BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VESSIOT

Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 336-395
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__336_1>

SUR UNE THÉORIE NOUVELLE DES PROBLÈMES GÉNÉRAUX D'INTÉGRATION;

PAR M. E. VESSIOT.

INTRODUCTION.

1. A tout système (S) d'équations différentielles ordinaires du premier ordre correspond l'équation linéaire aux dérivées par-

tielles (E) qui a pour solutions les intégrales premières de (S). La correspondance est réciproque, et l'intégration du système (S) et celle de l'équation (E) constituent des problèmes équivalents. Il existe ainsi entre (S) et (E) une sorte de dualité, et l'on peut dire que ce système et cette équation sont corrélatifs. Ces mots sont d'autant plus justifiés que l'origine de l'équivalence des deux problèmes d'intégration de (S) et de (E) se trouve dans la relation bilinéaire

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{1}$$

qui existe entre les dérivées partielles de toute solution de (E) et les différentielles des coordonnées du point courant de toute intégrale de (S).

Pareille dualité existe entre les systèmes complètement intégrables d'équations de Pfaff, et les systèmes complets d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre. M. Cartan lui a donné la forme suivante, où apparaît une généralisation de la formule (1). Soient

$$\text{(S)} \qquad \omega_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha,i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_\alpha = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

un système de s équations de Pfaff à n variables, complètement intégrable, et

$$\text{(E)} \qquad X_j F = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{j,\alpha}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

un système complet de $m = n - s$ équations linéaires aux dérivées partielles. Ces deux systèmes (S) et (E) sont corrélatifs, et l'intégration de chacun d'eux entraîne celle de l'autre, si l'on a une identité de la forme

$$df = \varpi_1 X_1 + \ldots + \varpi_m X_m + \omega_1 Z_1 + \ldots + \omega_s Z_s, \tag{2}$$

$\varpi_1, \ldots, \varpi_m$ étant de nouvelles formes linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$ et $Z_1, \ldots, Z_m$ étant de nouvelles formes linéaires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Je me suis proposé d'étendre cette *notion de dualité* au cas où le système (S) est un système de Pfaff quelconque, et d'établir, en m'inspirant de la belle théorie de l'intégration des systèmes de Pfaff que l'on doit à M. Cartan, les principes de la théorie corrélative qui devait résulter de cette extension. Je donne, dans les pages qui suivent, un premier aperçu de la théorie nouvelle (1).

2. Si l'on se donne les $n = m + s$ expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_s$, $\varpi_1, \ldots, \varpi_m$, l'identité (2) définit sans ambiguïté les opérateurs linéaires $X_1, \ldots, X_m$, $Z_1, \ldots, Z_s$, sous la seule condition que $\omega_1, \ldots, \omega_s, \varpi_1, \ldots, \varpi_m$ soient des formes linéaires indépendantes en $dx_1, \ldots, dx_n$.

Si l'on se donne seulement le système de Pfaff (S), $\omega_1, \ldots, \omega_s$ ne sont définis qu'à une substitution linéaire près

$$\omega'_i = \sum_{\alpha=1}^{s} p_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_n)\omega_\alpha, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

On peut d'autre part choisir $\varpi_1, \ldots, \varpi_m$ arbitrairement, de sorte que, si l'on en a fait un premier choix, leurs valeurs les plus générales sont de la forme

$$\varpi'_j = \sum_{\alpha=1}^{s} q_{j,\alpha}(x_1, \ldots, x_n)\omega_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} r_{j,\beta}(x_1, \ldots, x_n)\varpi_\beta, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

On reconnaît immédiatement que de telles modifications dans le choix des ω_i et des ω_j ont pour effet de remplacer $X_1, \ldots, X_m$ par des combinaisons linéaires homogènes de la forme

$$(3) \qquad Uf = u_1(x_1, \ldots, x_n)X_1 f + \ldots + u_m(x_1, \ldots, x_n)X_m f;$$

et peuvent donner pour $Z_1, \ldots, Z_s$ des formes entièrement arbitraires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Interprétant les expressions telles que $X_j f$, conformément aux idées de Sophus Lie, comme des symboles de *transformations infinitésimales*, je conclus qu'à tout système (S) d'équations de Pfaff correspond, par le mode de dualité défini au moyen de

(1) Une dualité analogue se manifeste entre les équations de Monge et les équations aux dérivées partielles non linéaires; et est aussi susceptible d'extension.

l'identité (2), *un faisceau de transformations infinitésimales*

$$(\mathfrak{F}) \qquad \{X_1, \ldots, X_m\} \qquad (m = n - s),$$

c'est-à-dire l'ensemble des transformations infinitésimales données par la formule (3), dans laquelle $X_1, \ldots, X_m$ sont des transformations infinitésimales divergentes [1] déterminées, tandis que les coefficients $u_1, \ldots, u_m$ restent arbitraires.

Inversement, à tout faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$ correspond, de la même manière, un système de Pfaff $\omega_1 = \ldots = \omega_s = 0$.

Une multiplicité intégrale du système de Pfaff (S) sera une multiplicité intégrale du faisceau ($\mathfrak{F}$) corrélatif et réciproquement, si l'on adopte la définition suivante : Une multiplicité à p dimensions est dite *intégrale* d'un faisceau de transformations infinitésimales, si elle est invariante pour p transformations, divergentes, de ce faisceau.

On est ici conduit à considérer, au lieu de multiplicités intégrales isolées, des intégrales complètes; et c'est là une différence entre les deux théories corrélatives. J'appelle *intégrale complète* une famille de multiplicités intégrales, telle qu'il passe, par chaque point de l'espace, une multiplicité et une seule de cette famille.

Toute intégrale complète à p dimensions est fournie par un système complet de p équations $U_1 f = \ldots = U_p f = 0$, dont les premiers membres sont des transformations du faisceau. Ces transformations $U_1, \ldots, U_p$ définissent donc ce que l'on appellera un *sous-faisceau complet* du faisceau donné.

Le problème de l'integration d'un système de Pfaff a ainsi pour corrélatif le suivant : *Déterminer tous les sous-faisceaux complets contenus dans un faisceau de transformations infinitésimales donné.* C'est ce que l'on peut appeler *intégrer le faisceau.*

3. La théorie de M. Cartan repose sur la considération des covariants bilinéaires

$$\omega'_i = \delta\omega_i(d) - d\omega_i(\delta).$$

---

[1] Par ce mot de *divergentes,* que justifie l'interprétation géométrique des transformations infinitésimales, j'entends qu'il n'existe entre $X_1, \ldots, X_m$ aucune identité de la forme

$$u_1(x_1, \ldots, x_m)X_1 + \ldots + u_m(x_1, \ldots, x_n)X_m = 0.$$

Ils donnent lieu à des identités-congruences

$$(4)\quad \omega_i' \equiv \sum_{(\alpha,\beta)} c_{\alpha,\beta,i}(x_1, \ldots, x_n).\varpi_\beta\varpi_\alpha, \quad (\operatorname{mod}\omega_1, \ldots, \omega_s), (i = 1, 2, \ldots, s),$$

où $\varpi_\beta\varpi_\alpha$ désigne symboliquement le déterminant

$$\varpi_\beta(\delta)\varpi_\alpha(d) - \varpi_\beta(d)\varpi_\alpha(\delta).$$

Ce sont ces identités qui définissent la *structure* du système de Pfaff, structure de laquelle dépend la nature du problème de l'intégration de ce système.

Dans notre théorie, ce sont les crochets de Jacobi,

$$(X_j f, X_h f) = X_j(X_h f) - X_h(X_j f)$$

qui remplacent les covariants bilinéaires; et ce sont les identités-congruences

$$(5)\quad (X_j, X_h) \equiv \sum_\gamma c_{j,h,\gamma}(x_1, \ldots, x_n) Z_\gamma, \quad (\operatorname{mod} X_1, \ldots, X_m), (j, h = 1, 2, \ldots, m)$$

qui définissent la *structure du faisceau* $\{X_1, \ldots, X_m\}$.

L'équivalence des deux points de vue résulte d'un calcul dont le principe est encore dû à M. Cartan. On déduit de l'identité (2) la suivante :

$$0 = \delta(df) - d(\delta f) = \sum_\alpha \varpi_\alpha' X_\alpha + \sum_\gamma \omega_\gamma' Z_\gamma + \sum_{(\alpha,\beta)} \varpi_\beta\varpi_\alpha(X_\alpha, X_\beta)$$
$$+ \sum_{(\alpha,\gamma)} \varpi_\alpha\varpi_\gamma(Z_\gamma, X_\alpha) + \sum_{\varepsilon,\gamma} \omega_\varepsilon\omega_\gamma(Z_\gamma, Z_\varepsilon);$$

et l'on conclut immédiatement de là que les fonctions $c_{j,h,i}$ sont les mêmes dans les formules (4) et (5).

Aux *formules de structure* (5) se rattache la notion de *faisceau dérivé*, corrélative de la notion de système dérivé, introduite par M. Cartan dans la théorie des équations de Pfaff. Le faisceau dérivé d'un faisceau donné s'obtient en lui adjoignant les crochets (X_j, X_h) formés avec ses transformations de base, $X_1, \ldots, X_m$: il suffit pour cela de lui adjoindre celles des formes linéaires $Z_1, \ldots, Z_s$, figurant dans les seconds membres des formules (5), qui sont indépendantes entre elles. On remarquera que le mot

« dérivé » se trouve ici employé dans une acception entièrement analogue à celle que lui donne S. Lie dans la théorie des groupes de transformations [1].

Dans certains cas, il y aura lieu de compléter l'analyse de la structure du faisceau par la considération de ses *dérivés successifs*.

4. Toute transformation infinitésimale d'un faisceau $(\mathfrak{F})$ définit, en chaque point de l'espace, un déplacement infinitésimal, qui est, en fait, ce que M. Cartan appelle un élément intégral du système de Pfaff (S) corrélatif; et l'on obtient ainsi tous les éléments intégraux.

Je dis que deux transformations du faisceau sont *en involution*, si leur crochet appartient au faisceau; c'est le cas où elles définissent en chaque point deux éléments intégraux en involution, au sens que M. Cartan a donné à ce mot. La recherche des sous-faisceaux complets est ainsi subordonnée au problème algébrique qui consiste à trouver les *involutions du faisceau*, d'un *degré* quelconque p; c'est-à-dire les sous-faisceaux $\{U_1, \ldots, U_p\}$ qui satisfont aux congruences [2]

$$(U_i, U_j) \equiv 0, \qquad (\bmod X_1, \ldots X_m), (i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces involutions fournissent les éléments intégraux des divers ordres, considérés par M. Cartan.

Un faisceau sera dit *involutif d'ordre p*, si la transformation générale du faisceau appartient à une involution, au moins, de degré 2, si l'involution générale de degré 2 appartient à une involution, au moins, de degré 3, etc., si enfin l'involution générale de

---

[1] Le faisceau dérivé d'un faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$ est, en effet, constitué par les crochets des *diverses transformations infinitésimales du faisceau*, prises deux à deux de toutes les manières possibles; et le groupe dérivé d'un groupe fini de transformations $[X_1, \ldots, X_m]$ est aussi constitué par les crochets des diverses transformations infinitésimales du groupe, prises deux à deux de toutes les manières possibles. Mais il n'y a pas, en général, identité entre les bases du groupe dérivé et du faisceau dérivé déduits des mêmes transformations infinitésimales $X_1, \ldots, X_m$.

[2] Pour un sous-faisceau complet, on a les congruences de définition

$$(U_i, U_j) \equiv 0 \qquad (\bmod U_1, \ldots, U_p), (i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

degré $p - 1$ appartient à une involution, au moins, de degré p.

Cette définition, calquée sur celle des systèmes de Pfaff en involution de M. Cartan, conduit à introduire la notion de *genre*, et les *caractères* du faisceau, qui sont les mêmes entiers que ceux que M. Cartan a introduits, sous les mêmes noms, dans l'étude des systèmes de Pfaff (on considère un faisceau et un système de Pfaff corrélatifs).

5. Les généralités précédentes font l'objet des deux premiers paragraphes de ce travail. Dans le second paragraphe, j'établis aussi l'existence des sous-faisceaux complets de degré p (c'est-à-dire des *intégrales complètes* à p dimensions), pour tout faisceau involutif d'ordre p, et je précise la nature de l'indétermination du sous-faisceau complet général de degré p.

J'indique ensuite comment on peut *prolonger* un faisceau, de manière à obtenir un faisceau nouveau dont les intégrales à p dimensions soient elles-mêmes les multiplicités obtenues en prolongeant, au sens que Lie a donné à ce mot, les multiplicités intégrales à p dimensions du faisceau initial, par adjonction de leurs éléments de contact.

Pour ne pas surcharger cette esquisse de la nouvelle théorie, je me suis borné à énoncer sans démonstration deux théorèmes fondamentaux, qui sont, du reste, une conséquence des théorèmes analogues de la théorie de M. Cartan : en prolongeant un faisceau involutif, on obtient un faisceau involutif; et le prolongement indéfini d'un faisceau quelconque conduit, après un nombre limité d'opérations, à un faisceau involutif.

J'ai préféré indiquer, dans les deux derniers paragraphes, comment la théorie des caractéristiques découle de l'étude de la structure des faisceaux de transformations infinitésimales; et montrer, par des exemples, que la nouvelle théorie se prête aux applications avec une grande facilité. Je n'ai, dans ce but, abordé que des applications d'un caractère classique, relatives aux équations aux dérivés partielles à deux variables indépendantes et à une fonction inconnue. Le passage des équations aux dérivées partielles aux faisceaux qui leur correspondent se fait, du reste, immédiatement, sans faire intervenir les systèmes de Pfaff.

Les *caractéristiques de Cauchy* sont fournies, dans tous les cas où elles existent, par les transformations du faisceau qui laissent ce faisceau invariant. Ces *transformations distinguées* forment un sous-faisceau complet, dont les intégrales sont les caractéristiques, et l'utilisation de ces intégrales pour l'intégration du faisceau donné est immédiate. J'ai pris comme exemples l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, et les systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre.

Les *caractéristiques de Monge* proviennent, d'une manière analogue, des transformations du faisceau qui, sans être des transformations distinguées, sont néanmoins des *transformations singulières*, au point de vue de la recherche des involutions de degré 2 [1].

Ces transformations, quand elles existent, forment un ou plusieurs sous-faisceaux (en général non complets), dont les intégrales sont, le cas échéant, les caractéristiques en question. J'ai étudié, de cette manière, les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, dans le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont distincts : leurs diverses propriétés s'obtiennent ainsi bien rapidement.

Il est digne de remarque que les *invariants* de l'un ou l'autre de ces systèmes de caractéristiques, tels que M. Goursat les a définis dans ses études, devenues classiques, sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, soient précisément les invariants communs aux transformations infinitésimales des *sous-faisceaux caractéristiques* en question : ces sous-faisceaux doivent, bien entendu, être prolongés jusqu'à l'ordre des invariants que l'on veut considérer.

L'utilisation de ces invariants, de tous ordres, pour l'intégration de l'équation du second ordre découle, de plus, avec une remarquable simplicité, de notre méthode de recherche des intégrales complètes.

Le cas des invariants du premier ordre conduit enfin, tout naturellement, à la notion des caractéristiques du premier ordre : elles sont fournies, quand elles existent, par des *familles de transfor-*

---

[1] On peut, plus généralement, considérer de même des involutions qui sont singulières, relativement à la recherche des involutions de degré supérieur.

mations infinitésimales, qui ne deviennent des faisceaux que dans le cas de l'équation de Monge-Ampère.

J'ai considéré partout des équations aux dérivées partielles résolues par rapport à des dérivées d'ordre maximum. J'indiquerai, dans une autre occasion, comment la méthode des faisceaux de transformations s'adapte à l'étude des équations non résolues. Je montrerai aussi, dans un travail ultérieur, comment on peut développer par cette méthode la théorie des groupes de transformations continus, finis ou infinis, que M. Cartan a fondée sur sa théorie des systèmes de Pfaff en involution.

I. — Les transformations infinitésimales et les problèmes généraux d'intégration.

1. *Faisceaux de transformations infinitésimales.* — Soient données m transformations infinitésimales à n variables,

$$\text{(1)} \qquad X_k f = \sum_{\alpha=1}^{n} (x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Chacune d'elles définit, à partir d'un point quelconque $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions, un déplacement infinitésimal

$$\text{(2)} \quad dx_1 = \xi_{k1}(x_1, \ldots, x_n)\, dt, \qquad \ldots, \qquad dx_n = \xi_{kn}(x_1, \ldots, x_n)\, dt.$$

S'il n'existe aucune identité de la forme

$$\text{(3)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha(x_1, \ldots, x_n) X_\alpha f = 0,$$

à coefficients λ_α non tous nuls, ces déplacements définissent un élément plan à m dimensions; et nous dirons que les transformations $X_1, \ldots, X_m$ sont *divergentes* (¹). Ceci exige $m \leqq n$.

