Bulletin de la S. M. F.

G. Koenigs

Sur les courbes gauches dont le lieu des centres de courbure est une courbe donnée

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 503-514
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__503_1>

SUR LES COURBES GAUCHES DONT LE LIEU DES CENTRES DE COURBURE EST UNE COURBE DONNÉE;

Par M. G. Koenigs.

Au Tome 16 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, en 1853, dans un écrit intitulé : *Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure*, l'illustre géomètre J.-A. Serret a développé d'ingénieuses considérations d'analyse qui lui furent suggérées par les circonstances diverses qu'offre, suivant les cas, la détermination d'une courbe par une propriété de quelqu'un de ses éléments infinitésimaux tels que cercle osculateur ou sphère osculatrice.

Si, par exemple, on veut une courbe dont le cercle osculateur soit orthogonal à une sphère donnée, on ne trouvera pas d'autre solution que les cercles orthogonaux eux-mêmes. Mais il est des cas où il n'en est pas ainsi.

Si, par exemple, on cherche les courbes dont le cercle osculateur a son centre sur une courbe donnée, on trouvera bien encore l'ensemble des cercles ayant leur centre sur la courbe, mais en outre il existera vraiment des courbes différentes de ces cercles et répondant à l'énoncé du problème.

L'équation différentielle à laquelle on parvient est du reste inintégrable, quelle que soit la méthode suivie. Mais cela n'est pas une raison pour empêcher d'étudier les circonstances géométriques du problème. Il importe à cet effet d'y appliquer les méthodes plus modernes de la géométrie infinitésimale.

J'appliquerai à la question la méthode du trièdre mobile.

I. — *Équation du problème.*

Soit O un point de la courbe (O) qui doit être le lieu de centre de courbure d'une courbe cherchée (f). Nous prendrons un trièdre trirectangle direct T dans lequel Ox sera la tangente directe à la courbe (O), Oy la normale principale dirigée vers le centre de courbure, Oz la binormale.

Nous appellerons s l'arc de la courbe (O), r et t ses rayons de courbure et de torsion. Nous prendrons l'arc s pour mesure du temps.

Appelons enfin M le point de la courbe cherchée (f) où le centre de courbure est le point O et x, y, z les coordonnées du point M par rapport au trièdre T.

Du moment où s est la mesure du temps, les projections v_x, v_y, v_z de la vitesse absolue de M sur les axes Ox, Oy, Oz seront

$$(1) \qquad \begin{cases} v_x = 1 - \dfrac{y}{r} + \dfrac{dx}{ds} \quad (^1), \\ v_y = \dfrac{x}{r} + \dfrac{z}{t} + \dfrac{dy}{ds}, \\ v_z = -\dfrac{y}{t} + \dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

Pour que O soit le centre de courbure de la courbe (f) au point M, il faut d'abord que OM soit normale au point M à la courbe (f), ce qui se traduit par l'équation

$$(2) \qquad x v_x + y v_y + z v_z = 0.$$

Mais on peut ici faire la remarque que le plan ν normal en M à la courbe (f) enveloppe une surface développable Φ qu'il touche suivant une droite d, normale au point O au plan osculateur de (f). Par suite, la courbe (O) est tracée sur cette développable Φ et la tangente Ox en O à cette courbe est dans le plan tangent ν à Φ tout du long de la droite d. En conséquence, la vitesse qui est normale à ce plan ν est rectangulaire avec Ox qui y est

(1) *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, et G. Kœnigs, *Leçons de Cinématique*.

tracée. Il en résulte que la projection v_x est nulle, donc

$$v_x = 1 - \frac{y}{r} + \frac{dx}{ds} = 0. \tag{3}$$

Ceci réduit l'équation (2) à la forme

$$y v_y + z v_z = 0. \tag{2'}$$

Appelons X, Y, Z les coordonnées courantes d'un point du plan ν, normal en M à la courbe (f).

