varepsilon);$$

puisque ε est arbitraire on a bien là une contradiction.

Remarquons que nous avons même montré que chaque ensemble E, mesurable ou non, a la propriété que si P n'appartient pas à un certain sous-ensemble de E de mesure nulle,

$$\lim_{i=0} \frac{\mu^*(E i)}{\mu i} = 1,$$

si l'intervalle i de centre P tend vers zéro.

Application II. — *Chaque fonction mesurable est approximativement continue sur une pleine épaisseur* (¹).

On sait que cela veut dire que, si la fonction $f(P)$ est mesurable sur l'ensemble mesurable E, alors E contient une pleine épaisseur E_1, telle que, si P appartient à E_1, et si l'on choisit un nombre positif ε arbitraire, l'ensemble $E(\varepsilon)$ formé par les points de E, où l'on a

$$|f - f(P)| < \varepsilon$$

possède au point P l'épaisseur un, c'est-à-dire

$$\lim_{i=0} \frac{\mu[E(\varepsilon)\,i]}{\mu i} = 1,$$

si l'intervalle i de centre P tend vers zéro.

(¹) A. Denjoy, *Bulletin de la Soc. math. de France*, 1915, p. 165 et suiv.

En effet, α et β étant deux nombres rationnels quelconques, l'ensemble $E(\alpha, \beta)$ des points P, où $f(P)$ est entre α et β, possède l'épaisseur UN sur une pleine épaisseur de $E(\alpha, \beta)$, suivant l'application I. Donc, puisque les $E(a, \beta)$ sont en nombre dénombrable, E contient une pleine épaisseur E_1, telle que, si P appartient à E_1 et si α et β sont deux nombres rationnels quelconques enfermant $f(P)$, l'ensemble $E(\alpha, \beta)$ a l'épaisseur UN dans P, ce qui entraîne le théorème à démontrer.

APPLICATION III. — *L'intégrale d'une fonction sommable a, sur une pleine épaisseur, cette fonction pour dérivée* (¹).

Pour la démonstration nous considérerons deux pleines épaisseurs E_1 et E_2 de l'ensemble E où la fonction sommable f est définie.

D'abord l'ensemble E_1 considéré dans l'application II.

Afin de définir E_2, indiquons par $E(n)$ l'ensemble où $|f| > n$. On sait que

$$\lim_{n=\infty} \int_{E(n)} |f| = 0. \tag{3}$$

E_2 sera le sous-ensemble de E, dont tout point P possède la propriété suivante : à tout nombre positif ε il correspond un entier $n = n(\varepsilon, P)$, tel que

$$\overline{\lim_{i=0}} \frac{\int_{i E(n)} |f|}{\mu i} < \varepsilon, \tag{4}$$

si l'intervalle i de centre P tend vers zéro. Je dis que E_2 est une pleine épaisseur de E. Car dans le cas contraire il existerait un sous-ensemble F de E, à mesure extérieure $\mu^* F > 0$, tel que, si P appartient à F, quel que soit l'entier n donné à l'avance, on pourrait construire une suite d'intervalles i_p de centre P, tendant vers zéro, pour lesquels on a

$$\int_{i_p E(n)} |f| > \varepsilon(P)\, \mu i_p, \tag{5}$$

(¹) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 124. *Voir* également DENJOY, *Bull. de la Soc. math. de France*, 1915, p. 204-208.

où $\varepsilon(P) > 0$ est indépendant de n, mais peut dépendre de P. Soit F_k le sous-ensemble de F, où l'on a $\varepsilon(P) > \frac{1}{k}$ Comme F est la réunion des F_k et $\mu^* F > 0$, nous devons admettre que $\mu^* F_k > 0$ pour une certaine valeur de k. Mais alors le théorème fondamental conduit à une contradiction. En effet, n étant choisi, je peux construire un nombre fini d'intervalles i_P, extérieurs l'un à l'autre, recouvrant une partie de F_k dont la mesure extérieure surpasse $\frac{1}{2}\mu^* F_k$ et pour lesquels l'inégalité

$$(6) \qquad \int_{i_P E(n)} |f| > \frac{\mu i_P}{k}$$

subsiste. Donc

$$(7) \qquad \int_{E(n)} |f| \geqq \sum \int_{i_P E(n)} |f| > \frac{1}{k} \Sigma \mu i_P > \frac{1}{2k} \mu^* F_k.$$

Puisque n est arbitraire, (7) est en contradiction avec (3). E_2 est donc une pleine épaisseur de E.