(¹) $X_1, \ldots, X_m$ étant des formes linéaires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, il serait naturel d'employer le mot de transformations *indépendantes;* mais ce mot exprime, dans la terminologie de Sophus Lie, qu'il n'existe entre $X_1, \ldots, X_m$ aucune identité de la forme (3) à coefficients λ_α *constants.*

L'ensemble de toutes les transformations infinitésimales

$$(4) \qquad \mathrm{U}f = \sum_{\alpha=1}^{m} u_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{X}_\alpha f,$$

où les u_α sont des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$, sera dit alors un *faisceau de transformations infinitésimales, de degré m.*

Les transformations $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ constituent la *base* de ce faisceau; mais on peut prendre, comme base définissant le faisceau, *m* autres transformations quelconques, divergentes, du faisceau. Cela revient à effectuer, sur $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, une substitution linéaire homogène, dont les coefficients sont des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$.

On peut, en particulier, se donner le faisceau sous la *forme résolue* par rapport à *m* des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$; c'est-à-dire supposer que $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ sont, par exemple, de la forme

$$(5) \quad \mathrm{X}_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \xi_{k,\alpha}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

2. *Faisceaux complets. Faisceaux dérivés.* — Les crochets de Jacobi

$$(\mathrm{X}_h f, \mathrm{X}_k f) = \mathrm{X}_h \mathrm{X}_k f - \mathrm{X}_k \mathrm{X}_h f, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots m)$$

sont des transformations infinitésimales, covariantes aux transformations $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$; c'est de leur nature que dépendent essentiellement les propriétés du faisceau (4), ou faisceau $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m\}$. Si elles appartiennent toutes au faisceau, nous dirons que le faisceau est *complet*, et nous écrirons

$$(\mathrm{X}_h, \mathrm{X}_k) \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod}\,\mathrm{X}_1), \ldots, \mathrm{X}_m), \ (h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

pour indiquer que ces crochets s'expriment en fonction linéaire homogène de $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$. D'une manière plus abrégée, en désignant le faisceau par une lettre $\mathfrak{F}$, nous écrirons aussi, dans ce cas,

$$(\mathrm{X}_h, \mathrm{X}_k) \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod}\,\mathfrak{F}), (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Si le faisceau n'est pas complet, les crochets $(\mathrm{X}_h, \mathrm{X}_k)$ s'exprimeront en fonction linéaire homogène de $X_1, \ldots, X_m$ et d'autres transformations infinitésimales $X_{m+1}, \ldots, X_{m'}$, qu'on pourra choisir de manière que $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m'}$ soient divergentes; et le faisceau $\{X_1, \ldots, X_{m'}\}$ s'appellera le *dérivé* du faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$.

On voit qu'un faisceau est toujours contenu dans son dérivé, ce qu'on peut exprimer en disant qu'il en est un *sous-faisceau;* et un faisceau complet est un faisceau qui est identique à son dérivé.

Si le dérivé d'un faisceau n'est pas complet, on peut être conduit à considérer le dérivé de ce dérivé, ou *second dérivé* du proposé; et, plus généralement, les *dérivés successifs* de ce faisceau donné.

Comme le nombre m des transformations de base d'un faisceau ne peut dépasser le nombre n des variables, on arrivera nécessairement à un *dernier dérivé*, qui sera complet.

Si ce dernier dérivé est de degré n', inférieur à n, en égalant à zéro ses transformations infinitésimales de base, on obtient un système complet; et si l'on introduisait comme variables $n - n'$ intégrales (indépendantes) de ce système complet, à la place des variables $x_{n'+1}, \ldots, x_n$, le faisceau proposé, ainsi que ses dérivés successifs, ne dépendrait plus, en fait, que des variables $x_1, \ldots, x_{n'}$, puisque les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x'_{n'+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x'_n}$ n'y figureraient plus. Ce résultat se complète sans peine, de manière à arriver au suivant : *le degré du dernier dérivé d'un faisceau de transformations infinitésimales est égal au nombre minimum de variables, effectives, auquel on puisse, par un changement de variables, réduire ce faisceau;* les autres variables (non effectives) n'y figurant plus qu'à titre de paramètres arbitraires.

3. *Intégrales d'un faisceau de transformations.* — Nous dirons qu'une multiplicité M_p de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$, à un nombre $p \leqq m$ de dimensions,

$$F_h(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-p),$$

est une *multiplicité intégrale* du faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$, si elle demeure invariante par p transformations divergentes de ce faisceau. Dans cette définition, il est entendu qu'aucune des transformations en question ne laisse invariant chaque point de la multiplicité. Celle-ci est donc engendrée par les trajectoires de chacune de ces transformations, $U_1, \ldots, U_p$; et aussi par des trajectoires de toute transformation du faisceau $\{U_1, \ldots, U_p\}$. Réciproquement, toute famille, non exceptionnelle, de ∞^{p-1} courbes engendrant la multiplicité M_p est formée de trajectoires de l'une des transformations de ce sous-faisceau $\{U_1, \ldots, U_p\}$ du proposé.

En particulier, les multiplicités intégrales, à une dimension, d'un faisceau sont les trajectoires des diverses transformations de ce faisceau.

Si le faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$, où $m < n$, est complet, il a des multiplicités intégrales à m dimensions, dont on obtient les équations générales sous la forme

$$F_h(x_1, \ldots, x_n) = c_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{6}$$

en égalant à des constantes arbitraires $n - m$ solutions, indépendantes, du système complet $X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0$. Il a aussi des multiplicités intégrales à un nombre quelconque $p < m$ de dimensions, qui se déduisent facilement des précédentes.

En général, *intégrer* un faisceau de transformations infinitésimales, c'est en déterminer toutes les multiplicités intégrales. Nous allons voir que ce problème ne diffère pas de celui qui consiste à intégrer les systèmes différentiels les plus généraux.

4. *Faisceaux de transformations et systèmes de Pfaff.* — La théorie des faisceaux de transformations infinitésimales et celle des systèmes d'équations de Pfaff sont deux théories équivalentes, qui se correspondent par une sorte de *dualité*. C'est ce que l'on peut mettre en évidence par une méthode due à M. Cartan. Associons aux transformations de base du faisceau donné $\{X_1, \ldots, X_m\}$, $n - m = s$ transformations infinitésimales arbitraires $Z_1, \ldots, Z_s$, de manière que $X_1, \ldots, X_m, Z_1, \ldots, Z_s$ soient, dans leur ensemble, divergentes; et nous aurons une identité de la forme

$$df = \varpi_1 X_1 + \ldots + \varpi_m X_m + \omega_1 Z_1 + \ldots + \omega_s Z_s, \tag{7}$$

où $\varpi_1, \ldots, \varpi_m, \omega_1, \ldots, \omega_s$ seront n expressions de Pfaff, indépendantes. Il en résulte que les déplacements infinitésimaux qui satisfont au système de Pfaff

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0 \tag{8}$$

sont précisément ceux qui correspondent aux diverses transformations infinitésimales du faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$.

Toute multiplicité intégrale du faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$ est donc une multiplicité intégrale du système (8), et réciproquement. Les multiplicités intégrales sont seulement définies, dans les deux cas, par deux procédés différents.

La même méthode permet, inversement, de faire correspondre à tout système d'équations de Pfaff un faisceau de transformations équivalent. M. Cartan s'en était servi pour mettre en évidence la correspondance entre les systèmes de Pfaff *complètement intégrables*, et les *systèmes complets* d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles.

Nous dirons qu'un faisceau $\{X_1, \ldots, X_m\}$ et un système $\omega_1 = \ldots = \omega_s = 0$ qui se correspondent ainsi sont *corrélatifs*, ou *dualistiques*, l'un de l'autre. Il résulte de ce que nous venons de rappeler que si le faisceau est complet, le système de Pfaff est complètement intégrable, et réciproquement.

5. *Faisceaux de transformations et équations aux dérivées partielles.* — Ce qui précède suffirait à montrer que l'intégration de tout système d'équations aux dérivées partielles dépend de l'intégration d'un faisceau de transformations infinitésimales. Mais il est utile d'en donner la preuve directe.

Imaginons un système différentiel quelconque (Σ); on pourra le supposer du premier ordre, en prenant, s'il est nécessaire, un certain nombre de dérivées des fonctions inconnues comme variables auxiliaires. Soient, alors, $x_1, \ldots, x_p$ les variables indépendantes, $y_1, \ldots, y_q$ les fonctions inconnues, et $y_{j,i} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ leurs dérivées.

Sur une multiplicité quelconque à p dimensions, $y_1, \ldots, y_q$ et les dérivées $y_{j,i}$ sont des fonctions déterminées, $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_q, \ldots, \overline{y}_{j,i}, \ldots$, de $x_1, \ldots, x_p$; et cette multiplicité admet les p transformations infinitésimales,

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \overline{y}_{\alpha,i} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Elle admet par suite tout système de p transformations infinitésimales,

$$(10) \qquad X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta_{\alpha,i}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \frac{\partial f}{\partial y_\alpha},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p),$$

telles que les $\eta_{\alpha,i}$ deviennent identiques aux $\bar{y}_{\alpha,i}$ de mêmes indices, quand on y remplace les variables y_j par les fonctions $\bar{y}_j$ correspondantes.

Si donc le système (Σ) est résolu par rapport à toutes les dérivées $y_{j,i}$, c'est-à-dire de la forme

$$(11) \qquad y_{j,i} = \eta_{j,i}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q),$$

toute multiplicité intégrale de (Σ) admet les transformations (10), dès que l'on y remplace les $\eta_{j,i}$ par les seconds membres des équations (11); et réciproquement toute multiplicité intégrale, à p dimensions, du faisceau (10) ainsi défini, sera une multiplicité intégrale du système (Σ). Intégrer (Σ), ce sera donc trouver les multiplicités intégrales à p dimensions du faisceau (10), qui s'en déduit immé- diatement.

Dans le cas général, les équations du système (Σ) pourront se mettre sous la forme

$$(12) \qquad y_{j,i} = P_{j,i}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, w_1, \ldots, w_r),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q),$$

où $w_1, \ldots, w_r$ seront des indéterminées convenablementchoisies [1]. Ce pourront être certaines des dérivées $y_{j,i}$; et, plus généralement, des fonctions déterminées des coordonnées d'un point de la multiplicité et des dérivées $y_{j,i}$. Quoi qu'il en soit, si l'on tient compte des équations (12) du système, l'ensemble des valeurs de $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_q, w_1, \ldots, w_r$ définira entièrement, *sur toute multiplicité intégrale*, un *élément de contact.*

On a donc ainsi réalisé un *prolongement* (au sens de Sophus

[1] Si les dérivées de certaines des fonctions inconnues ne figurent pas dans les équations du système (Σ), on peut rayer ces fonotions de la liste $y_1, \ldots, y_q$, et les introduire parmi $w_1, \ldots, w_r$. Cela entraînerait, dans les considérations qui suivent, quelques modifications de forme, que j'omets pour abréger.

Lie) des multiplicités intégrales; et ce sont dès lors ces *multiplicités intégrales prolongées* que l'on se proposera de trouver. Sur chacune d'elles, non seulement les y_j sont des fonctions déterminées $\overline{y}_j$ des variables $x_1, \ldots, x_p$; mais les w_k sont aussi des fonctions déterminées $\overline{w}_k$ de ces variables, qui sont définies, du reste, dès qu'on se donne la multiplicité initiale, à cause des équations (12).

Chaque multiplicité intégrale (initiale) admet donc les transformations

$$(13)\quad \mathrm{X}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \mathrm{P}_{\alpha,i}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, w_1, \ldots, w_r)\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

dès qu'on y remplace les y_j et les w_k par les fonctions $\overline{y}_j$ et $\overline{w}_k$ qui correspondent à cette multiplicité. Mais, si l'on veut passer à la multiplicité prolongée, il faudra faire intervenir les dérivées

$$w_{k,i} = \frac{\partial w_k}{\partial x_i},$$

et substituer aux transformations (9) les *transformations prolongées*

$$(14)\quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \overline{y}_{\alpha,i}\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{r} \overline{w}_{\beta,i}\frac{\partial f}{\partial w_\beta}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Or les équations du système (Σ) ne donnent aucune indication relative à ces fonctions $\overline{w}_{\beta,i}$ (dérivées des fonctions $\overline{w}_\beta$). On pourra donc affirmer seulement que toute multiplicité intégrale prolongée admet p transformations infinitésimales de la forme

$$(15)\qquad \mathrm{X}_i f + \sum_{\beta=1}^{r} w_{\beta,i}\frac{\partial f}{\partial w_\beta}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les X_i sont les transformations (13) qui sont connues, et où les $w_{\beta,i}$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q; w_1, \ldots, w_r$, qu'il restera à choisir convenablement.

La réciproque est immédiate; et l'on peut conclure que l'intégration du système (Σ) équivaut à la détermination des multiplicités intégrales à p dimensions du faisceau, connu par les équations (12) et les formules (13),

$$(16)\qquad \left\{ X_1, \ldots, X_p, \frac{\partial f}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial w_r} \right\}.$$

6. *Exemples.* — 1° Le faisceau de transformations infinitésimales qui correspond à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial x_p} = \Phi\left(x_1, \ldots, x_p, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_{p-1}}\right)$$

est défini par les transformations

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

$$X_p = \frac{\partial f}{\partial x_p} + \Phi(x_1, \ldots, x_p, y, y_1, \ldots, y_{p-1}) \frac{\partial f}{\partial y},$$

et par les transformations $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{p-1}}$.

2° Le faisceau qui correspond à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$t = \Phi(x, y, z, p, q, r, s)$$

a pour base les quatre transformations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + r\frac{\partial f}{\partial z} + x\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + \Phi\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial s}.$$

3° Le faisceau qui correspond au système d'équations aux dérivées partielles du second ordre

$$s = \Phi(x, y, z, p, q, r), \qquad t = \Psi(x, y, z, p, q, r)$$

est défini par les trois transformations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + \Phi\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \Phi\frac{\partial f}{\partial p} + \Psi\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}.$$

7. *Intégrales complètes.* — Je dirai, pour abréger, qu'une famille de multiplicités est *régulière*, s'il passe par chaque point de l'espace une multiplicité de la famille, et une seule [1]. Et

---

[1] Dans cette étude générale, nous laissons de côté toutes les singularités. Il est donc ici sous-entendu qu'on limite convenablement, s'il y a lieu, l'espace et les multiplicités. Des restrictions du même genre sont faites, implicitement, dans tous les cas analogues.

j'appellerai *intégrale complète* d'un faisceau toute famille régulière d'intégrales de ce faisceau, à un nombre quelconque de dimensions.

Soient $\{X_1, \ldots, X_m\}$ un faisceau, et $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0$ le système de Pfaff dualistique [nº 4]. Si le faisceau admet une intégrale complète, on peut, par un changement de variables, la ramener à la forme $x_{p+1} = c_1, \ldots, x_n = c_{n-p}$. Le système de Pfaff doit donc être vérifié, dans l'hypothèse $dx_{p+1} = \ldots = dx_n = 0$, quels que soient $x_1, \ldots, x_p, dx_1, \ldots, dx_p$, quand on y remplace $x_{p+1}, \ldots, x_n$ par des constantes arbitraires. C'est dire qu'il est vérifié identiquement, dès qu'on y fait $dx_{p+1} = \ldots = dx_n = 0$. Donc $\omega_1, \ldots, \omega_s$ sont des formes linéaires en $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$.

On peut, dès lors, satisfaire à l'identité (7) [nº 4], en prenant pour $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$ les différentielles $dx_1, \ldots, dx_p$, et pour $\varpi_{p+1}, \ldots, \varpi_m$ des formes en $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$. Il en résulte qu'on peut supposer $X_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, X_p = \frac{\partial f}{\partial x_p}$; c'est-à-dire qu'il existe dans le faisceau donné un sous-faisceau complet ayant pour intégrale générale l'intégrale complète supposée.

