C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 232–242

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Problèmes mathématiques de la mécanique/Équations aux dérivées partielles

Une approche intrinsèque d'un modèle non linéaire de la théorie des coques

An intrinsic approach to a nonlinear model in shell theory

Philippe G. Ciarlet [a], Oana Iosifescu [b]

[a] *Department of Mathematics, City University of Hong Kong, 83 Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong*
[b] *Département de Mathématiques, université de Montpellier, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 30 décembre 2016
Accepté le 30 décembre 2016
Disponible sur Internet le 18 janvier 2017

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

On considère le modèle de coque non linéairement élastique « peu profonde » proposé par L.H. Donnell, V.Z. Vlasov, K.M. Mushtari & K.Z. Galimov et W.T. Koiter. On montre que les champs de tenseurs, linéarisés de changement de courbure et non linéaire des déformations, apparaissant dans l'énergie de ce modèle peuvent être pris comme les seules inconnues du problème, au lieu du champ des déplacements comme à l'accoutumée. Afin de justifier cette « approche intrinsèque » de ce modèle non linéaire de coques, on identifie des conditions de compatibilité non linéaires que ces nouvelles inconnues doivent satisfaire. Ces conditions sont du type de Donati, au sens qu'elles se présentent sous la forme de relations intégrales d'orthogonalité à des champs de tenseurs à divergence nulle.

ABSTRACT

We consider the model of a nonlinearly elastic "shallow" shell proposed by L.H. Donnell, V.Z. Vlasov, K.M. Mushtari & K.Z. Galimov, and W.T. Koiter. We show that the linearized change of curvature and nonlinear strain tensor fields appearing in the energy of this model can be taken as the sole unknowns of the problem, instead of the displacement field as is customary. In order to justify this "intrinsic approach" to this nonlinear model, we identify nonlinear compatibility conditions that these new unknowns must satisfy. These conditions are of Donati type, in the sense that they take the form of integral orthogonality relations against divergence-free tensor fields.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Préliminaires géométriques

Les indices grecs prennent leurs valeurs dans $\{1, 2\}$, et les indices latin dans $\{1, 2, 3\}$. La convention de sommation pour les indices répétés est utilisée.

Adresses e-mail : mapgc@cityu.edu.hk (P.G. Ciarlet), iosifescu@math.univ-montp2.fr (O. Iosifescu).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.01.001
1631-073X/

On note $\mathbb{E}^3$ l'espace euclidien de dimension trois, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, le produit scalaire euclidien, le produit vectoriel et le produit tensoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{E}^3$, et $|\cdot|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{E}^3$. Les espaces fonctionnels de champs de vecteurs sont notés en caractères gras, et les espaces de champs de tenseurs *symétriques* en caractères « romains spéciaux ».

Soit ω un *domaine* de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un ouvert borné connexe, de frontière lipschitzienne, l'ouvert ω étant localement d'un même côté de la frontière, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion. Les deux champs de vecteurs $\boldsymbol{a}_\alpha := \partial_\alpha \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ forment les bases covariantes des plans tangents à la surface $S := \boldsymbol{\theta}(\overline{\omega}) \subset \mathbb{E}^3$, et les champs de vecteurs tengents $\boldsymbol{a}^\beta \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$, définis par les relations $\boldsymbol{a}^\beta \cdot \boldsymbol{a}_\alpha = \delta_\alpha^\beta$ dans $\overline{\omega}$, forment les bases contravariantes des plans tangents à S. On définit aussi un champ de vecteurs normaux à S par $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}^3 := \dfrac{\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2|} \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$.

Les composantes covariantes et contravariantes $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega})$ et $a^{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega})$ de la *première forme fondamentale* de S sont définies par

$$a_{\alpha\beta} := \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_\beta = a_{\beta\alpha} \text{ et } a^{\alpha\beta} := \boldsymbol{a}^\alpha \cdot \boldsymbol{a}^\beta = a^{\beta\alpha},$$

et l'élément de surface le long de S est alors $\sqrt{a}\,\mathrm{d}y$, où $a := \det(a_{\alpha\beta})$. Les composantes covariantes et mixtes $b_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^0(\overline{\omega})$ et $b_\alpha^\beta \in \mathcal{C}^0(\overline{\omega})$ de la *seconde forme fondamentale* de S sont définies par

$$b_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \boldsymbol{a}_\beta \cdot \boldsymbol{a}^3 = b_{\beta\alpha} \text{ et } b_\alpha^\beta := a^{\beta\sigma} b_{\alpha\sigma}.$$

Les *symboles de Christoffel* $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^0(\overline{\omega})$ associés à l'immersion $\boldsymbol{\theta}$ sont définis par

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \boldsymbol{a}_\beta \cdot \boldsymbol{a}^\sigma = \frac{1}{2} a^{\sigma\tau}(\partial_\alpha a_{\beta\tau} + \partial_\beta a_{\alpha\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\beta}) = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}.$$

La *courbure de Gauß* de la surface S est la fonction $K \in \mathcal{C}^0(\overline{\omega})$ définie par

$$K = \frac{\det(b_{\alpha\beta})}{\det(a_{\alpha\beta})}.$$

Étant donné un *champ de vecteurs le long de la surface S* (par exemple, le champ des déplacements de la surface S, vue comme la surface moyenne d'une coque) de la forme

$$\eta_i \boldsymbol{a}^i : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3,$$

on définit (sous réserve que les composantes covariantes $\eta_i : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ de ce champ soient suffisamment régulières) les *dérivées covariantes* suivantes :

