C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 1201–1204

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Une identité pour des polynômes d'Appell

An identity for Appell polynomials

Farid Bencherif [b], Benali Benzaghou [a], Schehrazade Zerroukhat [a]

[a] *Laboratoire LATN, USTHB, Faculté de mathématiques, P.B. 32, El Alia, 16111, Alger, Algérie*
[b] *Laboratoire LA3C, USTHB, Faculté de mathématiques, P.B. 32, El Alia, 16111, Alger, Algérie*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 6 septembre 2017
Accepted after revision 8 novembre 2017
Disponible sur Internet le 20 novembre 2017

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Dans cet article, nous établissons une identité pour des polynômes d'Appell généralisant des formules explicites pour les nombres et polynômes de Bernoulli généralisés.

A B S T R A C T

In this paper, we establish an identity for some Appell polynomials generalizing explicit formulas for generalized Bernoulli numbers and polynomials.

1. Introduction

Les polynômes de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}(x)$ ([11], p. 93) sont définis, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, par :

$$\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{z^n}{n!}. \tag{1}$$

Les nombres de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}$, les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ et les nombres de Bernoulli B_n sont respectivement définis pour $n \geq 0$ par :

$$B_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}(0), \quad B_n(x) = B_n^{(1)}(x) \text{ et } B_n = B_n(0).$$

Les formules explicites connues pour ces nombres et polynômes que nous généralisons dans cet article font intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés $S(n,k,x)$ ([3], p. 152 (3.9)) définis pour x donné et pour tous entiers naturels n et k par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k,x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{xz} (e^z - 1)^k. \tag{2}$$

Adresses e-mail : fbencherif@usthb.dz (F. Bencherif), benzaghou@usthb.dz (B. Benzaghou), szerroukhat@usthb.dz (S. Zerroukhat).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.11.002

On déduit aisément de (2) et (1) les relations suivantes :

$$S(n,k,x)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n$$

et

$$S(n+k,k,x)=\binom{n+k}{k}B_n^{(-k)}(x). \tag{3}$$

Les nombres de Stirling de deuxième espèce classiques $S(n,k)$ vérifient alors la relation (*voir* [4], p. 204) :

$$S(n,k)=S(n,k,0)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

Dans cet article, nous généralisons les trois relations suivantes vérifiées pour tout entier $n\geq 0$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$:

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\binom{n+k}{k}^{-1}S(n+k,k), \tag{4}$$

$$B_n^{(\alpha)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha+n}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k}\binom{n+k}{k}^{-1}S(n+k,k), \tag{5}$$

$$B_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+k}{k}^{-1}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k}S(n+k,k,x). \tag{6}$$

La relation (4) est bien connue (voir [9], p. 219, [5], p. 48, formule (11) et p. 49, formule (17)). Elle a été aussi prouvée par Shirai et Sato en 2001 ([12], p. 140), par Jeong, Kim et Son en 2005 ([8], p. 59), par Guo et Qi en 2015 ([7], (6)) et par Qi et Chapman en 2016 ([10], (1.3)).

La relation (5) est une formule explicite pour les nombres de Bernoulli généralisés qui a été découverte en 1985 par Todorov [14].

Enfin, la relation (6) est une récente formule explicite prouvée en 2017 par Boutiche, Rahmani et Srivastava ([2], Theorème 2.1). Comme le signalent ces auteurs, leur preuve exploite la démonstration d'une autre formule explicite pour $B_n^{(\alpha)}(x)$ établie par Strivastava et Todorov en 1988 ([13], p. 510 (3)).

Notre principal résultat est une identité pour des polynômes d'Appell. Précisons la définition de ces polynômes. Soient $(A_n(x))_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[x]$, $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres complexes définie par $a_n=A_n(0)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $S(z)$ la série formelle de $\mathbb{C}[[z]]$ définie par $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{z^n}{n!}$. On dit que $(A_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes d'Appell [1] si $A_0(x)$ est un polynôme constant non nul et si, de plus, on a $A_n'(x)=nA_{n-1}(x)$ pour $n\geq 1$. Ces conditions sont équivalentes à :

$$a_0\neq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\frac{z^n}{n!}=S(z)\mathrm{e}^{xz}. \tag{7}$$

Les conditions (7) équivalent à

$$a_0\neq 0 \text{ et } A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}x^k,\ (n\geq 0).$$

On constate ainsi que l'on a alors $\deg A_n(x)=n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par suite, toute suite de polynômes d'Appell $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$. Le théorème suivant est notre principal résultat.

Théorème 1.1. *Soient $S(z)$ une série formelle de $\mathbb{C}[[z]]$ de terme constant égal à 1, α un nombre complexe et $\left(A_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes d'Appell de $\mathbb{C}[x]$ de série génératrice exponentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!}=S^{\alpha}(z)\mathrm{e}^{xz}.$$

Alors pour tous entiers naturels m et n tels que $m\geq n$, on a :

$$A_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k}A_n^{(-k)}(x). \tag{8}$$

Les polynômes de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}(x)$ sont des polynômes d'Appell. En exploitant la relation (3), on déduit du théorème 1.1 le corollaire suivant.

Corollaire 1.2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n$, on a*

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \binom{n+k}{k}^{-1} S(n+k,k,x).$$

Pour $\alpha = 1$, $m = n$ et $x = 0$, le corollaire 1.2 fournit la formule (4).
Pour $m = n$ et $x = 0$, le corollaire 1.2 fournit la formule (5).
Pour $m = n$, le corollaire 1.2 fournit (6).