La recherche des intégrales complètes d'un faisceau équivaut donc à celle des sous-faisceaux complets de ce faisceau. Il est entendu qu'une fois ces sous-faisceaux complets trouvés, il restera à les intégrer; mais cela se fait par l'intégration d'équations différentielles ordinaires; et le but de la théorie générale des systèmes différentiels généraux est d'en effectuer ou d'en simplifier l'intégration par celle d'équations différentielles ordinaires.

La première partie de notre théorie d'intégration aura donc pour objet de discuter l'existence des sous-faisceaux complets d'un faisceau de transformations infinitésimales, supposé donné. Le paragraphe suivant sera consacré à cette question.

Quant aux multiplicités intégrales isolées, les unes feront partie d'intégrales complètes, et leur détermination dépendra de la théorie en question : on pourra dire que ce sont des *intégrales particulières*.

Les autres sont, au même point de vue, des *intégrales singulières*. Notre théorie doit avoir, en effet, pour un de ses caractères essentiels, d'être indépendante de tout changement de variables. Or il est facile de montrer, sur des exemples, que des changements de variables convenablement choisis peuvent faire apparaître dans un faisceau, ou en faire disparaître, des intégrales de l'espèce que nous appelons singulière. Ainsi le faisceau $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z}$ n'a aucune multiplicité intégrale à deux dimensions; il acquiert cependant l'intégrale (singulière) $x' = 0$ par le changement de variables $x' = e^x$, $y' = y$, $z' = z$; il acquiert de même l'intégrale (singulière) $y' = 0$ par le changement de variables $x = yx'$, $y = y'$, $z = z'$: ces intégrales singulières s'introduisant, en fait, à la faveur d'une singularité du changement de variables lui-même.

Nous reviendrons, du reste, à la fin du paragraphe suivant, sur la détermination de *toutes* les multiplicités intégrales, singulières ou non.

II. — Faisceaux involutifs. Existence des intégrales complètes. Prolongement d'un faisceau.

8. *Involutions d'un faisceau.* — Conformément à la conclusion du précédent paragraphe, nous passons à la recherche des sous-faisceaux complets d'un faisceau quelconque $\{ X_1, \ldots, X_m \}$ donné. Si ce faisceau donné $\mathcal{F}$ est complet, il admet une intégrale complète à m dimensions, unique :

$$(1) \qquad F_h(x_1, \ldots, x_h) = c_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m);$$

et il suffit de la couper par une famille de multiplicités régulière quelconque

$$(2) \qquad G_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-p),$$

pour obtenir l'intégrale complète la plus générale à p dimensions du faisceau $\mathcal{F}$.

Nous supposons donc que le faisceau donné $\mathcal{F}$ n'est pas complet; et nous introduisons le faisceau dérivé $\{ X_1, \ldots, X_m; Z_1, \ldots, Z_s \}$. La somme $s + m$ est ici au plus égale au nombre n des variables. On a, d'après la définition du faisceau dérivé [n° 2], des identités de la forme

$$(3) \quad (X_i, X_j) = \sum_{\alpha=1}^{s} c_{i,j,\alpha}(x_1, \ldots, x_n) Z_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} g_{i,j,\beta}(x_1, \ldots, x_n) X_\beta, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

où les fonctions $c_{i,j,h}$ définissent ce que l'on peut appeler la *structure* du faisceau [1].

Les conditions qui expriment que le sous-faisceau

$$(4) \qquad U_h = \sum_{\alpha=1}^{m} u_{h,\alpha}(x_1, \ldots, x_n) X_\alpha, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

est complet s'écrivent, par suite,

$$(5) \quad o = (U_h, U_k) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\delta=1}^{m} c_{\gamma,\delta,\alpha} u_{h,\gamma} u_{k,\delta} \right) Z_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} \left(U_h u_{k,\beta} - U_k u_{h,\beta} + \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\delta=1}^{m} g_{\gamma,\delta,\beta} u_{h,\gamma} u_{k,\delta} \right) X_\beta;$$

ce qui donne les conditions

$$(6) \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} c_{\alpha,\beta,j} u_{h,\alpha} u_{k,p} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

et

$$(7) \quad U_h u_{k,i} - U_k u_{h,i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} g_{\alpha,\beta,i} u_{h,\alpha} u_{k,\beta} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il convient de tenir compte d'abord des conditions (6), qui sont de nature purement algébrique. Elles sont équivalentes aux identités-congruences

$$(8) \qquad (U_h, U_k) \equiv 0, \qquad (\text{mod } \mathcal{F}), \ (h, k = 1, 2, \ldots, p),$$

comme on le voit immédiatement sur les expressions (5) des crochets (U_h, U_k).

Nous dirons que deux transformations infinitésimales du faisceau $\mathcal{F}$ sont *en involution*, si leur crochet appartient au faisceau, c'est-à-dire si ce crochet est congru à zéro (mod $\mathcal{F}$); et qu'un sous-faisceau $\{ U_1, \ldots, U_p \}$ de $\mathcal{F}$ est *une involution, de degré p*, de ce faisceau, si ses transformations sont deux à deux en involu-

[1] Il suffit de prendre le faisceau sous forme résolue [nº 1], pour faire disparaître des formules (3) les fonctions $g_{i,j,k}$.

tion ([1]). C'est parmi les involutions de degré p du faisceau $\mathcal{F}$ que se trouveront les sous-faisceaux complets de degré p.

9. *Faisceaux involutifs d'ordre p.* — Pour déterminer l'*involution générale de degré p*, on pourra écrire les congruences (8) sous la forme

$$
\begin{array}{llllll}
(8_1) & (U_1, U_2) \equiv 0, & & & & \\
(8_2) & (U_1, U_3) \equiv 0, & (U_2, U_3) \equiv 0, & & & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & & & \\
(8_{p-1}) & (U_1, U_p) \equiv 0, & (U_2, U_p) \equiv 0, & \ldots, & (U_{p-1}, U_p) \equiv 0. &
\end{array}
$$

Se donnant pour U_1 la transformation générale du faisceau $\mathcal{F}$, on prendra pour U_2 la solution générale de l'identité-congruence

$$(9_1) \qquad (U_1, U) \equiv 0, \qquad \left(U = \sum_{\alpha=1}^{m} u_\alpha(x_1, \ldots, x_n) X_\alpha \right);$$

puis pour U_3 la solution générale des identités-congruences

$$(9_2) \qquad (U_1, U) \equiv 0, \qquad (U_2, U) \equiv 0;$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive, si aucune impossibilité ne se manifeste, à prendre pour U_p la solution la plus générale des identités-congruences

$$(9_{p-1}) \quad (U_1, U) \equiv 0, \qquad (U_2, U) \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad (U_{p-1}, U) \equiv 0.$$

Il faudra, bien entendu, que (9_1) admette des solutions autres que les transformations du faisceau $\{U_1\}$, que (9_2) admette des solutions autres que les transformations du faisceau $\{U_1, U_2\}$; et ainsi de suite, et qu'enfin (9_{p-1}) admette des solutions autres que les transformations du faisceau $\{U_1, \ldots, U_{p-1}\}$.

S'il en est ainsi, le faisceau $\mathcal{F}$ sera dit un *faisceau involutif, d'ordre p* (au moins). *La définition d'un faisceau involutif d'ordre p est donc la suivante : la transformation générale du faisceau appartient à une involution, au moins, de degré* 2; *l'involution générale de degré* 2 *appartient à une involution,*

([1]) Les déplacements élémentaires que les transformations d'une involution de degré p déterminent en chaque point de l'espace, constituent un *élément intégral* d'ordre p, d'après la terminologie de M. Cartan.

au moins, de degré 3, *et ainsi de suite; enfin l'involution générale de degré* $p-1$ *appartient à une involution, au moins, de degré* p.

On remarquera que tous les systèmes (9_1), (9_2), ..., (9_{p-1}) équivalent à des systèmes d'équations linéaires homogènes en $u_1, \ldots, u_m$. Le degré d'indétermination de chacun d'eux est donc fixé par le *rang* du système linéaire qu'il fournit ainsi (degré du déterminant principal); et il ne peut s'élever si l'on particularise successivement $U_1, U_2, \ldots, U_{p-i}$. Nous désignerons par q_1, $q_2, \ldots, q_{p-1}$ les rangs de ces systèmes linéaires, calculés en laissant à $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$ toute l'indétermination dont chacune de ces transformations se trouve, successivement, susceptible au cours des calculs précédents.

En d'autres termes, q_1 *est le nombre des équations linéaires, indépendantes* (en $u_1, u_2, \ldots, u_m$), *qui expriment que la transformation* $U = u_1X_1 + u_2X_2 + \ldots + u_mX_m$ *du faisceau est en involution avec la transformation générale* (*du faisceau*); q_2 *est le nombre des équations linéaires indépendantes, qui expriment que* U *est en involution avec chacune des transformations de l'involution générale de degré* 2 (*du faisceau*); *et ainsi de suite.*

Nous dirons qu'une transformation quelconque U_1 du faisceau est *non singulière*, si elle fournit pour (9_2) un système linéaire de rang q_1; qu'une involution $\{U_1, U_2\}$ du faisceau est *non singulière*, si elle fournit, pour (9_1), un système linéaire de rang q_2; et ainsi de suite.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau involutif d'ordre p, on aura, d'après ce qui précède,

$$(10) \qquad q_1 + 1 < m, \qquad q_2 + 2 < m, \qquad \ldots, \qquad q_{p-1} + (p-1) < m,$$

puisque $m - q_1$, $m - q_2$, ..., $m - q_{p-1}$ sont les nombres des solutions indépendantes des systèmes successifs (9_1), (9_2), ..., (9_{p-1}). Remarquons qu'on a d'autre part,

$$(11) \qquad q_1 \leqq q_2 \leqq \ldots \leqq q_{p-1};$$

puisque les équations de chacun des systèmes linéaires considérés font partie du système suivant. La dernière des inégalités (10) s'écrit, enfin, $q_{p-1} \leqq q$, si l'on pose $q = m - p$.

10. *Genre, indices et caractères d'un faisceau.* — Le *genre* g d'un faisceau $\mathfrak{F}$ est l'ordre maximum d'involutivité du faisceau. Un faisceau de genre g est donc, par définition, involutif d'ordre p. si $p \leqq g$; et ne l'est pas, si $p > g$.

Considérons, pour un tel faisceau, les identités-congruences

$$(12) \qquad (U_1, U) \equiv 0, \qquad (U_2, U) \equiv 0, \qquad .., \qquad (U_g, U) \equiv 0,$$

où $\{U_1, \ldots, U_g\}$ est l'involution générale de degré g, du faisceau. Le rang du système linéaire correspondant, en $u_1, \ldots, u_m$, est

$$(13) \qquad q_g = m - g,$$

puisque les congruences (12) ne sont satisfaites, d'après la définition du genre g, que si U appartient au faisceau $\{U_1, \ldots, U_g\}$.

Les *caractères* (¹) du faisceau seront, par définition, les entiers positifs ou nuls,

$$(14) \quad s_1 = q_1, \quad s_2 = q_2 - q_1, \quad s_3 = q_3 - q_2, \quad \ldots, \quad s_g = q_g - q_{g-1};$$

et l'on aura, inversement, pour les entiers $q_1, q_2, \ldots, q_g$, que nous appellerons les *indices du faisceau*,

$$(15) \qquad q_1 = s_1, \qquad q_2 = s_1 + s_2, \qquad q_3 = s_1 + s_2 + s_3, \qquad \ldots, \\ q_g = s_1 + s_2 + \ldots + s_g.$$

Remarquons que, s_2 étant le nombre des équations indépendantes du système linéaire fourni par (9_1), et $s_1 + s_2$ celui des équations (indépendantes) du système linéaire équivalent à (9_2), s_2 est le nombre des équations (indépendantes) que $(U_2, U) \equiv 0$ ajoute à celles que fournit $(U_1, U) \equiv 0$. Donc s_2 ne peut être supérieur au nombre des équations indépendantes que fournirait $(U_2, U) \equiv 0$, considéré seul, et ce dernier nombre ne peut être supérieur à s_1, [n° 9], mais peut lui être inférieur, puisque U_2, étant en involution avec U_1, n'est plus la transformation la plus générale du faisceau $\mathfrak{F}$.

On conclut donc $s_2 \leqq s_1$; et, de même, $s_3 \leq s_2$, et ainsi de suite.

(¹) Le genre et les caractères d'un faisceau sont les mêmes nombres que ceux que M. Cartan a introduits, sous les mêmes noms, pour le système de Pfaff dualistique du faisceau. Les inégalités que nous établissons à leur égard ne son donc pas nouvelles.

Ainsi, les caractères du faisceau sont liés par les inégalités

(16) $$s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots \geqq s_g.$$

Par suite, si l'un des caractères est nul, tous les suivants le sont aussi.

11. *Forme résolue des involutions.* — Revenons à l'étude des involutions d'un faisceau, en gardant toutes les notations précédentes. Dans l'involution générale de degré p du faisceau $\mathcal{F}$,

(17) $$U_h = u_{h,1}X_1 + \ldots + u_{h,m}X_m, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p; \qquad p \leqq g),$$

supposée calculée par la méthode du n° 9, les coefficients $u_{1,\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, sont arbitraires, les coefficients $u_{2,\alpha}$ sont liés par q_1 équations linéaires indépendantes (dont les coefficients dépendent des $u_{1,\alpha}$), les coefficients $u_{3,\alpha}$ sont liés par q_2 équations linéaires indépendantes (dont les coefficients dépendent des $u_{1,\alpha}$ et des $(m - q_1)$ fonctions $u_{2,\alpha}$ restées arbitraires); et ainsi de suite. Dans leur ensemble, les coefficients

$$u_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p; \ \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

sont donc liés par $q_1 + q_2 + \ldots + q_{p-1}$ équations indépendantes.

Pour avoir le nombre des arbitraires d'un sous-faisceau (17) quelconque, il faut le prendre sous forme résolue, par exemple sous la forme

(18) $$V_h = X_h + \sum_{\alpha=1}^{q} v_{\alpha,h}X_\alpha, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p; \qquad q = m - p).$$

Ce nombre d'arbitraires est donc pq et le nombre des arbitraires *essentiels* de l'involution générale de degré p du faisceau $\mathcal{F}$ est égal à

(19) $$Q = pq - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{p-1}).$$

Pour mettre ces Q arbitraires en évidence, reprenons la recherche de cette involution générale en la mettant d'emblée sous la forme (18) et en suivant la même marche qu'au n° 9. Nous aurons à considérer successivement les systèmes d'identités-congruences

$$
\begin{array}{llll}
(20_1) & (V_1, U) \equiv 0, & & \\
(20_2) & (V_1, U) \equiv 0, & (V_2, U) \equiv 0, & \\
\dots & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \\
(20_{p-1}) & (V_1, U) \equiv 0, & (V_2, U) \equiv 0, & \dots, \quad (V_{p-1}, U) \equiv 0,
\end{array}
$$

dans lesquelles on a encore posé

$$U = u_1 X_1 + \ldots + u_m X_m.$$

Si la transformation V_1 est, pour des valeurs arbitraires des $v_{\alpha,1}$, non singulière [n° 9], la solution générale de (20_1), en $u_1, \ldots, u_m$, dépendra de $m - q_1$ arbitraires. De plus $u_1, \ldots, u_p$ n'y peuvent être liés par aucune relation; car, lorsque les V_h sont ceux que donne la première méthode, le système (20_1) admet la solution

$$u_1 V_1 + u_2 V_2 + \ldots + u_p V_p = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_p X_p + \ldots,$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont arbitraires; donc $u_1, \ldots, u_p$ étant arbitraires pour un certain choix des $v_{\alpha,1}$, le sont *a fortiori* quand les $v_{\alpha,1}$ sont indéterminés. Ainsi, dans la solution générale de (20_1), $u_1, \ldots, u_p$ sont arbitraires, ainsi que $m - p - q_1$ autres coefficients de U, tandis que les autres coefficients de U s'expriment au moyen de ceux-là. Il en résulte qu'il y a des solutions de la forme V_2, (obtenues pour $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, $\ldots$, $u_p = 0$), et que dans la plus générale, q_1 des $v_{\alpha,2}$ s'expriment au moyen des $q - q_1$ autres, qui demeurent arbitraires.

Si l'involution générale $\{V_1, V_2\}$ ainsi obtenue est non singulière [n° 9], on peut raisonner de même sur le système (20_2); et ainsi de suite.