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha|\beta} &:= \partial_\beta \eta_\alpha - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \eta_\sigma \text{ et } \eta_{3|\alpha} := \partial_\alpha \eta_3,\\
\eta_{\alpha|\beta\sigma} &:= \partial_\sigma(\eta_{\alpha|\beta}) - \Gamma^\tau_{\alpha\sigma}(\eta_{\tau|\beta}) - \Gamma^\tau_{\beta\sigma}(\eta_{\alpha|\tau})) = (\eta_{\alpha|\beta})|_\sigma,\\
\eta_{3|\alpha\beta} &:= (\eta_{3|\alpha})|_\beta = \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma \eta_3.
\end{aligned}$$

Étant donné un *champ de tenseurs* $t^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\alpha \otimes \boldsymbol{a}_\beta$, on définit (sous réserve que les composantes contravariantes $t^{\alpha\beta} : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ de ce champ soient suffisamment régulières) les *dérivées covariantes* suivantes :

$$\begin{aligned}
t^{\alpha\beta}|_\sigma &:= \partial_\sigma t^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\tau} t^{\tau\beta} + \Gamma^\beta_{\sigma\tau} t^{\alpha\tau},\\
t^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} &:= \partial_\alpha(t^{\alpha\beta}|_\beta) + \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}(t^{\alpha\beta}|_\beta).
\end{aligned}$$

Enfin, les fonctions

$$R^\tau_{\cdot\alpha\beta\sigma} := \partial_\beta \Gamma^\tau_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\tau_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\tau_{\beta\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\tau_{\sigma\mu} = R^\tau_{\cdot\alpha\sigma\beta}$$

désignent les composantes mixtes du *tenseur de courbure de Riemann* associé à la première forme fondamentale. Ces composantes vérifient les relations suivantes, les premières constituant les *identités de Ricci* :

$$\begin{aligned}
&R^\tau_{\cdot\alpha\beta\sigma} + R^\tau_{\cdot\beta\sigma\alpha} + R^\tau_{\cdot\sigma\alpha\beta} = 0,\\
&\quad R_{\nu\sigma\beta\alpha} = a_{\nu\tau} R^\tau_{\cdot\sigma\beta\alpha} = b_{\alpha\sigma} b_{\beta\nu} - b_{\alpha\beta} b_{\sigma\nu},\\
&\qquad \eta_{\alpha|\beta\sigma} - \eta_{\alpha|\sigma\beta} = R^\tau_{\cdot\alpha\beta\sigma}\eta_\tau.
\end{aligned}$$

2. Un modèle de coque « profonde » non linéairement élastique

Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion injective (l'hypothèse d'injectivité est faite uniquement pour assurer que le modèle mathématique correspond à une situation effective). Une coque (linéairement ou non linéairement élastique) de surface moyenne $S := \boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ est dite « *peu profonde* » si $\sup_{y \in \overline{\omega}} |K(y)|$ est « suffisamment petit », où K désigne la courbure de Gauß de la surface S (cf. Sect. 1).

Pour une telle coque, Donnell [18], Vlasov [28], Mushtari et Galimov [27], et enfin Koiter [24] (cf. les équations (11.43)–(11.44) dans [24]) ont proposé le modèle non linéaire suivant. On définit l'*énergie* J par

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{2} \int_{\omega} \Big\{ \frac{\varepsilon^3}{3} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \eta_{3|\sigma\tau} \eta_{3|\alpha\beta} + \varepsilon a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Big(\frac{1}{2}(\eta_{\sigma|\tau} + \eta_{\tau|\sigma}) - b_{\sigma\tau}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{3|\sigma}\eta_{3|\tau} \Big) \Big(\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta} \Big) \Big\} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y - \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a}\, \mathrm{d}y$$

pour chaque $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) = ((\eta_\alpha), \eta_3) \in \boldsymbol{H}^1(\omega) \times H^2(\omega)$, où les fonctions

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})$$

désignent les composantes contravariantes du *tenseur d'élasticité bi-dimensionnel* de la coque, les fonctions $a^{\alpha\beta}$ étant les composantes contravariantes de la première forme fondamentale de S (cf. Sect. 1) et les constantes $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ étant les constantes de Lamé du matériau constituant la coque (ce tenseur est uniformément défini positif dans $\overline{\omega}$), et les fonctions $p^i \in L^2(\omega)$ désignent les composantes contravariantes des forces appliquées.

Dans cette Note, on se bornera à considérer le cas d'une coque *totalement encastrée* le long de sa frontière latérale, renvoyant à l'article dévoloppé [13] pour le cas d'une coque partiellement encastrée. Alors dans ce cas, le champ $\boldsymbol{\eta}^* = (\eta_i^*)$, où les fonctions $\eta_i^* : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ désignent les composantes covariantes du champ des déplacements $\eta_i^* \boldsymbol{a}^i$ de la surface moyenne de la coque déformée, est cherché comme un minimiseur de l'énergie J lorsque les champs « admissibles » $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)$ décrivent l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$.

L'existence d'un tel minimiseur a été établie, sous diverses hypothèses (qui toutes impliquent en particulier que $\sup_{y \in \overline{\omega}} |K(y)|$ doit être « suffisamment petit »), par Bernadou et Oden [5] (par le biais de la théorie des « opérateurs pseudo-monotones » de Lions [25]), par Figueiredo [19] (par le biais du théorème des fonctions implicites, appliqué au système d'équations aux dérivées partielles non linéaires correspondant), et par le second auteur [2,3] sous les hypothèses que la frontière γ est de classe $\mathcal{C}^3$ et que $\boldsymbol{\theta}$ est analytique dans un ouvert contenant $\overline{\omega}$ (par le biais de la théorie des systèmes du premier ordre « uniformément elliptiques » au sens de Agmon, Douglis, et Nirenberg [1], couplée au théorème de Holmgren et au théorème de continuation analytique de Morrey et Nirenberg [26]).