Ce plan, normal à la vitesse de M et passant par le point O, a pour équation

$$v_x X + v_y Y + v_z Z = 0,$$

ou, eu égard à (3),

$$v_y Y + v_z Z = 0,$$

ou enfin, en vertu de (2'),

$$-zY + yZ = 0. \tag{4}$$

La droite d, caractéristique du plan ν, s'obtiendra en cherchant le lieu des points de ce plan dont la vitesse absolue y est contenue, cela s'exprime par l'équation

$$-z v_Y + y v_Z = 0,$$

où

$$v_Y = \frac{X}{r} + \frac{Z}{t} + \frac{dY}{ds}, \qquad v_Z = -\frac{Y}{t} + \frac{dZ}{ds};$$

il viendra ainsi

$$-z\left(\frac{X}{r} + \frac{Z}{t} + \frac{dY}{ds}\right) + y\left(-\frac{Y}{t} + \frac{dZ}{ds}\right) = 0.$$

En différentiant l'équation (4) nous trouvons

$$-\frac{dz}{ds} Y + \frac{dy}{ds} Z - z\frac{dY}{ds} + Y\frac{dZ}{ds} =$$

retranchons de l'équation précédente, nous obtenons

$$-\frac{z}{r} X + \left(\frac{dz}{ds} - \frac{y}{t}\right) Y - \left(\frac{dy}{ds} + \frac{z}{t}\right) Z = 0. \tag{5}$$

Les équations (4), (5) représentent la droite d, caractéristique du plan normal ν. On reconnaît qu'elle passe au point O.

Des équations (4), (5) homogènes en X, Y, Z, on tire les paramètres directeurs de d, en mettant les équations sous la forme

$$(6)\qquad \frac{X}{\frac{y\,dz - z\,dy}{(y^2+z^2)\,ds} - \frac{1}{t}} = \frac{Y}{\frac{yz}{r(y^2+z^2)}} = \frac{Z}{\frac{z^2}{r(y^2+z^2)}}.$$

Nous sommes déjà assurés que OM est normale; pour qu'elle soit normale principale, il faut, en outre, que OM soit rectangulaire avec d, ce qui se traduit par l'équation

$$x\left[\frac{y\,dz - z\,dy}{(y^2+z^2)\,ds} - \frac{1}{t}\right] + \frac{y^2 z}{r(y^2+z^2)} + \frac{z^3}{r(y^2+z^2)} = 0.$$

ou en simplifiant

$$(7)\qquad \frac{y\,dz - z\,dy}{(y^2+z^2)\,ds} - \frac{1}{t} + \frac{z}{x}\,\frac{1}{r} = 0.$$

Les équations (3), (2′) [ou (2)] et (7) expriment toutes les conditions du problème.

II. — *Introduction des constantes du cercle osculateur.*

Il convient d'introduire ici les constantes du cercle osculateur. Ce seront les cosinus directeurs de la droite d et le rayon ρ de ce cercle.

Pour y arriver, il suffira d'introduire, au lieu de x, y, z, les coordonnées polaires du point M.

Soient θ l'angle du vecteur OM avec Ox, φ l'angle du demi-plan xOM avec le demi-plan xOy, nous aurons

$$(8)\qquad x = \rho\cos\theta,\qquad y = \rho\sin\theta.\cos\varphi,\qquad z = \rho\sin\theta.\sin\varphi.$$

Si, au lieu de x, y, z, nous introduisions les variables θ, φ, ρ dans les équations (2), (3), (7), elles prennent les formes simples suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= -\cos\theta,\\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\sin\theta}{\rho} - \frac{\cos\varphi}{r},\\ \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{r}\operatorname{tang}\theta.\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

Cherchons les cosinus directeurs du trièdre formé par la tangente (α, β, γ), par la normale principale dirigée vers le centre de courbure (α', β', γ') et par la binormale (α'', β'' γ'') de la courbe (f) au point M.

En ce qui concerne α, β, γ cosinus directeurs de la tangente, on aura

$$\frac{\alpha}{v_x} = \frac{\beta}{v_y} = \frac{\gamma}{v_z},$$

c'est-à-dire, eu égard aux équations (2') et (3),

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{\sin\varphi} = \frac{\gamma}{-\cos\varphi},$$

cela permet de prendre

$$(10) \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \sin\varphi, \qquad \gamma = -\cos\varphi.$$

Les cosinus directeurs de la normale principale MO sont égaux et opposés à ceux de OM, ce sont donc

$$(11) \qquad \alpha' = -\cos\theta, \qquad \beta' = -\sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma' = -\sin\theta\sin\varphi.$$

Quant à la binormale, ils seront donnés par les formules classiques

$$\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta', \qquad \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \qquad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

c'est-à-dire, eu égard aux résultats précédents,

$$(12) \qquad \alpha'' = -\sin\theta, \qquad \beta'' = \cos\theta\cos\varphi, \qquad \gamma'' = \cos\theta\sin\varphi.$$

On voit que α'', β'', γ'' sont les cosinus directeurs de la normale au plan du cercle osculateur, ce qui, avec le rayon ρ, constitue l'ensemble des constantes du cercle osculateur.