Sont donc arbitraires dans l'involution générale (18) : les q coefficients $v_{\alpha,1}$, $q - q_1$ des $v_{\alpha,2}$, $q - q_2$ des $v_{\alpha,3}$, $\ldots$, $q - q_{p-1}$ des $v_{\alpha,p}$. Les $v_{\alpha,2}$ non arbitraires s'expriment au moyen des $v_{\alpha,1}$ et des $v_{\alpha,2}$ restés arbitraires; les $v_{\alpha,3}$ non arbitraires s'expriment au moyen des $v_{\alpha,1}$, et des $v_{\alpha,2}$ et $v_{\alpha,3}$ restés arbitraires; et ainsi de suite.

On peut remarquer de plus que si $q - q_{k-1}$ des coefficients $u_1, \ldots, u_m$ sont arbitraires dans la solution générale de (20_k), ils le sont *a fortiori* dans la solution générale de (20_{k-1}), qui est contenue dans (20_k). On pourra donc choisir les notations de manière que les arbitraires soient

$$v_{1,1},\ \ldots,\ v_{q,1};\quad v_{q_1+1,2},\ \ldots,\ v_{q,2};\quad v_{q_2+1,3},\ \ldots,\ v_{q,3};\quad \ldots,$$
$$\ldots,\quad v_{q_{p-1}+1,p},\ \ldots,\ v_{q,p}.$$

Il reste à montrer que l'on peut prendre $X_1, \ldots, X_p$ de manière que les involutions successives

$$\{V_1\},\quad \{V_1, V_2\},\quad \ldots,\quad \{V_1, V_2, \ldots, V_{p-1}\},$$

auxquelles conduit l'application de la méthode, soient toutes non singulières.

Remarquons d'abord, à cet effet, que cela a lieu si l'on prend $X_1, \ldots, X_p$ en involution deux à deux, et tels que les involutions

$$\{X_1\},\quad \{X_1, X_2\},\quad \ldots,\quad \{X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}\}$$

soient toutes non singulières. Car cela a lieu alors, par hypothèse, quand on annule tous les $v_{\alpha,h}$, $(h = 1, 2, \ldots, p)$; et cela a lieu par suite *a fortiori* quand on les assujettit seulement aux conditions $(V_h, V_j) \equiv 0$, $(h, j = 1, 2, \ldots, p)$, ces conditions étant vérifiées par hypothèse quand on annule tous les $v_{\alpha,h}$.

Cela posé, partons d'une base quelconque $\{X_1^0, \ldots, X_m^0\}$ du faisceau $\mathfrak{F}$; et prenons, dans ce qui précède,

$$X_h = \sum_{\alpha=1}^{m} u_{\alpha,h} X_\alpha^0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

les $u_{\alpha,i}$ étant des indéterminées (fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, comme tous les arbitraires que nous introduisons). V_1 ne cesse d'être non singulière que si les coefficients $u_{\alpha,1}$ satisfont à un certain système S_1 d'équations algébriques. L'involution $\{V_1, V_2\}$ calculée ensuite par la méthode précédente ne cesse d'être non singulière que si les coefficients $u_{\alpha,1}$ et $u_{\alpha,2}$ satisfont à un certain système S_2 d'équations algébriques; et ainsi de suite. Aucun de ces systèmes $S_1, S_2, \ldots$ n'est vérifié par tous les systèmes de valeurs des $u_{\alpha,\beta}$; puisque nous avons vu qu'on pouvait choisir les $u_{\alpha,\beta}$ de manière qu'aucun de ces systèmes $S_1, S_2, \ldots$, ne fût vérifié.

La méthode pourra donc certainement s'appliquer sans qu'on soit obligé de prendre pour $X_1, \ldots, X_p$, comme nous l'avons fait un moment, des transformations qui soient deux à deux en involution.

Je dis maintenant que, *en faisant, s'il est nécessaire, un changement de variables préliminaires, on pourra appliquer la méthode en prenant pour* $X_1, \ldots, X_m$ *la base du faisceau résolue par rapport aux dérivées* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ [n° **1**].

Supposons, en effet, que $\{X_0^1, \ldots, X_m^0\}$ soit précisément cette forme résolue

$$X_k^0 = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \xi_{k,\alpha}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m);$$

et faisons un changement de variables de la forme

$$(21) \qquad x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Puis résolvons le faisceau sous la forme

$$Y_h = \frac{\partial f}{\partial y_h} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \eta_{h,\alpha}(y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha},$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m).$$

Par le changement de variables (21), Y_h deviendra inversement une transformation du faisceau $\mathfrak{F}$,

$$X_h = Y_h\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + Y_h\varphi_m \frac{\partial f}{\partial x_m} + \eta_{h,m+1} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + \eta_{h,n} \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

on aura donc l'identité

$$X_h = \sum_{\alpha=1}^{m} Y_h\varphi_\alpha X_\alpha^0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Les $Y_h\varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial Y_h} + \ldots$ ne peuvent, pour un choix arbitraire des fonctions φ_i, être liés par aucun système d'équations algébriques qui ne soit de nature identique. Donc ils ne satisferont, en général, à aucun des systèmes différentiels qu'on déduit des systèmes $S_1, S_2, \ldots$ en y posant $u_{\alpha,h} = Y_h\varphi_\alpha$. Et ceci prouve que notre affirmation est légitime.

12. *Existence des sous-faisceaux complets de degré* 2. — Nous pouvons établir maintenant l'existence de sous-faisceaux complets, pour tous les degrés p qui ne dépassent pas le genre g du faisceau $\mathfrak{F}$ considéré; c'est-à-dire d'intégrales complètes ayant un nombre de dimensions p donné, au plus égal à ce genre g. Nous commencerons par les sous-faisceaux de degré 2, et nous passerons au cas général par récurrence.

Nous prendrons les transformations de base du faisceau sous la forme résolue [n° 1, éq. (5)]

$$(22)\quad X_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \xi_{k,\alpha}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m);$$

de sorte que les identités (3) [n° 8] auront la forme

$$(23)\quad (X_i, X_j) = \sum_{\alpha=1}^{s} c_{i,j,\alpha}(x_1, \ldots, x_n)Z_\alpha, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

les Z_h étant elles-mêmes des transformations du faisceau

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}.$$

Partons de l'involution générale de degré 2 $\{V_1, V_2\}$, prise sous la forme

$$(24)\quad V_1 = X_1 + \sum_{\alpha=1}^{q} v_{\alpha,1} X_{\alpha+2}, \qquad V_2 = X_2 + \sum_{\alpha=1}^{q} v_{\alpha,2} X_{\alpha+2}, \qquad (q = m-2).$$

On a identiquement, puisqu'il y a involution [n° 8],

$$(V_1, V_2) = \sum_{\alpha=1}^{q} (V_1 v_{\alpha,2} - V_2 v_{\alpha,1}) X_{\alpha+2},$$

de sorte que le faisceau $\{V_1, V_2\}$ sera complet sous les conditions

$$(25)\qquad V_1 v_{\alpha,2} - V_2 v_{\alpha,1} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Puisque $\{V_1, V_2\}$ est l'involution générale de degré 2, on peut [n° 11] considérer, dans les formules (24), les $v_{\alpha,2}$ et $q - q_1$

des $v_{,\alpha 1}$ comme arbitraires; les autres $v_{\alpha,1}$ étant fonctions de ces arbitraires ([1]). Si l'on remplace ces $v_{\alpha,1}$ par leurs expressions dans les équations de conditions (25), on pourra y considérer les autres $v_{\alpha,1}$ (par exemple, $v_{q_1+1,1}, \ldots, v_{q,1}$) comme des fonctions, arbitrairement choisies, de $x_1, \ldots, x_n$; de sorte que ce sera un système d'équations aux dérivées partielles, relativement à $v_{1,2}, \ldots, v_{q,2}$ seuls.

Il résulte alors de la forme résolue de X_1 et X_2 que ce système est un système de Kowalewski; il admet donc une solution dans laquelle les fonctions $v_{\alpha,2}(x_1^0, x_2, \ldots, x_n)$, où x_1^0 est une valeur numérique arbitraire de x_1, sont des fonctions arbitrairement données; et c'est la solution générale de ce système (25).

Nous concluons donc que, si un faisceau est de genre $\geqq 2$, il contient des sous-faisceaux complets de degré 2, et le sous-faisceau complet *général* de degré 2, dépend de $m-2-q_1$ fonctions arbitraires de n arguments, et de $m-2$ fonctions arbitraires de $n-1$ arguments. Rappelons que n est le nombre total des variables, et m le degré du faisceau.

13. *Théorème général d'existence.* — Gardons les notations des numéros précédents; et cherchons les sous-faisceaux complets de degré quelconque p, inférieur ou égal au genre g du faisceau donné $\mathcal{F}$. Nous supposerons un tel sous-faisceau mis sous la forme résolue

$$(26)\qquad V_i = X_i + \sum_{\alpha=1}^{q} v_{\alpha,i} X_{\alpha+p}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ q = m-p).$$

D'après le résultat obtenu pour $p=2$, il est naturel de penser que *de tels sous-faisceaux existent, et que, pour le plus général d'entre eux, les arbitraires sont : $q - q_{p-1}$ des fonctions $v_{\alpha 1}$, les valeurs* ([2]) *de $q - q_{p-2}$ des fonctions $v_{\alpha 2}$ pour $x_1 = x_1^0$, les*

([1]) On peut, dans les considérations du n° 11, prendre $X_1, \ldots, X_p$ dans un ordre arbitraire.

([2]) Par ce mot *valeur* nous désignons, pour abréger, une fonction de toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$ autres que celles auxquelles on donne des *valeurs numériques* déterminées $x_1^0, x_2^0, \ldots$.

valeurs de $q - q_{p-3}$ *des fonctions* $v_{\alpha,3}$ *pour* $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$; *etc.*, *les valeurs de* $q - q_1$ *des fonctions* $v_{\alpha,p-1}$ *pour* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{p-2} = x_{p-2}^0$; *et enfin les valeurs de* q *des fonctions* $v_{\alpha,p}$ *pour* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{p-1} = x_{p-1}^0$.

Supposons ce théorème établi pour les sous-faisceaux de degrés $2, 3, \ldots, p-1$, et examinons s'il subsiste pour les sous-faisceaux de degré p.

Nous avons des identités de la forme

$$(27)\quad (V_i, V_j) = \sum_{\alpha=1}^{q} A_{i,j,\alpha} X_{\alpha+p} + \sum_{\beta=1} C_{i,j,\beta} Z_\beta, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

en posant, pour abréger,

$$(28)\qquad A_{i,j,\alpha} = V_i v_{\alpha,j} - V_j v_{\alpha,i},$$

et en désignant par $C_{i,j,k}$ les premiers membres des équations algébriques

$$(29)\qquad C_{i,j,k} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, s),$$

qui expriment que le sous-faisceau est une involution de $\mathfrak{F}$. A ces équations s'ajoutent, pour que le sous-faisceau soit complet — (*cf.* n° 8) —, les équations différentielles

$$(30)\qquad A_{i,j,k} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q).$$

Considérons d'abord les équations, linéaires en $v_{1,1}, \ldots, v_{q,1}$,

$$(31)\qquad C_{1,j,k} = 0, \qquad (j = 2, 3, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Dans l'involution générale $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$, elles déterminent V_1, quand on suppose donnée l'involution générale $\{V_2, \ldots, V_p\}$; il y a alors q_{p-1} de ces équations qui sont indépendantes, et les autres sont des conséquences de celles-là. Isolons ces q_{p-1} équations, et désignons par la notation

$$(32)\qquad \Gamma_h(v_{1,1}, \ldots, v_{q,1}) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, q_{p-1}),$$

celles des équations (31), supposées écrites en laissant les $v_{\alpha,p}$ entièrement indéterminés, d'où elles proviennent. Ces équations (32) sont, *a fortiori*, indépendantes; et l'on a des identités de la forme

$$(33)\qquad C_{i,j,k} = \sum_{\alpha=1}^{q_{p-1}} \varphi_{j,k,\alpha} F_\alpha + \sum_{\alpha=2}^{p} \sum_{\beta=2}^{p} \sum_{\gamma=1}^{s} \psi_{j,k/\alpha,\beta,\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma},$$

pour exprimer que le système (31) se réduit au système (32), quand on introduit les relations entre les $v_{\alpha,2}, v_{\alpha,3}, \ldots, v_{\alpha,p}$ qui expriment que $\{V_2, \ldots, V_p\}$ est une invclution, c'est-à-dire les équations

$$(34)\qquad C_{i,j,k} = 0, \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Les φ sont des fonctions des $v_{\alpha,2}, v_{\alpha,3}, \ldots, v_{\alpha,p}$; et les ψ dépendent de ces indéterminées, et de celles des quantités $v_{\alpha,1}$ que les équations (32) laissent arbitraires. Nous supposerons, pour fixer les idées, que ces dernières sont $v_{q_{p-1}+1,1}, \ldots, v_{q,1}$ [1].

---

[1] On peut, en effet, écrire d'abord des identités de la forme

$$(33\ bis)\qquad C_{i,j,k} = \sum_{\alpha=1}^{q_{p-1}} \varphi_{j,k,\alpha} F_\alpha + \sum_{\beta=1}^{q-q_{p-1}} \rho_{j,k,\beta}\, v_{q_{p-1}+\beta,1} + \rho_{j,k,0}.$$

Les équations $\rho_{j,k,l} = 0$ sont des conséquences des équations (34); car, si l'on suppose ces équations (34) vérifiées par les $v_{\alpha,2}, v_{\alpha,3}, \ldots, v_{\alpha,v}$, les $C_{i,j,k}$, fonctions linéaires de $v_{1,1}, \ldots, v_{q,1}$, deviennent alors des combinaisons homogènes des seules fonctions linéaires (de ces variables) $F_1, \ldots, F_{q_{p-1}}$.

Considérons alors les équations (34). On sait — (n° 11) — qu'on les résout de proche en proche : d'abord q_1 d'entre elles par rapport à q_1 des $v_{\alpha,p-1}$; puis q_2 autres par rapport à q_2 des $v_{\alpha,p-2}$; et ainsi de suite; enfin q_{p-2} d'entre elles par rapport à q_{p-2} des $v_{\alpha,2}$. Tous les systèmes que l'on a ainsi à résoudre sont linéaires et à déterminants non nuls : soient $H_1 = H_2 = \ldots = 0$ l'ensemble des équations de tous ces systèmes. Si l'on considère les équations $H_1 = w_1$, $H_2 = w_2, \ldots$, où $w_1, w_2, \ldots$ seront des indéterminées auxiliaires, elles se laisseront résoudre de même.

Portons dans les $\rho_{j,k,l}$ les valeurs ainsi obtenues pour les $v_{\alpha,2}, v_{\alpha,3}, \ldots, v_{\alpha,p-1}$ par rapport auxquelles on aura résolu; et les $\rho_{j,k,l}$ deviendront des fonctions rationnelles des $v_{\alpha,2}, \ldots, v_{\alpha,p-1}$ restés arbitraires et de $w_1, w_2, \ldots$. Chacune de ces fonctions rationnelles, s'annulant pour $w_1 = w_2 = \ldots = 0$, s'écrira sous la forme $M_1 w_1 + M_2 w_2 + \ldots$, les coefficients $M_1, M_2, \ldots$, pouvant dépendre des $v_{\alpha,2}, \ldots, v_{\alpha,p-1}$ restés arbitraires et de $w_1, w_2, \ldots$. On aura une expression identique de cette fonction ρ en remplaçant, dans l'expression $M_1 w_1 + M_2 w_2 + \ldots$, ainsi calculée, w_1 par H_1, w_2 par $H_2, \ldots$. Ainsi chaque fonction $\rho_{j,k,l}$ peut s'écrire sous la forme d'un polynome homogène du premier degré par rapport à un certain nombre des $C_{i,j,k}$, premiers membres des équations (34). Il ne reste plus qu'à porter les expressions ainsi obtenues pour les $\rho_{j,k,l}$ dans les formules (33 *bis*) pour obtenir les identités (33) du texte.