Le problème de minimisation décrit ci-dessus constitue l'*approche classique* d'un tel modèle, où l'inconnue est donc le *champ* $\boldsymbol{\eta}^* = (\eta_i^*)$ formé par les composantes covariantes du champ des déplacements $\eta_i^* \boldsymbol{a}_i$ de la surface moyenne de la coque.

En revanche, dans une *approche intrinsèque* du *même* modèle (l'idée d'une approche intrinsèque remonte à Chien [6–8]), on considère que les inconnues du problème sont le *tenseur linéarisé de changement de courbure* et le *tenseur non linéaire des déformations* associés au champ $\boldsymbol{\eta}^*$, les composantes covariantes de ces deux tenseurs étant respectivement définies pour un champ admissible $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) = ((\eta_\alpha), \eta_3) \in \boldsymbol{H}^1(\omega) \times H^2(\omega)$ quelconque par

$$(\eta_{3|\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega) \text{ et } \Big(\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta} \Big) \in \mathbb{L}^2(\omega).$$

On notera au passage que la première intégrale apparaissant dans l'énergie J est une forme quadratique définie positive de ces deux champs de tenseurs sur l'espace $\mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega)$.

L'objectif principal de cette Note est d'identifier et de justifier des *conditions de compatibilité* que ces nouvelles inconnues, qui sont donc des champs de tenseurs avec des composantes dans $L^2(\omega)$, doivent vérifier afin qu'elles correspondent effectivement à des champs $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ (Théorème 6.1). Une fois ces conditions de compatibilité identifiées, on montrera que ces nouvelles inconnues sont elles aussi solutions d'un *problème de minimisation sur un sous-ensemble de l'espace* $\mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega)$ (Théorème 7.1), *justifiant ainsi l'approche intrinsèque du modèle considéré ici.*

Les conditions de compatibilité trouvées ici sont *du type de Donati*, au sens qu'elles se présentent sous la forme de *relations intégrales* exprimant l'orthogonalité des nouvelles inconnues à des champs de tenseurs à divergence nulle (pour d'autres exemples, voir [4,12,15,20,22] dans des cas linéaires, et [10] dans un cas non linéaire, celui d'une plaque). Il existe une autre forme possible de conditions de compatibilité, dites *du type de Saint-Venant*, qui prennent alors la forme de *relations aux dérivées partielles* satisfaites par les nouvelles inconnues (voir [9,11,14] dans des cas linéaires, et [16] dans un cas non linéaire, à nouveau celui d'une plaque).

3. Préliminaires : deux équivalences de normes sur une surface

On trouvera les preuves détaillées des résultats qui suivent dans [13]. Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$. Il est bien connu que la semi-norme $\sum_{\alpha,\beta}\left\|\partial_{\alpha\beta}\cdot\right\|_{L^2(\omega)}$ est une norme sur l'espace $H_0^2(\omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^2(\omega)}$ sur cet espace. Le lemme suivant montre que ce résultat subsiste si les derivées partielles usuelles sont remplacées par les derivées covariantes correspondantes.

Lemme 3.1. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{C}^2(\overline{\omega},\mathbb{E}^3)$ une immersion, et $\eta_3\boldsymbol{a}^3:\overline{\omega}\to\mathbb{E}^3$ un champ de vecteurs tel que $\eta_3\in H_0^2(\omega)$. Alors*

$$\eta_3\to\sum_{\alpha,\beta}\|\eta_{3|\alpha\beta}\|_{L^2(\omega)}$$

définit une norme sur l'espace $H_0^2(\omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^2(\omega)}$.

Esquisse de la preuve. Celle-ci comporte essentiellement trois étapes.

(i) On montre que l'identité suivante est satisfaite par tout champ $\eta_3\boldsymbol{a}^3:\overline{\omega}\to\mathbb{E}^3$ tel que $\eta_3\in H^2(\omega)$:

$$\partial_\beta\left(|\partial_\alpha\eta_3\boldsymbol{a}^\alpha|^2\right)=2\left(\eta_{3|\alpha\beta}\right)\partial_\sigma\eta_3a^{\alpha\sigma}\text{ dans }\mathcal{D}'(\omega).$$

(ii) Utilisant l'identité de l'étape (i), on montre que, si un champ $\eta_3\boldsymbol{a}^3:\overline{\omega}\to\mathbb{E}^3$ est tel que

$$\eta_3\in H^2(\omega)\text{ et }\eta_{3|\alpha\beta}=0\text{ dans }\omega,$$

alors $\eta_3=0$. Ainsi, $\eta_3\to\sum_{\alpha,\beta}\left\|\eta_{3|\alpha\beta}\right\|_{L^2(\omega)}$ définit une norme sur $H_0^2(\omega)$.

(iii) Utilisant le théorème de Rellich–Kondrasov, la complétude de l'espace $H_0^2(\omega)$, et le résultat de l'étape (ii), on montre l'équivalence annoncée des deux normes par un simple raisonnement par contradiction. □

Il est également bien connu que la semi-norme $(\eta_\alpha)\to\sum_{\alpha,\beta}\|\frac{1}{2}(\partial_\beta\eta_\alpha+\partial_\alpha\eta_\beta)\|_{L^2(\omega)}$ est une norme sur l'espace $H_0^1(\omega)\times H_0^1(\omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\boldsymbol{H}^1(\omega)}$ sur cet espace. Le lemme suivant montre que ce résultat subsiste si les dérivées partielles usuelles sont remplacées par les dérivées covariantes correspondantes, à condition toutefois qu'une *hypothèse spécifique sur la courbure de Gauß* soit satisfaite. On observera que cette hypothèse est visiblement satisfaite dans le cas, considéré ici, d'une coque « peu profonde ».