2. Lemmes préparatoires

Lemme 2.1. *Pour tous entiers naturels m et q, on a :*

$$1 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{q+m}{m-k} \binom{q+k-1}{k} x^{q+k} - (-1)^m \binom{q+m}{q} \sum_{k=1}^{q} \frac{k}{m+k} \binom{q}{k} (x-1)^{m+k}. \tag{9}$$

Preuve. On montre facilement que la dérivée du second membre de (9) est nulle. En effet, en remarquant que pour $0 \leq k \leq m$, on a $\binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k}(q+k) = q\binom{q+m}{q}\binom{m}{k}$, le second membre de (9) peut s'écrire comme la différence de deux polynômes ayant chacun pour dérivée $q\binom{q+m}{q}x^{q-1}(1-x)^m$. Le second membre est donc un polynôme constant, qui, de plus, vaut 1 pour $x = 0$, en vertu de l'identité (5.41) p. 202 de [6]. La relation (9) en résulte. □

Lemme 2.2. *Soit L l'automorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ défini par*

$$L\left(A_n^{(1)}(x)\right) = A_n^{(0)}(x) = x^n, \ n \geq 0.$$

(i) Pour tous entiers r et s, on a

$$L^r(A_n^{(s)}(x)) = A_n^{(s-r)}(x). \tag{10}$$

(ii) Pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n+1$ et pour tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ de degré inférieur ou égal à n, on a

$$(L-I)^m(P(x)) = 0. \tag{11}$$

Preuve. (i) Posons

$$S^{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\alpha)} \frac{z^n}{n!}.$$

On a alors, pour tout entier s,

$$A_n^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_{n-j}^{(s-1)} A_j^{(1)}(x). \tag{12}$$

En appliquant L à chacun des deux membres de l'égalité (12), on prouve que la relation (10) est vérifiée pour $r = 1$. Un simple raisonnement par récurrence sur r permet alors de prouver (10) pour $r \geq 0$. Le fait que, de plus, L est un automorphisme permet de montrer que cette relation est aussi vérifiée pour $r \leq 0$.

(ii) Pour tout entier n, $L\left(x^n\right) = A_n^{(-1)}(x)$ est un polynôme unitaire de degré n, on en déduit que

$$\deg\,(L-I)\left(x^n\right) \leq n-1 \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } (L-I)\left(x^0\right) = 0,$$

la relation (11) en résulte. □

3. Démonstration du théorème

Soient m, n et q des entiers naturels tels que $m \geq n$. Le lemme 2.1 nous permet d'écrire la relation suivante :

$$L^{-q} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{q+m}{m-k} \binom{q+k-1}{k} L^k - (-1)^m \binom{q+m}{q} \sum_{k=1}^{q} \frac{k}{m+k} \binom{q}{k} L^{-q} (L-I)^{m+k}. \tag{13}$$

On sait, d'après le lemme 2.2, que pour tout entier r, on a $L^r(x^n) = A_n^{(-r)}(x)$. On déduit de (13) que, pour tout entier naturel q, on a :

$$A_n^{(q)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{q+m}{m-k} \binom{q+k-1}{k} A^{(-k)}(x^n).$$

La relation (8) est ainsi établie pour tout $\alpha = q$ où q est un entier naturel quelconque. Remarquons alors que $A_n^{(\alpha)}(x)$ est un polynôme de degré n en x aussi bien qu'un polynôme de degré n en α. Il en résulte que pour m, n et x fixés, la relation (8) est une égalité vérifiée pour une infinité de valeurs (entières) de α, entre les valeurs prises par deux polynômes en α dont le degré ne dépasse pas m. On en déduit que ces deux polynômes sont égaux. La relation (8) est, par conséquent, aussi vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Références

[1] P. Appell, Sur une classe de polynômes, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 9 (2) (1880) 119–144.
[2] M.A. Boutiche, M. Rahmani, H.M. Srivastava, Explicit formulas associated with some families of generalized Bernoulli and Euler polynomials, Mediterr. J. Math. 14 (2017) 89.
[3] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind—I, Fibonacci Q. 18 (1980) 147–162.
[4] L. Comtet, Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions, Revised and enlarged edition, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht and Boston, 1974.
[5] H.W. Gould, Explicit formulas for Bernoulli numbers, Amer. Math. Mon. 79 (1972) 44–51.
[6] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Mathématiques concrètes, Fondations pour l'Informatique, International Thomson publishing France, 1998.
[7] B.-N. Guo, F. Qi, An explicit formula for Bernoulli numbers in terms of Stirling numbers of the second kind, J. Anal. Number Theory 3 (1) (2015) 27–30.
[8] S. Jeong, M.-S. Kim, J.-W. Son, On explicit formulae for Bernoulli numbers and their counterparts in positive characteristic, J. Number Theory 113 (1) (2005) 53–68.
[9] C. Jordan, Calculus of Finite Differences, Budapest, 1939; second ed., Chelsea, New York, 1950.
[10] F. Qi, R.J. Chapman, Two closed forms for the Bernoulli polynomials, J. Number Theory 159 (2016) 89–100.
[11] S. Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, New York, NY, USA, 1984.
[12] S. Shirai, K.-I. Sato, Some identities involving Bernoulli and Stirling numbers, J. Number Theory 90 (1) (2001) 130–142.
[13] H.M. Srivastava, P.G. Todorov, An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials, J. Math. Anal. Appl. 130 (1988) 509–513.
[14] P.G. Todorov, Une formule simple explicite des nombres de Bernoulli généralisés, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 301 (1985) 665–666.