Cette remarque faite, nous considérons le système mixte

$$(35)\qquad F_h(v_{1,1},\ \dots,\ v_{q,1}) = 0, \qquad (h = 1,\ 2,\ \dots,\ q_{p-1}),$$
$$(36)\qquad A_{1,j,k} = 0, \qquad (j = 2,\ 3,\ \dots,\ p;\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ q).$$

Nous tirons des équations (35) les valeurs de $v_1,\ \dots,\ v_{1,q_{p-1}}$, et nous les portons dans les équations (36). Si l'on y considère alors $v_{q_{p-1}+1,1},\ \dots,\ v_{q,1}$ comme des fonctions de $x_1 \dots, x_n$ arbitrairement choisies, ce sont des équations du type de Kowalewski par rapport aux $v_{\alpha,2},\ v_{\alpha,3},\ \dots,\ v_{\alpha,p}$, car elles se trouvent résolues par rapport aux expressions $V_1\, v_{j,k}$, $(j = 2, 3, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q)$, et V_1 est le seul des opérateurs V_i où figure la dérivation $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Donc, le système (35), (36), détermine tous les $v_{i,j}$, dès qu'on se donne (arbitrairement) les expressions de $v_{q_{p-1}+1,1},\ \dots,\ v_{q,1}$, et les fonctions de $x_2, \dots, x_n$ auxquelles se réduisent, pour $x_1 = x_1^0$, les diverses inconnues $v_{\alpha,2},\ v_{\alpha,3},\ \dots,\ v_{\alpha,p}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, q)$.

14. *Suite et conclusion.* — Nous choisirons ces données initiales de manière que le faisceau $\{V_2^{(0)}, \dots, V_p^{(0)}\}$ soit complet. L'indice (o) signifie, ici et dans ce qui va suivre, que x_1 est partout remplacé par x_1^0; ce qui ne souffre aucune difficulté quand la dérivation $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ne figure pas, comme cela a lieu pour $V_2, \dots, V_p$.

Pour cette même raison, l'existence des faisceaux complets $\{V_2^{(0)}, \dots, V_p^{(0)}\}$ résulte de celle des sous-faisceaux complets $\{V_2, \dots, V_p\}$, c'est-à-dire de l'hypothèse même de notre raisonnement par récurrence.

On aura ainsi entièrement déterminé un type général de sous-faisceaux $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$, où figurent le nombre et la nature des arbitraires énumérés dans l'énoncé de notre théorème (n° 13). Il reste à vérifier si le sous-faisceau ainsi obtenu est bien complet; car nous savons seulement, pour le moment, qu'il satisfait aux conditions (35), (36), et

$$(37)\qquad A_{i,j,h}^{(0)} = 0, \qquad C_{i,j,k}^{(0)} = 0,$$
$$(i, j = 2,\ 3,\ \dots,\ p;\ h = 1,\ 2,\ \dots,\ q;\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ s).$$

Partons, à cet effet, de l'identité de Jacobi

$$(V_1(V_i,\ V_j)) = (V_i(V_1,\ V_j)) - (V_j(V_1,\ V_i)).$$

Eu égard aux identités (27) et (36), elle donne

$$(38)\quad \sum_{\alpha=1}^{q} V_1 A_{i,j,\alpha}.X_{p+\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} V_1 C_{i,j,\beta}.Z_\beta + \sum_{\alpha=1}^{q} A_{i,j,\alpha}(V_1, X_{p+\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{s} C_{i,j,\beta}(V_1, Z_\beta)$$
$$= \sum_{\beta=1}^{s} (V_i C_{1,j,\beta} - V_j C_{1,i,\beta}).Z_\beta + \sum_{\beta=1}^{s} C_{1,j,\beta}(V_i, Z_\beta) - \sum_{\beta=1}^{s} C_{1,i,\beta}(V_j, Z_\beta).$$

Les crochets (V_1, Z_β), (V_i, Z_β), (V_j, Z_β) s'expriment en fonction linéaire homogène des $X_{p+\alpha}$, des Z_β, et, peut-être, d'autres transformations T_γ, indépendantes des précédentes (et appartenant au second dérivé de $\mathfrak{F}$). Il nous suffira d'égaler dans les deux membres les coefficients des $X_{p+\alpha}$ et des Z_β.

Remarquant que, dans les identités (33), les termes en F_α disparaissent à cause des identités (35), et nous servant de ces identités pour transformer le second membre de notre identité (38), nous obtiendrons des identités de la forme

$$(39)\quad \begin{cases} V_1 A_{i,j,k} = \text{fonct. lin. homog. des } A_{\alpha,\beta,\gamma} \text{ et des } C_{\alpha,\beta,\delta}, \\ V_1 C_{i,j,k} = \text{fonct. lin. homog. des } A_{\alpha,\beta,\gamma}, \text{ des } C_{\alpha,\beta,\delta}, \\ \qquad\qquad \text{des } V_i C_{\alpha,\beta,\delta} \text{ et des } V_j C_{\alpha,\beta,\delta}, \end{cases}$$

dans lesquelles les indices i, j, h, k peuvent prendre toutes les valeurs qu'ils ont dans les identités (37); les indices α, β sont pris dans la suite $2, 3, \ldots, p$; et les indices γ et δ dans les suites respectives $1, 2, \ldots, q$ et $1, 2, \ldots, s$.

On a donc là un système de Kowalewski relatif aux $A_{i,j,k}$ et $C_{i,j,k}$ — $(i, j > 1)$ —, résolu par rapport aux dérivées du type $\frac{\partial f}{\partial x_1}$; et comme ces fonctions sont nulles pour $x_1 = x_1^0$, on en conclut qu'elles sont identiquement nulles. Car les équations (39) sont vérifiées si l'on y remplace par zéro toutes les inconnues; et la solution déterminée par les conditions initiales (37) est unique.

Il suffit maintenant de revenir aux identités (33) pour conclure que les $C_{1,j,k}$ sont aussi tous nuls. Les équations de condition (29) et (30) étant ainsi toutes vérifiées, le sous-faisceau $\{V_1, \ldots, V_p\}$, déterminé comme il a été dit, est complet; et le théorème d'existence des intégrales complètes est établi, tel qu'il a été énoncé au début du n° 13.

Nous concluons donc qu'*un faisceau d'ordre* p *admet des intégrales complètes à* p *dimensions; la plus générale de ces intégrales complètes dépend de* $q - q_{p-1}$ *fonctions arbitraires de* n *arguments, de* $q - q_{p-2}$ *fonctions arbitraires de* $n - 1$ *arguments, etc..., de* $q - q_1$ *fonctions arbitraires de* $n - p + 2$ *arguments, et enfin de* q *fonctions arbitraires de* $n - p + 1$ *arguments*. Le choix de ces fonctions arbitraires est expliqué dans l'énoncé du n° 13. Rappelons que n est le nombre total des variables, m le degré du faisceau [n° 1], que $q = m - p$; et que les nombres entiers $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}$ sont les $p - 1$ premiers indices du faisceau [n° 10].

Dans le théorème d'existence établi par M. Cartan pour les intégrales des systèmes d'équations de Pfaff, les arbitraires sont, pour la multiplicité intégrale générale à p dimensions, $q - q_{p-1}$ fonctions arbitraires de p arguments, $q_{p-1} - q_{p-2} = s_{p-1}$ fonctions arbitraires de $p - 1$ arguments, etc., $q_1 = s_1$ fonctions arbitraires de l'argument, et $n - m$ constantes arbitraires; les entiers $s_1, \ldots, s_{p-1}$ sont les p premiers caractères du système de Pfaff, et, par conséquent aussi, du faisceau de transformations infinitésimales dont il est corrélatif.

Il n'est pas étonnant que les arbitraires se présentent différemment dans les deux théories : l'une a en vue les intégrales isolées, l'autre les intégrales complètes; et une intégrale isolée appartient à une infinité d'intégrales complètes. On se rend facilement compte de la différence en considérant les multiplicités intégrales à une dimension : car, dans un cas, on a alors un système différentiel ordinaire de $n - m$ équations à $n - m$ fonctions inconnues, système qui dépend du choix de $m - 1$ fonctions arbitraires d'une variable; et, dans l'autre cas, on a une équation linéaire homogène aux dérivées partielles, qui dépend de $m - 1$ fonctions arbitraires de n arguments. On remarquera qu'on est ainsi conduit à poser $q_0 = 0$.

15. *Les intégrales d'un faisceau et ses prolongements*

successifs. — Nous avons démontré, dans ce qui précède, l'existence d'intégrales complètes à p dimensions, que nous pouvons appeler *générales*, pour tout faisceau involutif d'ordre p. Reprenons maintenant la recherche des multiplicités intégrales à p dimensions pour un faisceau quelconque $\mathcal{F}$, supposé donné, sans faire d'hypothèse restrictive, ni sur le faisceau, ni sur les multiplicités intégrales en question.

Nous supposerons que les variables $x_1, \ldots, x_p$, par exemple, restent indépendantes sur la multiplicité intégrale M_p considérée; et nous désignerons par $X_1, \ldots, X_p$ des transformations du faisceau, résolubles par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$. Le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ qui laisse M_p invariante est ainsi de la forme

$$(40) \qquad V_i = X_i + \sum_{\alpha=1}^{q} v_{\alpha i} X_{p+\alpha}, \qquad (p+q=m;\ i=1, 2, \ldots, p).$$

Il est bien connu qu'une multiplicité ne peut admettre deux transformations infinitésimales sans admettre leur crochet; il en résulte que les (V_i, V_j) doivent, *sur la multiplicité* M_p, se réduire à des combinaisons linéaires homogènes de $V_1, \ldots, V_p$; et, *a fortiori*, de $X_1, \ldots, X_m$. Donc les congruences

$$(41) \qquad (V_i, V_j) \equiv 0, \qquad (\text{mod.}\ \mathcal{F}), \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

sont réalisées sur M_p.

Ces congruences fournissent [n^{os} 8 et 13] un système d'équations $(\mathcal{C})$ entre les x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et les v_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, q;$ $i = 1, 2, \ldots, p)$.

Si ce système $(\mathcal{C})$ entraîne des relations entre les x_i seuls, la multiplicité M_p doit satisfaire à ces relations. Elle doit satisfaire aussi aux relations de la même nature qu'on en pourra déduire, éventuellement, par l'application répétée des opérations V_i. Si donc, parmi toutes ces relations, il y en avait liant $x_1, \ldots, x_p$ entre eux, la multiplicité M_p ne saurait exister (¹); ce cas exclu, les relations en question permettront de tirer certaines des variables dépen-

(¹) C'est-à-dire qu'il faudrait reprendre le calcul en prenant p autres variables indépendantes parmi $x_1, \ldots, x_n$.

dantes $x_{p+1}, \ldots, x_n$, en fonction des autres et de $x_1, \ldots, x_p$. On pourra ainsi réduire le nombre des fonctions inconnues $x_{p+1}, \ldots, x_n$, en *raccourcissant* les transformations infinitésimales du faisceau. Si, par exemple, on a, pour $x_{n'+1}, \ldots, x_n$ des expressions

$$(42) \qquad x_{n'+\alpha} = \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_{n'}), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n - n'),$$

il suffit de supprimer dans les transformations $X_h, (h = 1, 2, \ldots, m)$, les termes en $\frac{\partial f}{\partial x_{n'+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$; et de remplacer, dans les autres, $x_{n'+1}, \ldots, x_n$ par leurs expressions (42). On recommencera ensuite les calculs sur le faisceau ainsi raccourci.

En second lieu, il pourra arriver que le système $(\mathcal{E})$, n'entraînant aucune relation entre $x_1, \ldots, x_n$ seuls, soit résoluble par rapport à tous les v_{ji}. Dans ce cas, les transformations (40) sont entièrement déterminées; et l'on est ramené à un problème traité par Sophus Lie : trouver toutes les multiplicités à p dimensions admettant p transformations infinitésimales données ([1]). La solution complète dépend de calculs d'élimination et de l'intégration de systèmes complets.

Reste le cas où les équations $(\mathcal{E})$ laissent $x_1, \ldots, x_n$ indépendants, et permettent de calculer un certain nombre des $v_{j,i}$ (les calculs sont alors des résolutions algébriques linéaires) en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et des autres $v_{j,i}$, qui restent arbitraires. Désignons par $w_1, \ldots, w_r$ ces derniers; ou, plus généralement, des indéterminées, un nombre minimum, au moyen desquelles on puisse exprimer tous les $v_{j,i}$ de façon à satisfaire de la manière la plus générale aux équations $(\mathcal{E})$. On aura ainsi remplacé les équations $(\mathcal{E})$ par un système résolu, de la forme

$$(43) \qquad v_{j,i} = P_{j,i}(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_r), \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, 2, \ldots, q).$$

Observons ici l'analogie avec les considérations du n° 5. Si l'on suppose que $X_1, \ldots, X_m$ soient résolues par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$, les $v_{j,i}$ sont, sur la multiplicité M_p supposée, égaux aux dérivées partielles $\frac{\partial x_{p+j}}{\partial x_i}$, $(j = 1, 2, \ldots, m - p)$; et les autres

([1]) On est, de plus, dans le cas simple où ces transformations restent *divergentes* sur la multiplicité.

dérivées partielles du type $\frac{\partial x_{m+h}}{\partial x_i}$, $(h = 1, 2, \ldots, m - n)$, sont des fonctions linéaires connues de ces $v_{j,i}$, puisqu'elles sont égales aux coefficients des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_{m+h}}$ dans les V_i. Eu égard aux équations (43) on voit ainsi que $w_1, \ldots, w_r$ sont, sur la multiplicité M_p cherchée, des coordonnées de l'élément de contact associé au point $(x_1, \ldots, x_n)$ de cette multiplicité.

Si $X_1, \ldots, X_m$ n'étaient pas sous forme résolue, les dérivées partielles $\frac{\partial x_{p+j}}{\partial x_i}$, $(j = 1, 2, \ldots, n - p)$, seraient des fonctions rationnelles des $v_{j,i}$, et la conclusion serait la même.

On peut donc poursuivre comme au n° 5. Introduisant $w_1, \ldots, w_r$ comme des variables nouvelles (fonctions de $x_1, \ldots, x_p$), nous substituons à la recherche de la multiplicité M_p de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$ celle de la *multiplicité prolongée* M'_p qui se trouve définie dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_r)$ au moyen des formules (43). Et il suffit pour cela de substituer au faisceau $\mathfrak{F}$ donné le *faisceau prolongé* $(\mathfrak{F}')$, défini par les transformations

$$(44) \qquad X'_i = X_i + \sum_{\alpha=1}^{q} P_{\alpha,i}(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_r) X_{p+\alpha}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et

$$(45) \qquad \frac{\partial f}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial w_x}.$$

On opérera alors sur ce faisceau $\mathfrak{F}'$ comme on a fait sur le faisceau $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire en considérant, au lieu de $V_1, \ldots, V_p$, les transformations

$$(46) \qquad V'_i = X'_i + \sum_{\alpha=1}^{r} w_{\alpha,i} \frac{\partial f}{\partial w_r}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les w_{ji} vont jouer le rôle que jouaient précédemment les $v_{j,i}$. Et ainsi de suite.

Si l'on arrive, à un moment quelconque, à un faisceau involutif d'ordre p, le problème s'achève par la recherche de l'intégrale complète, générale, de degré p, de ce faisceau; car on se trouve alors en présence de l'involution générale de degré p de ce faisceau, mise sous forme résolue [n° 11]. On n'a pas, dans ce cas, à passer au prolongement suivant ([1]).

Le seul cas qui reste en suspens est donc celui où la méthode conduirait à une infinité de prolongements successifs; mais on peut démontrer ([2]) que l'on arrive alors nécessairement, par l'un de ces prolongements, à un faisceau involutif d'ordre p.

III. — Transformations distinguées et caractéristiques de Cauchy.

16. *Invariance d'un faisceau par une transformation.* — Soit $\{X_1, \ldots, V_m\}$ un faisceau $\mathcal{F}$ de transformations infinitésimales. Si l'on effectue une même transformation finie

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x''_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

dans ses diverses transformations, on obtient un faisceau $\overline{\mathcal{F}}$, défini par les transformations de base

$$\overline{X}_k f = \sum_{\alpha=1}^{n} X_k x'_\alpha \frac{\partial f}{\partial x'_\alpha}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m); \tag{2}$$

ces transformations se trouvent écrites avec les lettres $x'_1, \ldots, x'_n$. Désignons, d'autre part, par $\mathcal{F}'$ ce que devient le faisceau $\mathcal{F}$, si l'on accentue simplement chacune des lettres $x_1, \ldots, x_n$; et par $X'_1, \ldots, X'_m$ ce que deviennent ainsi chacune de ces transformations de base.

Si alors les faisceaux $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}'$ sont les mêmes, on dira que $\mathcal{F}$ est *invariant* par la transformation (1). La condition analytique pour qu'il en soit ainsi s'exprime par des identités de la forme

$$\overline{X}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_{k,\alpha}(x'_1, \ldots, x'_n)\, X'_\alpha, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Lorsqu'il en est ainsi, la transformation (1) change toute multiplicité intégrale du faisceau $\mathcal{F}$ en une multiplicité intégrale de ce même faisceau. La réciproque est vraie; il suffit même que la trans-

---

([1]) On démontre que, dans ce cas, le prolongement conduirait encore à un faisceau involutif d'ordre p.