Soit P un point de la pleine épaisseur $E_1 E_2$, ensemble commun à E_1 et E_2. Donnons-nous un nombre positif ε. Comme P est dans E_2, nous pouvons trouver un entier $n(\varepsilon, P) = n$, tel que (4) soit satisfaite. Comme P est dans E_1, si $E(\varepsilon)$ indique l'ensemble où $|f - f(P)| < \varepsilon$, on a

$$(8) \qquad \lim_{i=0} \frac{\mu[E(\varepsilon) i]}{\mu i} = 1,$$

si l'intervalle i de centre P tend vers zéro. Donc pour i assez petit on a

$$(9) \qquad \mu \{ [E - E(\varepsilon)] i \} < \eta \mu i,$$

η étant arbitrairement choisi.

$E - E(\varepsilon)$ est composé de deux parties :

1° Les points où $|f| \leqq n(\varepsilon, P)$ et $|f - f(P)| \geqq \varepsilon$;
2° Les points où $|f| > n(\varepsilon, P)$ et $|f - f(P)| \geqq \varepsilon$.

L'intégrale de $|f|$ sur l'ensemble commun à i et à l'ensemble (1°) est plus petite que $\eta . n(\varepsilon, P) . \mu i$, suivant (9).

L'intégrale de $|f|$ sur l'ensemble commun à i et à l'ensemble (2°), divisée par μi, a pour plus grande des limites une quantité plus petite que ε, suivant (4).

Enfin, l'intégrale de f sur l'ensemble $i\mathrm{E}(\varepsilon)$, divisée par μi, diffère de $f(\mathrm{P})$ d'une quantité moindre que ε, dès que i est assez petit, suivant (8), donc pour i assez petit on a

$$\left| \frac{\int_{i\mathrm{E}} f}{\mu i} - f(\mathrm{P}) \right| < 2\varepsilon + \eta\, n(\varepsilon, \mathrm{P}) < 3\varepsilon,$$

si l'on a choisi $\eta < \frac{\varepsilon}{n(\varepsilon, \mathrm{P})}$, ce qui est possible.

ε étant arbitraire, le théorème est démontré.

Application IV. — *Si la fonction f est sommable sur un intervalle* J, *il existe une suite de fonctions continues f_n, telle que*

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathrm{J}} |f - f_n| = 0.$$

Supposons d'abord f bornée : $|f| < \mathrm{M}$. Soit ε un nombre positif. De l'application II et du théorème fondamental il suit qu'on peut construire un nombre fini d'intervalles i_{P}, extérieurs l'un à l'autre, intérieurs à J, dont la mesure totale surpasse $(1 - \varepsilon)\mu\mathrm{J}$ et sur chacun desquels l'ensemble des points, où la fonction diffère de plus de ε de sa valeur au centre P, a une mesure $< \varepsilon . \mu i_{\mathrm{P}}$.

Considérons maintenant une fonction continue f_1 égale à P sur chaque i_{P} et en outre plus petite que M en valeur abolue.

On voit immédiatement que

$$\int_{\mathrm{J}} |f - f_1| < \mathrm{M}\varepsilon + 2\varepsilon \mathrm{M}\mu\mathrm{J} + \varepsilon\mu\mathrm{J}.$$

Donc à chaque entier n correspond une fonction continue f_n, telle que

$$\int_{\mathrm{J}} |f - f_n| < \frac{1}{n^3}, \tag{10}$$

De (10) on conclut que la mesure de l'ensemble des points où $|f - f_n| > \frac{1}{n}$ est plus petite que $\frac{1}{n^2}$, d'où il suit que f_n converge vers f sur une pleine épaisseur.