III. — *Arc et torsion de la courbe* (f).

La méthode que nous suivons nous donne immédiatement l'arc σ et le rayon de torsion τ de la courbe (f).

Nous avons déjà trouvé pour les projections v_x, v_y, v_z de la vitesse de M les expressions

$$v_x = 0, \qquad v_y = \frac{x}{r} + \frac{z}{t} + \frac{dy}{ds}, \qquad v_z = -\frac{y}{t} + \frac{dz}{ds}.$$

Si, dans ces expressions, on introduit les variables θ, φ, ρ on trouve

$$v_y = \frac{\rho}{r}\frac{\sin^2\varphi}{\cos\theta}, \qquad v_z = -\frac{\rho}{r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Ces expressions sont d'ailleurs égales aussi à

$$v_y = \beta\frac{d\sigma}{ds}, \qquad v_z = \gamma\frac{d\sigma}{ds},$$

c'est-à-dire à

$$v_y = \frac{d\sigma}{ds}\sin\varphi, \qquad v_z = -\frac{d\sigma}{ds}\cos\varphi.$$

Par comparaison avec les formules ci-dessus on constate que $\frac{d\sigma}{ds}$ a la valeur suivante :

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\rho}{r}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}. \tag{13}$$

L'arc σ est compté dans le sens (α, β, γ) de la tangente.

En ce qui concerne le rayon de torsion, rappelons que si l'on mène, par un point fixe M_0, un vecteur $\overrightarrow{M_0U}$ égal à 1, parallèle à la binormale $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, la vitesse du point U est égale à $\frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds}$ (¹), et cette vitesse est portée par la normale principale $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe M_0, les coordonnées de U seront $x_0 + \alpha''$, $y_0 + \beta''$, $z_0 + \gamma''$, d'où les projections de la vitesse du point U :

$$\begin{aligned}
v_x^U &= 1 - \frac{y_0 + \beta''}{r} + \frac{d}{ds}(x_0 + \alpha''),\\
v_y^U &= \frac{x_0 + \alpha''}{r} + \frac{z_0 + \gamma''}{t} + \frac{d}{ds}(y_0 + \beta''),\\
v_z^U &= -\frac{y_0 + \beta''}{t} + \frac{d}{ds}(z_0 + \gamma'').
\end{aligned}$$

Maintenant, le point M_0 étant fixe, sa vitesse absolue est nulle et par suite aussi sont nulles les projections de cette vitesse; on a donc

$$1 - \frac{y_0}{r} + \frac{dx_0}{ds} = 0, \qquad \frac{x_0}{r} + \frac{z_0}{t} + \frac{dy_0}{ds} = 0, \qquad -\frac{y_0}{t} + \frac{dz_0}{ds} = 0,$$

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I. — G. Koenigs, *Leçons de Cinématique*.

ce qui simplifie les expressions de v_x^U, v_y^U, v_z^U et les réduit aux expressions

$$v_x^U = -\frac{\beta''}{r} + \frac{d\alpha''}{ds},$$

$$v_y^U = \frac{\alpha''}{r} + \frac{\gamma''}{t} + \frac{d\beta''}{ds},$$

$$v_z^U = -\frac{\beta''}{t} + \frac{d\gamma''}{ds}.$$

Si l'on transporte dans ces formules, pour α'', β'', γ'', les valeurs (12) trouvées plus haut, il viendra, en tenant compte aussi des équations (9),

$$v_x^U = -\frac{\cos\theta \sin\theta}{\rho}, \qquad v_y^U = -\frac{\sin^2\theta \cos\varphi}{\rho}, \qquad v_z^U = -\frac{\sin^2\theta \sin\varphi}{\rho};$$

en se rappelant que cette vitesse a pour mesure $\frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds}$ sur la normale principale α', β', γ', on pourra écrire

$$-\frac{\cos\theta \sin\theta}{\rho} = \alpha' \frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds}, \qquad -\frac{\sin^2\theta \cos\varphi}{\rho} = \beta' \frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds},$$

$$-\frac{\sin^2\theta \sin\varphi}{\rho} = \gamma' \frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds},$$

et comme, d'après (11), on a

$$\alpha' = -\cos\theta, \qquad \beta' = -\sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma' = -\sin\theta\sin\varphi,$$

on devra avoir

$$-\frac{\cos\theta \sin\theta}{\rho} = -\cos\theta \frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds}, \qquad -\frac{\sin^2\theta \cos\varphi}{\rho} = -\sin\theta\cos\varphi \frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds},$$

$$-\frac{\sin^2\theta \sin\varphi}{\rho} = -\sin\theta\sin\varphi \frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds}.$$