([2]) Je reviendrai sur cette démonstration (et sur celle du théorème énoncé dans la précédente note) dans un autre travail.

formation (1) change toute intégrale à une dimension de $\mathcal{F}$ en une intégrale de $\mathcal{F}$.

Dans les mêmes conditions, nous dirons que le faisceau $\mathcal{F}$ *admet* la transformation (1).

17. *Invariance d'un faisceau par une transformation infinitésimale.* — Si l'on suppose le faisceau invariant par chaque transformation

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n \mid t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

d'un groupe à un paramètre, les identités (3) prennent la forme

$$\overline{X}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_{k,\alpha}(x'_1, \ldots, x'_n \mid t)\, X'_\alpha, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

et l'on peut différentier les deux membres par rapport à t, en y considérant $x'_1, \ldots, x'_n$ et t comme des variables indépendantes. La dérivée du premier membre est alors identique au crochet (X_k, X), Xf étant la transformation infinitésimale génératrice du groupe (4), et les variables $x_1, \ldots, x_n$ étant, dans ce crochet, exprimées au moyen de $x'_1, \ldots, x'_n, t$ [1]. Si, dans les deux membres des identités ainsi obtenues, on fait $t = 0$ [cette valeur de t étant supposée celle pour laquelle (4) se réduit à la transformation identique], on obtient des identités de la forme

$$(X_k, X) = \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_{k,\alpha}(x_1, \ldots, x_n) X_\alpha, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Si, réciproquement, de telles identités ont lieu, il suffit d'y remplacer $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $x'_1, \ldots, x'_n, t$, au moyen des formules (4), pour avoir des identités de la forme

$$\frac{d\overline{X}_k}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{m} \nu_{k,\alpha}(x'_1 \ldots x'_n \mathrm{H})\, \overline{X}_\alpha, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

On en conclut que les $\overline{X}_k$ sont des fonctions linéaires homogènes, à coefficients fonctions de $x'_1, \ldots, x'_n$ et t, de leurs valeurs initiales X'_j ; c'est-à-dire l'existence d'identités de la forme (5).

---

[1] On peut éviter de se servir de ce théorème de S. Lie, en ramenant le groupe (4) à la forme canonique

$$x'_i = x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad x'_n = x_n + t.$$

Donc, *pour qu'un faisceau $\mathfrak{F}$ soit invariant par les transformations d'un groupe à un paramètre, il faut et il suffit que les crochets des transformations de base du faisceau avec la transformation infinitésimale du groupe fassent partie du faisceau;* c'est-à-dire qu'on ait les identités congruences

$$(8) \qquad (X_k, X) \equiv 0, \qquad (\text{mod } \mathfrak{F}), \quad (k=1, 2\ldots, m).$$

Nous exprimerons ce fait en disant que le faisceau $\mathfrak{F}$ reste *invariant par la transformation infinitésimale* Xf.

18. *Transformations distinguées d'un faisceau.* — En généralisant l'emploi d'un terme de la théorie de S. Lie, nous dirons qu'une transformation d'un faisceau en est une *transformation distinguée*, si elle laisse le faisceau invariant. D'après la forme des conditions (8), cela revient à dire qu'elle est en involution avec chacune des transformations du faisceau. De là résultent immédiatement les conséquences suivantes :

1° Si un faisceau est complet, chacune de ses transformations en est une transformation distinguée;

2° Réciproquement, si un faisceau de degré m contient m transformations distinguées divergentes, il est complet.

Plus généralement, supposons que le faisceau $\mathfrak{F}$, de degré m, contienne r transformations distinguées divergentes, et pas davantage, en supposant $r < m$. Les transformations distinguées de $\mathfrak{F}$ formeront ainsi un sous-faisceau Φ de degré r : je dis que ce sous-faisceau Φ est complet.

Soient, en effet, X et Y deux transformations de Φ. Chacune d'elles laisse $\mathfrak{F}$ invariant; donc leur crochet (X, Y) laisse aussi $\mathfrak{F}$ invariant [1]. Mais X appartenant à $\mathfrak{F}$, et Y étant transformation

---

[1] C'est un fait général dans la théorie des transformations infinitésimales que tout être analytique invariant par deux de ces transformations est invariant par leur crochet. La vérification serait ici facile : des identités

$$(X_k X) = \sum_\alpha u_{k\alpha} X_\alpha, \qquad (X_k, Y) = \sum_\alpha v_{k\alpha} X_\alpha,$$

on conclut, en effet, par l'identité de Jacobi,

$$(X_k, (X, Y)) = ((X, X_k, Y)) - ((Y X_k, X)) \equiv \sum_\alpha \{ v_{k\alpha} (X, X_\alpha) - u_{k\alpha} (Y, X_\alpha) \} \equiv 0.$$

distinguée de $\mathfrak{F}$, (X, Y) appartient aussi à $\mathfrak{F}$. Ainsi (X, Y) est une transformation de $\mathfrak{F}$ qui laisse $\mathfrak{F}$ invariant : c'est donc une transformation distinguée de $\mathfrak{F}$, et elle fait partie de Φ. Et puisque le crochet de deux transformations quelconques de Φ appartient à Φ, ce sous-faisceau Φ est bien complet.

Ainsi, *les transformations distinguées d'un faisceau forment un sous-faisceau complet de ce faisceau.*

Remarquons encore que si une involution $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{F}$ ne contient pas toutes les transformations distinguées de $\mathfrak{F}$, celles de ces transformations distinguées qui ne font pas partie de $\mathfrak{J}$ sont encore en involution avec chacune des transformations de $\mathfrak{J}$. Il en résulte que le genre g de $\mathfrak{F}$ est supérieur d'une unité au moins au nombre r des transformations distinguées (divergentes) de $\mathfrak{F}$; et que l'involution générale de $\mathfrak{F}$, de degré égal à son genre g, contient le faisceau Φ des transformations distinguées de $\mathfrak{F}$.

19. *Variables caractéristiques.* — Pour aller plus loin, le plus simple est d'introduire comme variables nouvelles des intégrales premières $y_1, \ldots, y_\nu$ du sous-faisceau complet Φ des transformations distinguées de $\mathfrak{F}$ ($\nu = n - r$). Ce faisceau Φ est ainsi ramené à la forme

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_r};$$

et le faisceau $\mathfrak{F}$ se déduira de Φ en lui adjoignant $\mu = m - r$ transformations de la forme

$$(10) \qquad Y_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \eta_{i,\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_{\mu+\alpha}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu;\ \sigma = \nu - \mu).$$

Si l'on écrit alors que les transformations de Φ sont distinguées, c'est-à-dire que l'on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_h}, Y_i\right) \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{F}), \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu;\ h = 1, 2, \ldots, r),$$

on trouve que les $\eta_{i,j}$ ne dépendent d'aucune des variables $x_1, \ldots, x_r$.

Le système de Pfaff, dualistique du faisceau $\mathfrak{F}$, est alors

$$(11) \qquad dy_{\mu+j} = \sum_{\beta=1}^{\mu} \eta_{\beta,j}(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)\, dy_\beta, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma);$$

et les variables $x_1, \ldots, x_r$ n'y figurent pas. Ceci montre que les variables introduites sont celles que M. Cartan appelle *variables caractéristiques;* car il est immédiat qu'inversement l'existence de la forme (11) pour le système de Pfaff entraîne cette conséquence que les transformations (9) sont des transformations distinguées du faisceau dualistique de ce système (les variables étant $x_1, \ldots, x_r$, $y_1, \ldots, y_\nu$).

Les multiplicités intégrales du faisceau $\mathcal{F}$ et de chacun de ses sous-faisceaux complets sont, au sens attribué à ce mot par M. Cartan, des *multiplicités caractéristiques de Cauchy.*

Bornons-nous, pour simplifier, au cas où l'on cherche les intégrales générales du faisceau $\mathcal{F}$, ayant un nombre de dimensions égal au genre g de ce faisceau.

D'après la théorie du paragraphe précédent de ce mémoire, nous aurons à considérer une involution générale de la forme [n° 18]

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}, V_1, \ldots, V_\varpi\right\}, \qquad (\varpi + r = g), \tag{12}$$

$$V_j = Y_j + \sum_{\gamma=1}^{\mu-\varpi} v_{\gamma,j} V_{\varpi+\gamma}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \varpi). \tag{13}$$

Il est clair que $\{V_1, \ldots, V_\varpi\}$ est l'involution générale, de degré maximum, du *faisceau réduit* $\{Y_1, \ldots, Y_\mu\}$; les $v_{\gamma,j}$ sont liés par des relations dans lesquelles $x_1, \ldots, x_r$ ne figurent pas. En écrivant que le faisceau (12) est complet, on trouve aussitôt que les $v_{\gamma,j}$ seront entièrement indépendants de $x_1, \ldots, x_r$ et que $\{V_1, \ldots, V_\varpi\}$ devra être, par lui-même, un faisceau complet.

On retrouve donc ce résultat, que les intégrales cherchées sont engendrées par des multiplicités caractéristiques $y_1 = c_1, \ldots, y_\nu = c_\nu$. L'intégration du faisceau $\mathcal{F}$ est ramenée à celle du faisceau $\{Y_1, \ldots, Y_\mu\}$ en $y_1, \ldots, y_\nu$; et cette intégration indique comment il faut associer des caractéristiques pour qu'elles engendrent effectivement les intégrales cherchées, résultat qui est entièrement d'accord avec la théorie de M. Cartan.

20. Exemple I. — *Soit à intégrer l'équation* $q = \Phi(x, y, z, p)$. — Le faisceau correspondant est [n° 57]

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial y} + \Phi\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Les formules de structure sont

$$(X_1, X_2) = X_1\Phi \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad (Y_2, X_3) = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad (X_3, X_1) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Le faisceau n'est donc pas complet, et le faisceau dérivé est

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p} \right\}$$

de sorte qu'il n'est pas possible de réduire, *dans le faisceau*, le nombre des variables

Cherchons les involutions de degré 2, sous la forme résolue [n° **11**]

$$V_1 = X_1 + v_1 X_3, \qquad V_2 = X_2 + v_2 X_3.$$

Les conditions entre v_1 et v_2 se réduisent à une :

$$X_1\Phi + v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p} - v_2 = 0\,;$$

et l'involution générale de degré 2 peut s'écrire, en combinant V_1 et V_2 de manière à éliminer v_1 et v_2, et mettant v à la place de v_1,

$$V = X_1 + v X_3, \qquad W = \frac{\partial \Phi}{\partial p} X_1 - X_2 - X_1\Phi . X_3.$$

Il résulte de là que W est, sous forme développée,

$$Wf = \frac{\partial \Phi}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \Phi\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

et l'on reconnaît dans $Wf = 0$ l'équation linéaire équivalente au système des caractéristiques de la théorie classique.

Notre méthode donne, du reste, d'une manière très rapide, tous les autres résultats de cette théorie. Le faisceau peut s'écrire $\{X_1, X_3, W\}$; et il suffira d'intégrer le faisceau $\{X_1, X_3\}$ après y avoir introduit les variables caractéristiques (intégrales premières de $Wf = 0$). Mais, sous sa forme première, le faisceau $\{X_1, X_3\}$ s'intègre immédiatement; l'intégrale générale [1] (à une dimension) étant, avec la fonction arbitraire $f(x)$,

$$z = f(x), \qquad p = f'(x).$$

Donc, tout se réduit, en fait, à l'intégration de $Wf = 0$.

---

[1] Nous laissons ici de côté le point de vue des intégrales complètes; mais il suffirait d'introduire dans f deux constantes arbitraires, pour achever la question à ce point de vue.

Soient

$$\bar{\xi}(x, y, z, p), \quad \bar{\zeta}(x, y, z, p), \quad \bar{\varpi}(x, y, z, p)$$

trois intégrales premières indépendantes; le changement de variables sera

$$\xi = \bar{\xi}(x, y, z, p), \quad \zeta = \bar{\zeta}(x, y, z, p), \quad \varpi = \bar{\varpi}(x, y, z, p);$$

et l'on en tirera des formules de la forme

$$x = a(\xi, \zeta, \varpi, y) \qquad z = b(\xi, \zeta, \varpi, y), \qquad p = c(\xi, \zeta, \varpi, y).$$

Les formules

$$b = f(a), \qquad c = f'(a),$$

où f est arbitraire, et où l'on mettra à la place de ξ, ζ, ϖ leurs expressions $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\varpi}$, donnent l'intégrale générale de la proposée.

Si l'on a pris pour $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\varpi}$ les intégrales de $Wf = 0$ qui se réduisent respectivement à x, y, z, pour $y = y_0$, l'intégrale se réduira, pour $y = y_0$, à $z = f(x)$, $p = f'(x)$; c'est-à-dire qu'elle se trouve sous la forme qui donne la solution du problème de Cauchy [intégrale passant par la courbe $z = f(x)$, $y = y_0$]. On peut remarquer, d'ailleurs, qu'avec ce choix de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, le faisceau $\{X_1, X_3\}$, étant, après le changement de variables, indépendant de y, se ramènera à la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \varpi \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varpi};$$

puisque, pour $y = y_0$, on a $\bar{\xi} = x$, $\bar{\zeta} = z$, $\bar{\varpi} = p$. On pourra donc écrire aussi l'intégrale générale de la proposée sous la forme

$$\bar{\zeta} = f(\bar{\xi}), \qquad \bar{\varpi} = f'(\bar{\xi}).$$

21. Exemple II. — *Soit à intégrer le système*

$$r = \Phi(x, y, z, p, q, s), \qquad t = \Psi(x, y, z, p, q, s).$$

Le faisceau qui lui correspond est

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \Phi\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + \Psi\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X_3 = \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Les relations de structure sont

$$(X_1, X_2) = -X_2\Phi\frac{\partial f}{\partial p} + X_1\Psi\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$(X_2, X_3) = -\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$(X_1, X_3) = \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Le faisceau n'est pas complet et l'on ne peut pas réduire le nombre des variables, puisque le faisceau dérivé du second ordre serait

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\}.$$

Cherchons les involutions d'ordre 2,

$$V_1 = X_1 + v_1 X_3, \qquad V_2 = X_2 + v_2 X_3.$$

La condition $(V_1, V_2) \equiv 0$ donne les équations en v_1, v_2

$$(14) \qquad v_1 - v_2\frac{\partial \Phi}{\partial s} - X_2\Phi = 0, \qquad v_1\frac{\partial \Psi}{\partial s} - v_2 + X_1\Psi = 0.$$

Si le déterminant $\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial \Psi}{\partial s} - 1$, n'est pas identiquement nul, on tire de ces équations v_1 et v_2; et il y a une seule involution $\{V_1, V_2\}$; si c'est un faisceau complet, le système proposé admet une seule intégrale complète, qui se calcule par l'intégration du système complet $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Dans le cas contraire, il ne peut plus y avoir que des intégrales singulières ([1]).

Si le déterminant $\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial \Psi}{\partial s} - 1$ est identiquement nul, le système (14) est en général impossible, et il ne peut y avoir alors que des intégrales singulières ([1]).

Le seul cas vraiment intéressant est celui où le système (14) est indéterminé

$$(15) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 1, \qquad X_1\Psi\frac{\partial \Phi}{\partial s} + X_2\Phi = 0.$$

On a alors

$$(16) \qquad V_3 = X_2 + \left(v_1\frac{\partial \Psi}{\partial s} + X_1\Psi\right)X_3 \qquad (v_1 \text{ arbitraire});$$

([1]) Nous omettons, pour abréger, le détail de la discussion, qui n'offre pas de difficulté.

et l'involution $\{V_1, V_2\}$ pourra s'écrire, v étant arbitraire,

$$(17) \qquad V = X_1 + v X_3, \qquad W = \frac{\partial \Psi}{\partial s} X_1 - X_2 - X_1 \Psi . X_3.$$

La transformation W est donc une transformation distinguée, et les intégrales du système donné sont engendrées par les intégrales de $Wf = 0$ (caractéristiques).