Si f n'est pas bornée, il existe une fonction bornée φ, telle que

$$\int_{\mathrm{J}} |f - \varphi| < \frac{1}{2n^3}, \tag{11}$$

et une fonction continue f_n, telle que

$$\int_J |\varphi - f_n| < \frac{1}{2n^3}, \tag{12}$$

donc cette fonction satisfait à l'inégalité (10).

Application V. — Soit $f(z)$ une fonction continue de la variable complexe z dans un domaine $\mathcal{D}$. Soit P un point de $\mathcal{D}$. Indiquons par ρ un rectangle fermé contenant P et écrivons

$$\overline{\lim_{\rho=0}} \frac{\left|\int_\rho f(z)\,dz\right|}{\mu\rho} = \psi(P) \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{\rho=0}} \frac{\left|\int_\rho |f(z)\,dz\right|}{\mu\rho} = \varphi(P); \tag{13}$$

on suppose, bien entendu, que toutes les dimensions de ρ tendent vers zéro, et que l'intégrale est calculée le long du contour de ρ.

Pour que la fonction $f(z)$ continue soit holomorphe dans $\mathcal{D}$, il suffit que :

1° *L'ensemble des points où $\varphi(P) > 0$ soit de mesure nulle;*

2° *L'ensemble des points où $\psi(P) = \infty$ soit dénombrable au plus* (¹).

En effet, soit J un rectangle arbitraire de $\mathcal{D}$. L'ensemble (2°) est l'ensemble commun à $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$; Ω_n étant la réunion de tous les rectangles ρ pour lesquels le quotient

$$\frac{\left|\int_\rho f(z)\,dz\right|}{\mu\rho} = q(\rho)$$

est plus grand que n. Puisque (2°) est dénombrable, il est non dense sur tout ensemble parfait. Considérons l'ensemble E des points A ayant la propriété que dans chaque voisinage de A il existe des rectangles ρ avec $q(\rho) > 0$. On voit immédiatement que E est parfait ou vide. Si E possède des points dans J, il a dans J une portion EJ_1 qui n'a pas de point commun avec (2°). Donc sur EJ la fonction ψ est finie. On en conclut que EJ a une

---

(¹) *Nieuwo Archief voor Wisk.*, 2e reeks, XIV, 3, p. 234. M. Looman suppose l'ensemble $\psi(P) > 0$ de mesure nulle et $\psi(P)$ partout finie.

portion EJ_2 sur laquelle ψ est bornée, car l'hypothèse contraire conduirait à l'existence d'un point P de EJ_1, avec $\psi(P) = \infty$. Sur EJ_2 on a donc $|\psi| < M$. De l'hypothèse (1°) il suit qu'on peut choisir un nombre fini de rectangles ρ dans J_2, extérieurs l'un à l'autre, dont l'aire totale surpasse $(1 - \varepsilon)\,\mu J_2$ et pour chacun desquels $q(\rho) < \varepsilon$. C'est une conséquence du théorème fondamental. La somme des intégrales de $f(z)$ le long des contours de ces rectangles est plus petite que $\varepsilon\mu J_2$. Dans chaque point de l'aire restante de J_2 on a $|\psi| < M$: pour EJ_2 nous l'avons déjà vu, et dans $J_2 - EJ_2$ on a manifestement $\psi \doteq 0$, puisque $f(z)$ est holomorphe dans $J_2 - EJ_2$. On en conclut que l'intégrale calculée le long du contour de cette aire est plus petite que M (mesure de l'aire) $< M\varepsilon . \mu J_2$. Donc $\left|\int_{J_2} f(z)\,dz\right| < \varepsilon\,(M + 1)\,\mu J_2$, et comme ε est arbitraire, l'intégrale est nulle. Puisque ce raisonnement est valable pour tout rectangle faisant partie de J_2, nous trouvons que $f(z)$ est holomorphe dans J_2, donc EJ_2 est vide, donc E doit être vide dans J. Comme J était un rectangle arbitraire de $\mathfrak{V}$, le théorème est démontré.