Lemme 3.2. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{C}^2(\overline{\omega};\mathbb{E}^3)$ une immersion. Alors il existe une constante $\lambda_1>0$ telle que, si la courbure de Gauß $K\in\mathcal{C}^0(\overline{\omega})$ de la surface $\boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ satisfait*

$$\sup_{y\in\overline{\omega}}K(y)<\lambda_1,$$

on ait la propriété suivante : soit $\eta_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha:\overline{\omega}\to\mathbb{E}^3$ un champ de vecteurs tel que $\eta_\alpha\in H_0^1(\omega)$; alors

$$(\eta_\alpha)\to\sum_{\alpha,\beta}\|\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta}+\eta_{\beta|\alpha})\|_{L^2(\omega)}$$

définit une norme sur l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\omega):=H_0^1(\omega)\times H_0^1(\omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\boldsymbol{H}^1(\omega)}$.

Esquisse de la démonstration. Celle-ci comporte essentiellement sept étapes.

(i) On montre que l'identité suivante est satisfaite par tout champ $\eta_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha$ tel que $(\eta_\alpha)\in\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\omega)$: Posons $e_{\alpha\beta}:=\dfrac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta}+\eta_{\beta|\alpha})$. Alors (les fonctions $R^{\nu}_{\cdot\sigma\beta\alpha}$ sont définies dans la Section 2)

$$\eta_{\alpha|\beta\sigma}=e_{\alpha\sigma|\beta}+e_{\alpha\beta|\sigma}-e_{\beta\sigma|\alpha}+R^{\nu}_{\cdot\sigma\beta\alpha}\eta_\nu\text{ dans }\mathcal{D}'(\omega).$$

(ii) Il découle de l'étape (i) que, si $(\eta_\alpha)\in\boldsymbol{H}^1(\omega)$ satisfait $\dfrac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta}+\eta_{\beta|\alpha})=0$ dans ω, alors

$$-a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma}\eta_{\alpha|\beta\sigma}=Ka^{\alpha\tau}\eta_\alpha\text{ dans }H^{-1}(\omega)\subset\mathcal{D}'(\omega).$$

(iii) Ré-écrivant la relation établie à l'étape (ii) sous forme variationnelle, on établit que, si $(\eta_\alpha)\in\boldsymbol{H}_0^1(\omega)$ satisfait $\dfrac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta}+\eta_{\beta|\alpha})=0$ dans ω, alors

$$\int_\omega a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma} \eta_{\alpha|\beta} \zeta_{\tau|\sigma} \sqrt{a}\,\mathrm{d}y = \int_\omega K a^{\alpha\tau} \eta_\alpha \zeta_\tau \sqrt{a}\,\mathrm{d}y \text{ pour tout } (\zeta_\tau) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega).$$

(iv) Utilisant l'identité

$$\partial_\beta \left(|\eta_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha|^2 \right) = 2(\eta_{\alpha|\beta}) \eta_\sigma a^{\alpha\sigma},$$

satisfaite par tout champ $\eta_i \boldsymbol{a}^i$ tel que $\eta_i \in \mathcal{D}(\omega)$, on montre que la semi-norme $(\eta_\alpha) \to \sum_{\alpha,\beta} \|\eta_{\alpha|\beta}\|_{L^2(\omega)}$ définit une norme sur l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\boldsymbol{H}^1(\omega)}$.

(v) On montre que la forme bilinéaire $a : \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) := \int_\omega a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma} \eta_{\alpha|\beta} \zeta_{\tau|\sigma} \sqrt{a}\,\mathrm{d}y \text{ pour tout } (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \big((\eta_\alpha), (\zeta_\tau)\big) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\omega)$$

est symétrique et définie positive sur $\boldsymbol{H}_0^1(\omega)$. À cette fin, on établit l'existence d'une constante D telle que

$$D > 0 \text{ et } a^{\alpha\sigma}(y) a^{\beta\tau}(y) t_{\alpha\beta} t_{\sigma\tau} \geq D \sum_{\alpha,\beta} \left| t_{\alpha\beta} \right|^2$$

pour tout $\omega \in \overline{\omega}$ et toute matrice $(t_{\alpha\beta})$.

(vi) On montre qu'il existe une constante $\lambda_1 > 0$ telle que, si $\sup_{y \in \overline{\omega}} K(y) < \lambda_1$, alors

$$(\eta_\alpha) \to \sum_{\alpha,\beta} \|\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha})\|_{L^2(\omega)}$$

définit une norme sur l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\omega)$. Pour cela, on note que le théorème spectral appliqué à la forme bilinéaire $a : \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \to \mathbb{R}$ introduite à l'étape (v) montre que

$$\lambda_1 := \inf_{\begin{cases} \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \\ \boldsymbol{\eta} \neq 0 \end{cases}} \frac{a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})}{\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle} > 0,$$

où

$$\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle := \int_\omega a^{\alpha\tau} \eta_\alpha \zeta_\tau \sqrt{a}\,\mathrm{d}y \text{ pour tout } (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \big((\eta_\alpha), (\zeta_\tau)\big) \in \boldsymbol{L}^2(\omega) \times \boldsymbol{L}^2(\omega).$$

On en déduit que la forme bilinéaire $a_K(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$a_K(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) := a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) - \int_\omega K a^{\alpha\tau} \eta_\alpha \zeta_\tau \sqrt{a}\,\mathrm{d}y \text{ pour tout } (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\omega)$$

est définie positive sur $\boldsymbol{H}_0^1(\omega)$ si $\sup_{y \in \overline{\omega}} K(y) < \lambda_1$.