Soient, par exemple,

$$\bar{\xi}(x, y, z, p, q, s), \quad \bar{\zeta}(x, y, z, p, q, s),$$
$$\bar{\varpi}(x, y, z, p, q, s), \quad \bar{\chi}(x, y, z, p, q, s), \quad \bar{\sigma}(x, y, z, p, q, s)$$

les intégrales premières *principales* de $Wf = 0$, qui se réduisent, respectivement pour $y = y_0$, à x, z, p, q, s. Le changement de variables

$$(18) \qquad \xi = \bar{\xi}, \qquad \zeta = \bar{\zeta}, \qquad \varpi = \bar{\varpi}, \qquad \chi = \bar{\chi}, \qquad \sigma = \bar{\sigma}, \qquad y = y,$$

ramènera le faisceau à la forme (¹)

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \varpi \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Phi(\xi, y_0, \zeta, p, q, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \varpi} + \sigma \frac{\partial f}{\partial \chi}, \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial y};$$

et tout revient à intégrer le sous-faisceau formé par les deux premières de ces transformations [nº 19], c'est-à-dire aux notations près, le sous-faisceau $\{X_1, X_3\}$ du faisceau proposé. Il équivaut à l'équation différentielle en z, q et x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi\left(x, y_0, z, \frac{\partial z}{\partial x}, q, \frac{\partial q}{\partial x}\right).$$

Si l'on pose $z = f(x)$, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = f'(x), \qquad \text{et} \qquad \Phi(x, y, z, p, q, s) = f''(x), \qquad s = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

On est donc ramené à intégrer l'équation du premier ordre, à une variable indépendante x et une fonction inconnue q,

$$(19) \qquad \Phi\left[x, y_0, f(x), f'(x), q, \frac{\partial q}{\partial x}\right] = f''(x),$$

(¹) Pour la même raison que dans l'exemple précédent.

la fonction $f(x)$ restant arbitraire; et à remplacer, dans le résultat

$$z = f(x), \quad p = f'(x), \quad q = g(x), \quad s = g'(x),$$

les lettres x, z, p, q, s par les fonctions respectives $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\varpi}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\sigma}$.

IV. — TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES ET CARACTÉRISTIQUES DE MONGE.

22. *Transformations et involutions singulières.* — D'après ce qui a été dit au n° 9, une *transformation singulière* d'un faisceau $\mathcal{F}$ est une transformation de ce faisceau qui est en involution avec plus de $m - q_1$ transformations divergentes de ce faisceau (q_1 étant le premier indice du faisceau et m son degré). Une *involution singulière* de degré k est une involution du faisceau, telle que toutes ses transformations soient en involution avec plus de $m - q_k$ transformations divergentes du faisceau (q_k étant le $k^{\text{ième}}$ indice du faisceau).

La recherche des transformations et des involutions singulières permet de simplifier, le cas échéant, les relations de structure du faisceau, et par suite de reconnaître les propriétés particulières de ce faisceau, au point de vue de son intégration. En particulier, on obtient, dans certains cas, des modes de génération des multiplicités intégrales par des caractéristiques, qui se distinguent de celles que fournissent les transformations distinguées (lesquelles sont, du reste, des transformations singulières, en quelque sorte aussi singulières que possible), caractéristiques que nous nommerons, d'après M. Cartan, *caractéristiques de Monge.*

Sans faire ici une théorie générale, nous préciserons ces indications, dans un cas particulier, en les appliquant au problème classique de l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes et une fonction inconnue.

23. *Transformations singulières dans le cas de l'équation du second ordre.* — Considérons donc l'équation

$$r = \Phi(x, y, z, p, q, s, t).$$

Le faisceau à intégrer est

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \Phi\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q},$$
$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q},$$
$$X_3 = \frac{\partial f}{\partial s}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Les relations de structure sont

$$(X_1, X_2) = -X_2\Phi\frac{\partial f}{\partial p}, \quad (X_1, X_3) = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}, \quad (X_1, X_4) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p},$$
$$(X_2, X_3) = -\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad (X_2, X_4) = -\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad (X_3, X_4) = 0.$$

On a $n = 7$, $m = 4$. En cherchant les relations qui expriment que

$$U = u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4, \qquad V = v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4$$

sont en involution, on trouve le système des deux équations bilinéaires

$$(1) \qquad (u_1 v_2 - u_2 v_1) X_2\Phi + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\frac{\partial \Phi}{\partial s} + (u_1 v_4 - u_4 v_1)\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (u_2 v_3 - u_3 v_2) = 0,$$

$$(2) \qquad (u_1 v_3 - u_3 v_1) + (u_2 v_4 - u_4 v_2) = 0,$$

qui sont, en général, indépendantes en v_1, v_2, v_3, v_4. Donc $q_1 = 2$, et il n'y a pas d'involution générale de degré supérieur à 2.

Mais les équations (1), (2) se réduisent à une seule, si u_1, u_2, u_3, u_4 satisfont aux conditions

$$(3) \qquad \frac{u_2 X_2\Phi + u_3\frac{\partial \Phi}{\partial s} + u_4\frac{\partial \Phi}{\partial t}}{u_3} = \frac{u_1 X_2\Phi - u_3}{-u_4} = \frac{u_1\frac{\partial \Phi}{\partial s} + u_2}{-u_1} = \frac{u_1\frac{\partial \Phi}{\partial t}}{u_2}.$$

On conclut de l'égalité des deux derniers rapports

$$(4) \qquad u_2^2 + u_1 u_2\frac{\partial \Phi}{\partial s} - u_1^2\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

ce qui conduit à poser

$$(5) \qquad u_2 = m u_1,$$

avec

$$m^2 + m\frac{\partial\Phi}{\partial s} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Introduisant les deux racines de cette équation, *supposées différentes* (soient m_1 et m_2), nous aurons

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = -(m_1 + m_2), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -m_1 m_2; \tag{7}$$

et, en prenant par exemple $m = m_1$, la valeur commune des rapports (3) sera $-m_2$, et il restera

$$m_1 u_1 X_2\Phi - m_1 u_3 - m_1 m_2 . u_4 = 0, \qquad u_1 . X_2\Phi - u_3 - m_2 u_4 = 0;$$

ce qui se réduit à

$$u_3 + m_2 u_4 = u_1 . X_2\Phi. \tag{8}$$

Il reste ainsi deux arbitraires, u_1 et u_4 par exemple, et l'on a un premier faisceau de transformations singulières

$$P_1 = X_1 + m_1 X_2 + X_2\Phi . X_3, \qquad Q_1 = X_4 - m_2 X_3. \tag{9}$$

Chacune des transformations de ce sous-faisceau est en involution avec ∞^3 transformations V, définies par la condition unique (2).

On a, de même, un autre sous-faisceau de transformations singulières

$$P_2 = X_1 + m_2 X_2 + X_2\Phi . X_3, \qquad Q_2 = X_4 - m_1 X_3. \tag{10}$$

Et, en prenant $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ pour base du faisceau donné, on a les relations de structure, d'une simplicité remarquable.

$$\left\{\begin{array}{ll} (P_1, P_2) \equiv 0, & (P_1, Q_2) \equiv 0, \\ (P_2, Q_1) \equiv 0, & (Q_1, Q_2) \equiv 0, \\ (P_1, Q_1) \equiv -(m_1 - m_2)\left(\dfrac{\partial f}{\partial q} - m_2\dfrac{\partial f}{\partial p}\right), & \\ (P_2, Q_2) \equiv (m_1 - m_2)\left(\dfrac{\partial f}{\partial q} - m_1\dfrac{\partial f}{\partial p}\right). & \end{array}\right. \tag{11}$$

Elles montrent que chaque transformation du faisceau $\{P_1, Q_1\}$ est en involution avec chaque transformation du faisceau $\{P_2, Q_2\}$. On pourra dire que ces deux sous-faisceaux sont en relation d'*involution réciproque*.

24. *Caractéristiques de l'équation du second ordre.* — Nous pouvons chercher maintenant les involutions du second degré sous la forme

$$V_1 = P_1 + v_{1,1} Q_1 + v_{1,1} Q_2, \qquad V_2 = P_2 + v_{1,2} Q_1 + v_{2,2} Q_2.$$

La condition $(V_1, V_2) \equiv 0$ se réduit à $v_{1,2} = v_{2,1} = 0$; et la forme générale des involutions du second degré est, avec deux arbitraires v_1, v_2,

$$(12) \qquad V_1 = P_1 + v_1 Q_1, \qquad V_2 = P_2 + v_2 Q_2.$$

Il résulte immédiatement de là que les sous-faisceaux complets de degré 2 sont de la même forme, et que, par suite, toute multiplicité intégrale non singulière est engendrée par des intégrales à une dimension de l'un et l'autre des faisceaux $\{P_1, Q_1\}$ et $\{P_2, Q_2\}$.

Ces intégrales à une dimension sont les caractéristiques, des deux systèmes, de la théorie classique. La discussion des systèmes linéaires aux dérivées partielles

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0; \qquad P_2 = 0, \qquad Q_2 = 0$$

fournirait les résultats connus, relatifs aux nombres des *invariants* distincts de l'un ou l'autre des systèmes de caractéristiques. Le nom d'invariant est parfaitement adapté à notre point de vue, puisqu'il s'agit effectivement, au sens de la théorie des groupes de transformations, d'invariants communs à toutes les transformations infinitésimales de l'un ou l'autre des deux *sous-faisceaux caractéristiques* $\{P_1, Q_1\}$ et $\{P_2, Q_2\}$.

Le système $P_2 = 0$, $Q_2 = 0$ est, du reste aux notations près, celui à la discussion duquel M. Goursat a été conduit dans ses recherches sur les invariants des systèmes de caractéristiques [1].

Relativement aux surfaces intégrales, v_1 et v_2 sont les dérivées de t, prises dans les directions caractéristiques,

$$(13) \qquad v_1 = m_1 \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x}, \qquad v_2 = m_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x}.$$

25. *Caractéristiques du troisième ordre.* — Pour obtenir les

---

[1] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 155.

caractéristiques d'ordre supérieur, on pourrait *prolonger l'équation* donnée, en lui adjoignant les équations obtenues en la différentiant successivement jusqu'à un ordre quelconque, et opérer sur le faisceau de transformations infinitésimales associé au système différentiel ainsi obtenu. Mais on obtient des résultats plus complets en prolongeant directement le faisceau $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, d'après la méthode du n° 15.

Le premier faisceau prolongé [1] est, avec les notations (12),

$$\left\{V_1, V_2, \frac{\partial f}{\partial v_1}, \frac{\partial f}{\partial v_2}\right\}; \tag{14}$$

les seuls crochets qui ne soient pas nuls identiquement sont

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}, V_1\right) = Q_1, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial v_2}, V_2\right) = Q_2,$$

et

$$(V_1, V_2) = \lambda V + \alpha_1 Q_1 - \alpha_2 Q_2, \qquad (V = V_2 - V_1), \tag{15}$$

avec les expressions suivantes pour λ, α_1, α_2 :

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda = \frac{V_1 m_2 - V_2 m_1}{m_2 - m_1}, \qquad \alpha_1 = v_1\lambda + \mu, \qquad \alpha_2 = v_2\lambda + \mu, \\ &\mu = \frac{V(X_2\Phi) + v_2 . V_1 m_1 - v_1 . V_2 m_2}{m_2 - m_1}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

On observe que λ est linéaire et μ bilinéaire en v_1 et v_2.

On trouve immédiatement l'involution générale du second degré du faisceau (14), sous la forme

$$V_1 + w_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial v_2}, \qquad V_2 + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial v_2},$$

w_1 et w_2 restant arbitraires. Nous posons

$$\Omega_1 = V_1 + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial v_2}, \qquad \Omega_2 = V_2 + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial v_1}; \tag{17}$$

et nous avons ainsi les deux sous-faisceaux, en involution réciproque,

$$\left\{\Omega_1, \frac{\partial f}{\partial v_1}\right\}, \qquad \left\{\Omega_2, \frac{\partial f}{\partial v_2}\right\}. \tag{18}$$

---

[1] Les intégrales à deux dimensions de ce faisceau sont, d'après la théorie du n° 15, les multiplicités prolongées issues des intégrales à deux dimensions du faisceau initial $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$; c'est-à-dire des intégrales de l'équation du second ordre donnée.

Tout sous-faisceau complet du faisceau prolongé ayant la forme

$$W_1 = \Omega_1 + w_1 \frac{\partial f}{\partial v_1}, \qquad W_2 = \Omega_2 + w_2 \frac{\partial f}{\partial v_2}, \tag{19}$$

on voit que les multiplicités intégrales prolongées sont engendrées par des intégrales à une dimension de l'un et l'autre des sous-faisceaux (18). Ces intégrales à une dimension sont les caractéristiques du troisième ordre et les formules (17) montrent immédiatement qu'elles résultent d'un prolongement des caractéristiques du second ordre.

On obtient, de plus, des indications intéressantes au sujet de la recherche des invariants de ces caractéristiques du troisième ordre [1]. Pour le premier système, par exemple, il s'agit de trouver des solutions communes aux équations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_1} = 0. \tag{20}$$

On remarquera d'abord que, pour un invariant qui ne contiendrait ni v_1 ni v_2, ce système se réduit à $V_1 = 0$, qui se décompose en $P_1 = Q_1 = 0$. Donc les invariants du second ordre sont compris, comme cas particulier, dans les invariants du troisième : cela résultait, du reste, *a priori*, du fait que les faisceaux (18) sont, respectivement, des prolongements des faisceaux $\{P_1, Q_1\}$, $\{P_2, Q_2\}$.

On voit ensuite que les invariants du troisième ordre (du système considéré) sont fonctions seulement de x, y, z, p, q, s, t, v_2, et comme, de plus, α_2 est linéaire en v_1, d'après les formules (16) et les remarques faites sur λ et μ, on peut poser

$$\alpha_2 = \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} \cdot v_1,$$

et remplacer le système (20) par un nouveau système de deux équations

$$P_1 + \alpha_{2,0} \frac{\partial f}{\partial v_2} = 0, \qquad Q_1 + \alpha_{2,1} \frac{\partial f}{\partial v_2} = 0. \tag{21}$$

Il est ici manifeste qu'il ne peut y avoir, au plus, qu'un invariant du troisième ordre, en plus des invariants éventuels du second (en ne comptant que les invariants indépendants).

---

[1] Comparez GOURSAT, *loc. cit.*, p. 151.

26. *Caractéristiques d'ordre supérieur.* — Passons encore au quatrième ordre. Nous avons à considérer le faisceau prolongé

$$(22)\qquad \left\{ W_1,\ W_2,\ \frac{\partial f}{\partial w_1},\ \frac{\partial f}{\partial w_2} \right\},$$

avec les notations (19). Les variables w_1 et w_2 sont les dérivées respectives de v_1 et de v_2 dans la première et seconde direction caractéristique,

$$(23)\qquad w_1 = m_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \qquad w_2 = m_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Les crochets des transformations (22) sont nuls, sauf

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w_1}, W_1\right) = \frac{\partial f}{\partial v_1}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial w_2}, W_2\right) = \frac{\partial f}{\partial v_2},$$

et

$$(24)\qquad (W_1, W_2) = \lambda W + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} - \beta_2 \frac{\partial f}{\partial v_2}, \qquad (W = W_2 - W_1).$$

La valeur de λ est donnée par les formules (16), et l'on a

$$(25)\qquad \beta_1 = \lambda(w_1 - \alpha_1) + W_1\alpha_1, \qquad \beta_2 = \lambda(w_2 - \alpha_2) + W_2\alpha_2.$$

On voit que β_2 ne dépend pas de w_1, qu'il est linéaire en w_2, et l'on constate facilement qu'il est, de plus, linéaire en v_1. On a des résultats analogues pour β_1.

L'involution générale, de degré 2, du faisceau (22) s'obtient immédiatement sous la forme

$$\left\{ W_1 + t_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad W_2 + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + t_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} \right\},$$

où t_1 et t_2 restent arbitraires.

On a ainsi la génération par des caractéristiques du quatrième ordre, qui sont les intégrales à une dimension des faisceaux

$$(26)\qquad \left\{ W_1 + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial w_2},\ \frac{\partial f}{\partial w_1} \right\}, \qquad \left\{ W_2 + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial w_1},\ \frac{\partial f}{\partial w_2} \right\}.$$

Quant aux invariants du premier système, par exemple, ils sont donnés par

$$W_1 + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w_1} = 0.$$

On en conclut aussitôt $\dfrac{\partial f}{\partial v_1} = 0$, et, en posant

$$\beta_2 = \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \cdot v_1$$

(de manière à mettre en évidence le fait que β_2 est linéaire en v_1), on est ramené à chercher les solutions du système

$$(27)\quad P_1 + \alpha_{2,0}\frac{\partial f}{\partial v_2} + \beta_{2,0}\frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, \qquad Q_1 + \alpha_{2,1}\frac{\partial f}{\partial v_2} + \beta_{2,1}\frac{\partial f}{\partial w_2} = 0.$$

Ces solutions ne doivent dépendre ni de v_1 ni de w_1, qui ne figurent pas, du reste, dans ces équations (27).