Ces formules s'accordent pour montrer que l'on a

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sin\theta}{\rho},$$

et, eu égard à la valeur trouvée pour $\frac{d\sigma}{ds}$, formule (13), il vient

$$(14) \qquad \tau = \frac{\rho^2}{r}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta\cos\theta}.$$

On trouverait sans peine que le rayon de la sphère osculatrice est égal à

$$\rho\sqrt{1+\sin^2\varphi\cot^2\theta}.$$

IV. — *Équation du troisième ordre.*

Les équations (9) sont celles dont l'intégration résout le problème. J.-A. Serret a trouvé une équation en ρ du troisième ordre. Il nous est aisé de la former ici.

Observons d'abord qu'en appelant ρ', ρ'' les dérivées première et seconde de ρ par rapport à s, il est aisé d'exprimer θ et φ en fonction de ρ, ρ', ρ''.

La première des équations (9) nous donne d'abord

$$\cos\theta = -\rho',$$

d'où

$$\cos\theta = -\rho', \qquad \sin\theta = \sqrt{1-\rho'^2}. \tag{15}$$

En différentiant il viendra

$$\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds} = \rho'',$$

et en tirant $\frac{d\theta}{ds}$ de la deuxième équation (9), il viendra

$$\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\rho} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) = \rho'',$$

d'où l'on tirera

$$\cos\varphi = \frac{r}{\sin\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho} - \rho''\right) = \frac{r(1-\rho'^2-\rho\rho'')}{\rho\sqrt{1-\rho'^2}}. \tag{16}$$

En différentiant enfin l'équation (16) il viendra

$$-\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{dr}\left[\frac{r(1-\rho'^2-\rho\rho'')}{\rho\sqrt{1-\rho'^2}}\right],$$

et si nous remplaçons $\frac{d\varphi}{ds}$ par sa valeur tirée de la dernière des équations (9), nous trouverons

$$-\sin\varphi\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{r}\sin\varphi\tang\theta\right) = \frac{d}{ds}\,\frac{r(1-\rho'^2-\rho\rho'')}{\rho\sqrt{1-\rho'^2}}. \tag{17}$$

Il suffira de remplacer $\sin\varphi$, $\tang\theta$ par leurs valeurs tirées des équations (15), (16) pour obtenir l'équation du troisième ordre.

Cette équation est compliquée et ne peut être intégrée.

V. — *Cas où la courbe* (O) *est une hélice ou un cercle.*

J.-A. Serret a remarqué que l'équation du troisième ordre se réduit à une du second dans le cas où la courbe (O) est une hélice ou un cercle.

Il est aisé d'en voir la raison.

On observera que si l'on possède θ, φ, ρ en fonction de s, on se trouve définir pour le point M une courbe trajectoire (μ) relative, par rapport au trièdre T. Le mouvement résultant de ce mouvement relatif du point M sur la courbe (μ) et du mouvement d'entraînement du trièdre est le mouvement absolu de M sur la courbe (f).

Les formules d'intégration des équations (9) peuvent s'écrire

$$G_1(\theta, \varphi, \rho, c_1, c_2, c_3) = 0, \qquad G_2(\theta, \varphi, \rho, c_1, c_2, c_3) = 0,$$
$$G_3(\theta, \varphi, \rho, c_1, c_2, c_3) - s = 0,$$

où c_1, c_2, c_3 sont trois constantes arbitraires.

Les équations $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ définissent la courbe (μ) : l'équation $G_3 = 0$ définit la correspondance ponctuelle qui existe entre le point M de la courbe (μ) et le point O de la courbe (O).

Mais lorsque les rayons de courbure et de torsion r, t sont constants, les équations (9) peuvent se partager en deux groupes

$$\frac{d\rho}{-\cos\theta} = \frac{d\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\rho} - \dfrac{\cos\varphi}{r}} = \frac{d\varphi}{\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{1}{r}\operatorname{tang}\theta\sin\varphi}, \tag{18}$$

$$-\frac{d\rho}{\cos\theta} = ds. \tag{19}$$

Le système (18) ne contient pas s puisque r, t sont constants et peut être intégré à part; il est du second ordre et les formules d'intégration s'écrivent

$$G_1(\theta, \varphi, \rho, c_1, c_2) = 0, \quad G_2(\theta, \varphi, r, c_1, c_2) = 0.$$

Ces équations définissent les courbes (μ) qui ne dépendent ici que de deux constantes.