(vii) La conclusion annoncée suit alors d'un simple raisonnement par contradiction reposant sur la complétude de l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\omega)$ et sur le résultat de l'étape (vi). $\square$

4. Préliminaires : formules de Green sur une surface

Les deux premières formules de Green ci-dessous, qui sont *linéaires*, se démontrent essentiellement comme le Théorème 7.2 de [12], par des preuves analogues à celle de la formule de Green dans l'espace $H(\mathrm{div};\omega) = \{(\eta_\alpha) \in \boldsymbol{L}^2(\omega); \partial_\alpha \eta_\alpha \in L^2(\omega)\}$ donnée par Girault & Raviart [23].

Lemme 4.1. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion. Alors, l'espace*

$$\mathbb{M}(\omega) := \{\boldsymbol{m} = (m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega); m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} \in L^2(\omega)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{M}(\omega)} := \left(\sum_{\alpha,\beta} \|m^{\alpha\beta}\|^2_{L^2(\omega)} + \|m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}\|^2_{L^2(\omega)} \right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert, et $\mathbb{C}^\infty(\overline{\omega})$ est un sous-espace dense de $\mathbb{M}(\omega)$. De plus, l'application linéaire

$$\boldsymbol{m} = (m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\omega}) \to \left(m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta, m^{\alpha\beta}|_\beta\nu_\alpha + \partial_\tau(m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta)\right) \in H^{-1/2}(\gamma) \times H^{-3/2}(\gamma)$$

(qui est bien définie car γ est supposée être de classe $\mathcal{C}^{1,1}$) *est continue, et donc possède une extension linéaire et continue unique à l'espace* $\mathbb{M}(\omega)$ (désignée par la même notation dans ce qui suit).

Enfin, la formule de Green

$$\int_\omega m^{\alpha\beta}\zeta_{3|\alpha\beta}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y = \int_\omega m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}\zeta_3\sqrt{a}\,\mathrm{d}y + {}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta, \partial_\nu\zeta_3\sqrt{a}\rangle_{H^{1/2}(\gamma)}$$
$$- {}_{H^{-3/2}(\gamma)}\langle m^{\alpha\beta}|_\beta\nu_\alpha + \partial_\tau(m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta), \zeta_3\sqrt{a}\rangle_{H^{3/2}(\gamma)},$$

est satisfaite par tout champ de tenseur $(m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}(\omega)$ *et par tout champ de vecteurs* $\zeta_3\boldsymbol{a}^3 : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ *tel que* $\zeta_3 \in H^2(\omega)$. $\square$

Lemme 4.2. *Soit ω un domaine $\mathbb{R}^2$ et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion. Alors l'espace*

$$\mathbb{N}(\omega) := \{\boldsymbol{n} = (n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega);\ (n^{\alpha\beta}|_\beta) \in \boldsymbol{L}^2(\omega)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|\boldsymbol{n}\|_{\mathbb{N}(\omega)} := \left(\sum_{\alpha,\beta}\|n^{\alpha\beta}\|^2_{L^2(\omega)} + \sum_\alpha\|n^{\alpha\beta}|_\beta\|^2_{L^2(\omega)}\right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert, et $\mathbb{C}^\infty(\overline{\omega})$ est un sous-espace dense de $\mathbb{N}(\omega)$. De plus, l'application linéaire

$$\boldsymbol{n} = (n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{C}^\infty(\omega) \to (n^{\alpha\beta}\nu_\beta) \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\gamma)$$

est continue, et donc possède une extension linéaire et continue unique à l'espace $\mathbb{N}(\omega)$ (désignée par la même notation dans ce qui suit).

Enfin, la formule de Green

$$\int_\omega n^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}(\zeta_{\alpha|\beta} + \zeta_{\beta|\alpha})\right)\sqrt{a}\,\mathrm{d}y = -\int_\omega n^{\alpha\beta}|_\beta\zeta_\alpha\sqrt{a}\,\mathrm{d}y + {}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle n^{\alpha\beta}\nu_\beta, \zeta_\alpha\sqrt{a}\rangle_{H^{1/2}(\gamma)}$$

est satisfaite par tout champ de vecteurs $(n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}(\omega)$ et par tout champ de vecteurs $\zeta_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ tel que $\zeta_\alpha \in H^1(\omega)$.

Une autre formule de Green, cette fois *non linéaire*, est également satisfaite par les champs de tenseurs de l'espace $\mathbb{N}(\omega)$:

Lemme 4.3. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion. Alors la formule de Green*

$$\int_\omega n^{\alpha\beta}\zeta_{3|\alpha}\zeta_{3|\beta}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y = -\int_\omega (n^{\alpha\beta}|_\beta)\zeta_{3|\alpha}\zeta_3\sqrt{a}\,\mathrm{d}y - \int_\omega n^{\alpha\beta}\zeta_{3|\alpha\beta}\zeta_3\sqrt{a}\,\mathrm{d}y + {}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle n^{\alpha\beta}\nu_\beta, \zeta_{3|\alpha}\zeta_3\sqrt{a}\rangle_{H^{1/2}(\gamma)}$$

est satisfaite par tout champ de vecteurs $(n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}(\omega)$ et par tout champ de vecteurs $\zeta_3\boldsymbol{a}^3 : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ tel que $\zeta_3 \in H^2(\omega)$.