Les remarques faites au sujet des invariants du troisième ordre s'étendent, dès lors, bien facilement au quatrième ordre et la nature des calculs qui précèdent montre qu'il n'y aurait aucune difficulté à généraliser les résultats ainsi obtenus (par voie de récurrence) pour les caractéristiques et les invariants d'un ordre quelconque.

27. *Application de la théorie des caractéristiques à l'intégration de l'équation.* — Bornons-nous d'abord à introduire les dérivées du premier et du second ordre : les variables sont x, y, z, p, q, s, t et les intégrales complètes sont définies par des systèmes complets de la forme [n° **24**]

$$(28)\qquad V_1 = P_1 + v_1 Q_1 = 0, \qquad V_2 = P_2 + v_2 Q_2 = 0.$$

La formule (15) doit être ici modifiée, parce que v_1 et v_2 ne sont plus de nouvelles variables, mais sont des fonctions de x, y, z, p, q, s, t, qu'il s'agit de déterminer de manière que le système (28) soit effectivement complet. On a donc, avec les notations du n° **25**,

$$(29)\qquad (V_1, V_2) = \lambda(V_2 - V_1) + (\alpha_2 - V_2 v_1)Q_1 + (V_1 v_2 - \alpha_2)Q_2;$$

de sorte que v_1 et v_2 sont déterminées par le système

$$(30)\qquad V_1 v_1 = \alpha_1, \qquad V_1 v_2 = \alpha_2.$$

Les particularités de l'intégration vont dépendre de la nature des *sous-faisceaux caractéristiques* $\{P_1, Q_1\}$ et $\{P_2, Q_2\}$. Considérons, par exemple, le premier et ses dérivés successifs [n° **2**]. On constate facilement que le premier dérivé est de degré 3, et que le second dérivé est au moins de degré 4. Donc le sous-faisceau $\{P_1, Q_1\}$ a au plus trois invariants.

1° Supposons qu'il en ait un, et soit ϑ cet invariant. Il va permettre de trouver des intégrales complètes. Déterminons en effet v_2 de manière que ϑ soit solution du système (28). Cela donne l'équation du premier degré en v_2,

(31) $$P_2 \mathfrak{Z} + v_2 Q_2 \mathfrak{Z} = 0.$$

Il faut ici supposer $Q_2 \mathfrak{Z} \neq 0$, mais si l'on avait $Q_2 \mathfrak{Z} = 0$, comme on a déjà $Q_1 \mathfrak{Z} = 0$, on en conclurait [*voir* les expressions (9) et (10) de Q_1 et Q_2] que $\mathfrak{Z}$ ne serait pas effectivement du second ordre. Nous écarterons ce cas pour le moment.

$\mathfrak{Z}$, étant une solution du système (28), satisfera à l'équation $(V_1, V_2) = 0$. D'après la formule (29) et en tenant compte de $Q_1 \mathfrak{Z} = 0$ et de $Q_2 \mathfrak{Z} = 0$, il vient, quel que soit v_1,

(32) $$V_1 v_2 - \alpha_2 = 0.$$

Il suffira donc de déterminer v_1 par l'équation

(33) $$V_2 v_1 = \alpha_1$$

pour que le système (28) soit complet. Or, puisque v_2 est connu, cette équation (33) s'intègre par des équations différentielles ordinaires.

On conclut donc que toutes les intégrales de la proposée qui satisfont à la condition $\mathfrak{Z} =$ const. s'obtiennent par l'intégration d'équations différentielles ordinaires — [équation (33), puis système complet (28)] — .

2° Supposons que l'invariant $\mathfrak{Z}$ soit du premier ordre. On a $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = 0$, et la condition $P_1 \mathfrak{Z} = 0$ se réduit — [*voir* équation (9)] — à

(34) $$X_1 \mathfrak{Z} + m_1 X_2 \mathfrak{Z} = 0.$$

Considérons alors les multiplicités qui satisfont à $\mathfrak{Z} =$ const., équation aux dérivées partielles du premier ordre; elles satisfont aux équations suivantes (*voir* n° **23**, la définition de X_1 et X_2) :

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = X_1 \mathfrak{Z} + [x - \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)] . \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p},$$

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} = X_2 \mathfrak{Z}.$$

Si l'on tient compte de (34), on conclut, en écartant le cas d'exception ([1]) $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p} = 0$,

$$r - \Phi(x, y, z, p, q, s, t) = 0.$$

Donc toutes les intégrales de l'équation $\mathfrak{Z} =$ const. sont des intégrales de la proposée.

3° Supposons maintenant que le faisceau caractéristique $\{P_1, Q_1\}$ ait deux invariants, $\mathfrak{Z}_1\, \mathfrak{Z}_2$; et soient $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \mathfrak{Z}_4, \mathfrak{Z}_5, \mathfrak{Z}_6$ des solutions indépendantes de l'équation $P_1 + v_1 Q_1 = 0$ de l'un quelconque des sous-faisceaux complets (28). L'intégrale complète de ce sous-faisceau sera de la forme

$$f_k(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \mathfrak{Z}_4, \mathfrak{Z}_5, \mathfrak{Z}_6) = c_k, \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5);$$

elle satisfera donc à une équation de la forme

$$\varphi(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \text{const.} \tag{35}$$

obtenue par élimination de $\mathfrak{Z}_3, \mathfrak{Z}_4, \mathfrak{Z}_5, \mathfrak{Z}_6$. Or $\varphi(\mathfrak{Z}_1\, \mathfrak{Z}_2)$ est un invariant du sous-faisceau caractéristique $\{P_1, Q_1\}$, quelque soit φ. Les méthodes des deux cas précédents fourniront donc alors toutes les intégrales de l'équation du second ordre.

4° Les opérations relatives au premier cas considéré se simplifient si les deux sous-faisceaux caractéristiques admettent, séparément, un invariant. Soient $\mathfrak{Z}$ un invariant de $\{P_1, Q_1\}$ et $\mathcal{H}$ un invariant de $\{P_2, Q_2\}$; et supposons que tous deux soient du second ordre. Le raisonnement du premier cas prouve que, si l'on détermine v_2 et v_1 par les conditions

$$P_2\mathfrak{Z} + v_2 Q_2\mathfrak{Z} = 0, \qquad P_1\mathcal{H} + v_1 Q_1\mathcal{H} = 0,$$

le système (28) est complet. On remarquera qu'on en connaît, de plus, les deux intégrales $\mathfrak{Z}$ et $\mathcal{H}$. La détermination de l'intégrale complète correspondante dépend donc seulement de l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre.

([1]) L'exception n'est qu'apparente, car il suffirait de faire un changement de variables (x, y) pour faire réapparaître dans $\mathfrak{Z}$ cette dérivée $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p}$. Si l'on ne fait pas ce changement de variables, Φ devient indéterminé quand on suppose x, y, z, q, s, t liés par $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} = 0$, il suffit d'écrire l'équation $r = \Phi$ sous la forme $Ar + B = 0$ pour constater qu'elle est vérifiée.

Cette remarque s'applique, le cas échéant, concurremment avec les considérations du cas précédent.

28. *Utilisation des caractéristiques d'ordre supérieur.* — Les considérations des premier, troisième et quatrième cas, envisagés au numéro précédent, s'appliquent sans modification lorsque l'on a affaire à des invariants des sous-faisceaux caractéristiques d'ordre supérieur.

Ces sous-faisceaux sont, en effet, de la forme

$$\left\{ R_1, \frac{\partial f}{\partial z_1} \right\}, \qquad \left\{ R_2, \frac{\partial f}{\partial z_2} \right\}. \tag{36}$$

Les variables sont, si l'on a prolongé k fois,

$$x, y, z, p, q, s, t, \quad M_1 t, M_2 t, M^{(\frac{2}{1})} t, \ M^{(\frac{2}{2})} t, \ldots, M^{(\frac{k}{1})} t, M_2^k(t). \tag{37}$$

On a posé

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad M_2 = \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y},$$

et les indices supérieurs indiquent l'itération de ces opérations. Les transformations infinitésimales R_1, R_2 sont entièrement définies par le mode de calcul dont on a donné la marche au n° **26**; et l'on a désigné, pour abréger, les deux dernières des variables (37) par les lettres z_1 et z_2.

Toute intégrale complète (prolongée k fois) est définie par un système de la forme

$$V_1 = R_1 + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \qquad V_2 = R_2 + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{38}$$

et comme on a, pour des fonctions quelconques ζ_1 et ζ_2 des variables (37), une identité de la forme

$$(V_1, V_2) = \lambda(V_2, V_1) + (\theta_1 - V_2\zeta_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (V_1\zeta_2 - \theta_2) \frac{\partial f}{\partial z_2},$$

dans laquelle θ_1 et θ_2 sont des fonctions connues des variables (37), il en résulte que pour que ζ_1 et ζ_2 correspondent à une intégrale complète, il faut et il suffit qu'elles satisfassent aux conditions

$$V_2\zeta_1 = \theta_1, \qquad V_1\zeta_2 = \theta_2. \tag{39}$$

Le point de départ étant ainsi le même qu'au numéro précédent, toutes les considérations de ce numéro subsistent telles quelles.

29. *Caractéristiques du premier ordre.* — Revenons au cas où le faisceau caractéristique du second ordre $\{P_1, Q_1\}$ admet un invariant $\mathfrak{z}$ du premier ordre. Posons, pour abréger l'écriture.

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{z}}{dx} = \dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial n} + p\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z} + r\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial p} + s\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial q} = \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{D} = u, \\[2ex] \dfrac{d\mathfrak{z}}{dy} = \dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y} + q\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z} + s\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial p} + t\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial q} = \mathrm{A}s + \mathrm{B}t + \mathrm{C} = v. \end{cases}$$

On a [n° 27] $\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y} = \mathrm{X}_2\mathfrak{z}$; et, *en tenant compte de* $r = \Phi$, $\dfrac{d\mathfrak{z}}{dx} = \mathrm{X}_1\mathfrak{z}$.

L'équation (34), $\mathrm{X}_1\mathfrak{z} + m_1\mathrm{X}_2\mathfrak{z} = 0$, indique donc que l'on a

$$(41)\qquad m_1 = -\frac{u}{v},$$

si l'on tient compte de $r = \Phi$. Revenant à l'équation (6), qui sert de définition à m_1, on conclut que $r = \Phi$ satisfait à l'équation

$$(42)\qquad u^2 - uv\frac{\partial r}{\partial s} - v^2\frac{\partial r}{\partial t} = 0.$$

L'équation homogène correspondante,

$$(43)\qquad u^2\frac{\partial f}{\partial r} + uv\frac{\partial f}{\partial s} + v^2\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

admet comme intégrales

$$(44)\qquad \gamma = -\frac{u}{v},\qquad \alpha = r + \gamma s,\qquad \beta = s + \gamma t;$$

et ces intégrales sont liées par la relation

$$(45)\qquad \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma + \mathrm{D} = 0.$$

On voit ainsi que l'équation du second ordre est alors de la forme [1]

$$(46)\qquad r + \gamma s = \mathrm{F}(\gamma),\qquad \text{avec}\qquad \gamma = -\frac{u}{v};$$

---

[1] On écarte ici implicitement le cas des *équations linéaires* en r, s, t. Dans ce cas, m_1 ne dépend pas de r, s, t; et l'équation est de la forme γ = fonction de (x, y, z, p, q).

et l'on a $m_1 = \gamma$ quand on tient compte de l'équation. La fonction F dépend, d'une manière arbitraire, de x, y, z, p, q ; et A, B, C, D en dépendent aussi.

Pour la réciproque, il faudra, de plus, que A, B, C, D soient tels que le système

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) : \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} = \mathrm{D : C : A : B}$$

ait au moins une solution.

D'une manière plus symétrique, on peut dire que l'équation $r = \Phi$ résulte de l'élimination de γ entre deux équations de la forme

$$(47) \qquad r + \gamma s = \mathrm{F}(\gamma), \qquad s + \gamma t = \mathrm{G}(\gamma),$$

où les fonctions $\alpha = \mathrm{F}$, $\beta = \mathrm{G}$ satisfont à l'identité (45). Si donc on interprète r, s, t comme des coordonnées courantes (¹), l'équation $r = \Phi$ représente une surface réglée qui a une directrice rectiligne

$$\mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{D} = 0, \qquad \mathrm{A}s + \mathrm{B}t + \mathrm{C} = 0.$$

Les génératrices de la surface, comme la directrice, sont parallèles à des génératrices du cône $rt - s^2 = 0$.

Si on laisse tomber la condition relative à la directrice rectiligne, en gardant la définition de $r = \Phi$ par deux équations (47), où F et G soient arbitraires, on trouve que l'équation (6), qui définit les faisceaux caractéristiques, s'écrit :

$$(m - \gamma)[m(\mathrm{G}' - s) + (\mathrm{F}' - s)] = 0.$$

Donc l'une des racines est la solution commune $m_1 = \gamma$ que les deux équations (47) possèdent, quand on tient compte de l'équation du second ordre, $r = \Phi$, considérée.

On tire de là la conséquence suivante :

Les caractéristiques du premier système $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1\}$ qui engendrent une intégrale sont trajectoires d'une transformation infinitésimale de la forme

$$\mathrm{P}_1 + v_1\mathrm{Q}_1 = \mathrm{X}_1 + m_1\mathrm{X}_2 + u_3\mathrm{X}_3 + u_4\mathrm{X}_4,$$

(¹) Comparez GOURSAT, *loc. cit.*, t. I, p. 195.

qui est un prolongement de

$$(48)\qquad X_1 + m_1 X_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + m_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}q + \frac{df}{dz}\right) + (r + m_1 s)\frac{\partial f}{\partial p} + (s + m_1 t)\frac{\partial f}{\partial q};$$

et en vertu des équations (47), et de la remarque précédente, cette dernière transformation s'écrit :

$$(49)\quad Zf = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + m_1\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) + F(m_1)\frac{\partial f}{\partial p} + G(m_1)\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Toutes les intégrales pour lesquelles m_1 est une même fonction de x, y, z, p, q sont ainsi engendrées (quand on les considère comme prolongées seulement au premier ordre) — par les trajectoires de la transformation (49) correspondante.

Cette transformation (49) fait partie de la famille des transformations infinitésimales

$$(50)\quad Zf = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) + F(\mu)\frac{\partial f}{\partial p} + G(\mu)\frac{\partial f}{\partial q},$$

pour laquelle μ est une fonction arbitraire de x, y, z, p, q.

On a donc, dans ce cas, une *famille de transformations infinitésimales caractéristiques du premier ordre*, dont les trajectoires servent encore à engendrer les multiplicités intégrales de l'équation (prolongées au premier ordre). Et l'analyse précédente montre que le cas envisagé est le seul où il peut en être ainsi.

Mais la famille des transformations infinitésimales caractéristiques n'est plus ici, en général, un faisceau.

Pour qu'il y ait un *faisceau caractéristique du premier ordre* auquel appartiennent toutes les transformations $X_1 + m_1 X_2$ correspondant aux intégrales, il est nécessaire et suffisant que F et G soient linéaires; et, par conséquent, que les équations (47) soient de la forme

$$r + \gamma s = a + b\gamma, \qquad s + \gamma t = a' + b'\gamma.$$

C'est le cas où la surface réglée est une quadrique du type

$$(rt - s^2) - a'r + (b + b')s - at + (aa + bb') = 0.$$

c'est-à-dire le cas des *équations de Monge-Ampère* [1]. Chacun des systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique correspond alors à un faisceau caractéristique du premier ordre. Il est clair que ces faisceaux caractéristiques ne sont pas des sous-faisceaux du faisceau $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ associé à l'équation du second ordre; mais on peut les prolonger de manière à retrouver les sous-faisceaux caractéristiques du second ordre.

---

[1] Il faut réintroduire ici les *équations linéaires*. L'équation étant

$$r + (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t = \mathrm{K},$$

on a

$$r + m_1 s = -m_2(s + m_1 t) + \mathrm{K},$$

et la transformation (48) appartient au *faisceau caractéristique*

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + m_1\left(\frac{\partial f}{\partial q} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mathrm{K}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q} - m_2\frac{\partial f}{\partial p} \right\}.$$