Ensuite l'intégration de l'équation (19) donne par quadrature

$$G_3(\theta, \varphi, \rho, c_1, c_2) - (s + c_3) = 0,$$

en sorte que la troisième constante du problème est additive à s. Il est aisé de comprendre que ceci correspond à la circonstance que le cercle et l'hélice sont susceptibles de glisser sur eux-mêmes.

Pour intégrer les équations (19), nous poserons

$$\rho \sin\theta = \frac{r}{2} v, \qquad \rho = r\sqrt{u},$$

où u, v sont les deux nouvelles variables.

La première équation se réduit à

$$\cos\varphi = \frac{dv}{du} = v',$$

en sorte que l'on a les formules

$$(20) \qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{r}{\rho}\dfrac{v}{2} = \dfrac{v}{2\sqrt{u}}, & \cos\theta = \sqrt{\dfrac{4u - v^2}{4u}}, \\ \cos\varphi = v', & \sin\varphi = \sqrt{1 - v'^2}. \end{cases}$$

En posant $v'' = \dfrac{dv'}{du} = \dfrac{d^2v}{du^2}$ on trouve en différentiant $\cos\varphi = v'$,

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{du} = v'';$$

or

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{\rho\, d\rho}{\rho\, du} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho^2}{2\rho\, du} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{r^2}{2\rho}.$$

Il vient donc

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{r^2}{2\rho} = v''.$$

En tirant $\dfrac{d\varphi}{d\rho}$ de la seconde des équations (18), nous avons

$$v'' = \frac{r^2}{2\rho}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{r}\operatorname{tang}\theta \sin\varphi\right).$$

En remplaçant ρ par $r\sqrt{u}$ et les lignes trigonométriques des arcs θ, φ en fonction de u, v, v' par le moyen des formules (20), il viendra définitivement

$$(21) \qquad v'' = -\frac{v(1 - v'^2)}{4u - v^2} + \frac{r}{t}\sqrt{\frac{1 - v'^2}{4u - v^2}}.$$

De cette équation du second ordre dépend le problème de la recherche des courbes (μ).

Quant à la correspondance entre les courbes (μ) et (O), la quadrature (20) prend ici la forme

$$ds = -\frac{du}{\sqrt{4u - v^2}}. \tag{22}$$

Dans le cas où l'hélice se réduit à un cercle, $\frac{1}{t} = 0$, et l'équation (21) se réduit à la forme purement numérique

$$v'' = -\frac{v(1 - v'^2)}{4u - v^2}. \tag{23}$$

La quadrature (22) garde sa forme.

Malheureusement, les équations (22), (23) sont rebelles à toute intégration.

Cependant, dans le cas de l'hélice, on sait que toute hélice est le lieu des centres de courbure d'une autre hélice qui a même normale principale qu'elle.

Les équations (18) admettront alors une solution pour laquelle

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = 0, \quad \text{et} \quad \rho = a = \text{const}.$$

Dans le cas $r = a$, il y a deux courbes (O) et (f), toutes deux à courbure constante $\frac{1}{a}$; elles ont même normale principale.

VI. — *Sur un problème de géométrie plane.*

On peut faire la remarque que, en interprétant u, v dans le plan, on obtient un problème de géométrie infinitésimale plane.

Mais pour obtenir un énoncé simple il convient de faire le changement de variables suivant :

$$u = x, \qquad v = yi, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

On trouve alors que l'équation (23) prend la forme suivante :

$$y'' = -y\,\frac{(1 + y'^2)}{4x + y^2},$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

En coordonnées rectangulaires cette équation est celle des courbes planes jouissant de la propriété que :

Le segment qui joint un point de la courbe à la projection du centre de courbure sur une droite fixe du plan est vu sous un angle droit d'un point fixe du plan.

Ce problème est ainsi en connexion étroite avec celui des courbes gauches dont le lieu des centres de courbure est un cercle.

Il serait très intéressant que quelqu'un de nos distingués analystes voulût bien examiner ce que l'on peut tirer de cette équation. Une homothétie permet de remplacer 4 par toute autre constante non nulle.