Esquisse de la preuve. Celle-ci repose sur la formule de Green (due à Geymonat & Suquet [22] ; voir aussi Geymonat & Krasucki [20,21])

$$\int_\omega n^{\alpha\beta}\partial_\alpha\eta_\beta\,\mathrm{d}y = -\int_\omega (\partial_\beta n^{\alpha\beta})\eta_\alpha\,\mathrm{d}y + {}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle n^{\alpha\beta}\nu_\beta, \eta_\alpha\rangle_{H^{1/2}(\gamma)},$$

satisfaite par tout champ de tenseurs $(n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega)$ tel que $(\partial_\beta n^{\alpha\beta}) \in \boldsymbol{L}^2(\omega)$ et par tout champ de vecteurs $(\eta_\alpha) \in \boldsymbol{H}^1(\omega)$, avec le choix particulier $\eta_\beta := \zeta_{3|\beta}\zeta_3\sqrt{a}$. $\square$

Il est à noter qu'aucune hypothèse sur la courbure de Gauß n'est faite pour établir les formules de Green des Lemmes 4.1, 4.2 et 4.3.

5. Préliminaires : conditions de Donati linéaires sur une surface

Les deux conditions de Donati *linéaires* sur une surface établies dans les Lemmes 5.1 et 5.2 ci-dessous jouent un rôle essentiel dans l'établissement de conditions de Donati *non linéaires* sur une surface adaptées au modèle de coque considéré ici (cf. Théorème 6.1). Les preuves de ces deux lemmes sont analogues à celles des Théorèmes 8.1 et 8.2 de [12].

Lemme 5.1. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion. On définit les espaces*

$$\mathbb{M}_0(\omega) := \{(m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega);\ m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega)\},$$
$$\mathbb{M}_0^\perp(\omega) := \left\{(s_{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega);\ \int_\omega s_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y = 0 \text{ pour tout } (m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}_0(\omega)\right\}.$$

Alors, étant donné un champ de tenseurs $\boldsymbol{r} = (r_{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega)$, il existe un champ de vecteurs $\eta_3 \boldsymbol{a}^3 : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ tel que

$$\eta_3 \in H_0^2(\omega) \text{ et } \eta_{3|\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega,$$

si, et seulement si, le champ $\boldsymbol{r}$ vérifie les conditions de Donati linéaire sur une surface suivantes :

$$\int_\omega r_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y = 0 \text{ pour tout } (m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}_0(\omega),$$

ou, de façon équivalente, si, et seulement si, $\boldsymbol{r} = (r_{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}_0^\perp(\omega)$. Si tel est le cas, la fonction $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$ est déterminée de façon unique, et l'application

$$\hat{\eta}_3 : \boldsymbol{r} = (r_{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}_0^\perp(\omega) \to \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) := \eta_3 \in H_0^2(\omega)$$

ainsi définie est linéaire et continue. □

Lemme 5.2. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, et $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion telle que le courbure de Gauß de la surface $\boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ satisfasse*

$$\sup_{y \in \overline{\omega}} K(y) < \lambda_1,$$

où $\lambda_1 > 0$ est la constante du Lemme 3.2. On définit les espaces

$$\mathbb{N}_0(\omega) := \{(n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega);\ n^{\alpha\beta}|_{\beta} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega)\},$$
$$\mathbb{N}_0^\perp(\omega) := \left\{(t_{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega);\ \int_\omega t_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y = 0 \text{ pour tout } (n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0(\omega)\right\}.$$

Alors, étant donné un champ de tenseurs $\boldsymbol{c} = (c_{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega)$, il existe un champ de vecteurs $\eta_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ tel que

$$\eta_\alpha \in H_0^1(\omega) \text{ et } \frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) = c_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega,$$

si, et seulement si, le champ $\boldsymbol{c}$ vérifie les conditions de Donati linéaires sur une surface suivantes :

$$\int_\omega c_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y = 0 \text{ pour tout } (n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0(\omega),$$

ou, de façon équivalente, si, et seulement si, $\boldsymbol{c} = (c_{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0^\perp(\omega)$. Si tel est le cas, le champ de vecteurs $(\eta_\alpha) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) := H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega)$ est déterminé de façon unique, et l'application

$$(\hat{\eta}_\alpha) : \boldsymbol{c} = (c_{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0^\perp(\omega) \to (\hat{\eta}_\alpha(\boldsymbol{c})) := (\eta_\alpha) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega)$$

ainsi définie est linéaire et continue. □

6. Conditions de Donati non linéaires sur une surface

Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette Note.

Théorème 6.1. *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ une immersion telle que la courbure de Gauß K de la surface $\boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ satisfasse*

$$\sup_{y \in \overline{\omega}} K(y) < \lambda_1,$$

où $\lambda_1 > 0$ est la constante du Lemme 3.2. Les espaces $\mathbb{M}_0(\omega)$, $\mathbb{M}_0(\omega)^\perp$, et $\mathbb{N}_0(\omega)$ sont définis aux Lemmes 5.1 et 5.2.

Alors, étant donné deux champs de tenseurs $\boldsymbol{r} = (r_{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega)$ *et* $\boldsymbol{c} = (c_{\alpha\beta}) \in \mathbb{L}^2(\omega)$*, il existe un champ de vecteurs* $\eta_i \boldsymbol{a}^i : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ *avec* $\eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$ *et* $\eta_3 \in H_0^2$ *tel que*

$$\eta_{3|\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega$$

$$\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta} = c_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega$$

si, et seulement si les champs $\boldsymbol{r}$ *et* $\boldsymbol{c}$ *vérifient ensemble les conditions de Donati non linéaires sur une surface suivantes :*

$$\int_\omega r_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} \sqrt{a}\,\mathrm{d}y = 0 \text{ pour tout } (m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}_0(\omega),$$

$$\int_\omega \left\{ c_{\alpha\beta} + \left(b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} r_{\alpha\beta} \right) \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) \right\} n^{\alpha\beta} \sqrt{a}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}{}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle n^{\alpha\beta}\nu_\beta, \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r})|_\alpha \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r})\sqrt{a}\rangle_{H^{1/2}(\gamma)} = 0 \text{ pour tout } (n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0(\omega),$$

ou l'application linéaire $\hat{\eta}_3 : \mathbb{M}_0^\perp(\omega) \to H_0^2(\omega)$ *est celle définie au* Lemme 5.1*. Si tel est le cas, les fonctions* $\eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$ *et* $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$ *sont déterminées de façon unique.*

Esquisse de la preuve. Que ces conditions de Donati soient nécessaires résulte des Lemmes 4.3, 5.1, et 5.2.

Pour montrer qu'elles sont suffisantes, on remarque que le Lemme 5.1 implique l'existence et l'unicité d'une fonction $\eta_3 = \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) \in H_0^2(\omega)$ telle que

$$\eta_{3|\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega.$$

Notant ensuite que les fonctions

$$t_{\alpha\beta} := c_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta}$$

appartiennent à l'espace $L^2(\omega)$, on déduit de la formule de Green du Lemme 5.2 que, pour tout champ de tenseurs $(n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0(\omega)$,

$$\int_\omega t_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y = \int_\omega \left\{ c_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta} \right\} n^{\alpha\beta}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_\omega \left\{ c_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}\hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2} r_{\alpha\beta}\hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) \right\} n^{\alpha\beta}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}{}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle n^{\alpha\beta}\nu_\beta, \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r})|_\alpha \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r})\sqrt{a}\rangle_{H^{1/2}(\gamma)} = 0.$$

Il suffit ensuite d'appliquer le Lemme 5.2. □

7. Une approche intrinsèque du modèle de coque « peu profonde » non linéairement élastique

Grâce aux conditions de Donati non linéaires sur une surface établies au Théorème 6.1, les tenseurs linéarisés de changement de courbure et non linéaire des déformations apparaissant dans le modèle de coque décrit à la Section 2 peuvent être maintenant considérés comme de nouvelles inconnues. Comme on pouvait s'y attendre, celles-ci minimisent une *nouvelle fonctionnelle*, notée $\mathcal{J}$ dans le théorème qui suit, sur un *sous-ensemble*, qui *n'est pas* un sous-espace, *du produit* $\mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega)$, noté $\mathbb{U}(\omega)$ dans le théorème qui suit. Ce problème de minimisation constitue l'*approche intrinsèque* du modèle de coque considéré dans cette Note, la fonctionnelle $\mathcal{J}$ s'appelle l'*énergie intrinsèque*, et l'ensemble $\mathbb{U}(\omega)$ l'ensemble des *champs de tenseurs admissibles*.

Théorème 7.1. *Soit* ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *de frontière de classe* $\mathcal{C}^{1,1}$ *et soit* $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega}; \mathbb{E}^3)$ *une immersion telle que la courbure de Gauß* K *de la surface* $\boldsymbol{\theta}(\overline{\omega}$ *satisfait*

$$\sup_{y\in\overline{\omega}} K(y) < \lambda_1,$$

où $\lambda_1 > 0$ *est la constante du* Lemme 3.2*. Les espaces* $\mathbb{M}_0(\omega)$*,* $\mathbb{M}_0(\omega)^\perp$*, et* $\mathbb{N}_0(\omega)$ *sont définis aux* Lemmes 5.1 *et* 5.2*. On définit l'ensemble*

$$\mathbb{U}(\omega) := \{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) = ((r_{\alpha\beta}), (c_{\alpha\beta})) \in \mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega);$$
$$\int_\omega r_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y = 0 \text{ pour tout } (m^{\alpha\beta}) \in \mathbb{M}_0(\omega),$$
$$\int_\omega \Big\{ c_{\alpha\beta} + \Big(b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} r_{\alpha\beta} \Big) \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) \Big\} n^{\alpha\beta} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y$$
$$- \frac{1}{2}\, {}_{H^{-1/2}(\gamma)}\langle n^{\alpha\beta} \nu_\beta, \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r})|_\alpha \hat{\eta}_3(\boldsymbol{r}) \sqrt{a} \rangle_{H^{1/2}(\gamma)} = 0 \text{ pour tout } (n^{\alpha\beta}) \in \mathbb{N}_0(\omega) \Big\}.$$

Alors, étant donné un élément $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) = ((r_{\alpha\beta}, (c_{\alpha\beta})) \in \mathbb{U}(\omega)$*, il existe d'après le* Théorème 6.1 *un et un seul élément*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) := ((\eta_\alpha, \eta_3)) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$$

tel que

$$\eta_{3|\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega$$
$$\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta} = c_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega,$$

et l'application $\boldsymbol{F} : \mathbb{U}(\omega) \to \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ *ainsi définie est une bijection.*

Étant donné deux constantes de Lamé $\lambda \geq 0$ *et* $\mu > 0$ *et des fonctions* $p^i \in L^2(\omega)$*, on définit la fonctionnelle* $\mathcal{J} : \mathbb{U}(\omega) \to \mathbb{R}$ *par*

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) := \frac{1}{2} \int_\omega \Big\{ \frac{\varepsilon^3}{3} a^{\alpha\beta\sigma\tau} r_{\sigma\tau} r_{\alpha\beta} + \varepsilon a^{\alpha\beta\sigma\tau} c_{\sigma\tau} c_{\alpha\beta} \Big\} \sqrt{a}\, \mathrm{d}y - \ell(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}))$$

pour tout $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) = ((r_{\alpha\beta}, (c_{\alpha\beta})) \in \mathbb{U}(\omega)$*, où*

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}),$$
$$\ell(\boldsymbol{\eta}) := \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a}\, \mathrm{d}y \text{ pour chaque } \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) = ((\eta_\alpha), \eta_3) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega).$$

Alors, si les normes $\|p^\alpha\|_{L^2(\omega)}$ *sont suffisamment petites, le problème de minimisation : trouver* $(\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{c}^*) \in \mathbb{U}(\omega)$ *tel que*

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{c}) = \inf_{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{U}(\omega)} \mathcal{J}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})$$

a au moins une solution.

Esquisse de la preuve. Celle-ci comporte essentiellement cinq étapes. Dans ce qui suit, la convergence faible est notée $\rightharpoonup$.

(i) Ainsi que l'a montré le second auteur [2], il existe, *sous les hypothèses du* Théorème 7.1, une constante C telle que l'*inégalité de Korn non linéaire sur une surface* suivante soit satisfaite :

$$\|\eta_3\|_{H^2(\omega)} + \sum_\alpha \|\eta_\alpha\|_{H^1(\omega)}$$
$$\leq C \Big(\sum_{\alpha,\beta} \|\eta_{3|\alpha\beta}\|_{L^2(\omega)} + \sum_{\alpha,\beta} \|\eta_{3|\alpha\beta}\|^2_{L^2(\omega)} + \sum_{\alpha,\beta} \|\frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_{3|\alpha}\eta_{3|\beta}\|_{L^2(\omega)} \Big)$$

pour tout champ de vecteurs $\eta_i \boldsymbol{a}^i : \overline{\omega} \to \mathbb{E}^3$ tels que $\eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$ et $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$ (la preuve de cette inégalité repose sur plusieurs inégalités triangulaires et sur la compacité de l'injection canonique de $H^1(\omega)$ dans $L^4(\omega)$).

(ii) *L'ensemble* $\mathbb{U}(\omega)$ *est séquentiellement faiblement fermé dans* $\mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega)$. Soit $((\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{c}^k))_{k=1}^\infty$ une suite d'éléments de $\mathbb{U}(\omega)$ et $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega)$ tels que

$$(\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{c}^k) = ((r^k_{\alpha\beta}, (c^k_{\alpha\beta})) \rightharpoonup (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) = ((r_{\alpha\beta}), (c_{\alpha\beta})) \text{ dans } \mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega) \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Cette suite étant bornée, l'inégalité de Korn non linéaire de l'étape (i) montre que la suite $(\boldsymbol{\eta}^k)_{k=1}^\infty$, où

$$\boldsymbol{\eta}^k = (\eta_i^k) := \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{c}^k),\ k \geq 1,$$

est bornée dans $\boldsymbol{H}^1(\omega) \times H^2(\omega)$. Il existe donc une suite extraite $(\boldsymbol{\eta}^\ell)_{\ell=1}^\infty$ et un élément $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ tels que

$$\boldsymbol{\eta}^{\ell} \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \text{ dans } \boldsymbol{H}^1(\omega) \times H^2(\omega) \text{ et } \boldsymbol{\eta}^{\ell} \to \boldsymbol{\eta} \text{ dans } \boldsymbol{L}^2(\omega) \times H^1(\omega) \text{ lorsque } \ell \to \infty.$$

Des calculs simples et l'unicité d'une limite faible montrent alors que

$$r_{\alpha\beta} = \eta_{3|\alpha\beta}$$
$$c_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta_{\beta|\alpha} + \eta_{\alpha|\beta}) - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3\partial_\beta\eta_3.$$

On a donc trouvé un élément $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ tel que

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}),$$

ce qui veut dire que $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{U}(\omega)$, ce qui établit la propriété annoncée.

De plus, l'unicité de la limite faible montre que la suite entière $(\boldsymbol{\eta}^k)_{k=1}^{\infty}$ converge fortement vers $\boldsymbol{\eta}$ dans $\boldsymbol{L}^2(\omega) \times H^1(\omega)$.

(iii) *La fonctionnelle $\mathcal{J} : \mathbb{U}(\omega) \to \mathbb{R}$ est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement.* La fonctionnelle

$$\mathcal{J}_0 : (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{L}^2(\omega) \times \mathbb{L}^2(\omega) \to \frac{1}{2}\int_\omega \left\{\frac{\varepsilon^3}{3} a^{\alpha\beta\sigma\tau} r_{\sigma\tau} r_{\alpha\beta} + \varepsilon a^{\alpha\beta\sigma\tau} c_{\sigma\tau} c_{\alpha\beta}\right\}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y$$

est convexe et continue, donc faiblement semi-continue inférieurement.

Soit $((\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{c}^k))_{k=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\mathbb{U}(\omega)$ et $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{U}(\omega)$ tels que

$$(\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{c}^k) \rightharpoonup (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \text{ dans } \mathbb{U}(\omega) \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Alors on voit facilement, grâce à la dernière observation faite à l'étape (ii), que

$$\ell(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{r}_k)) = \ell(\boldsymbol{\eta}_k) \to \ell(\boldsymbol{\eta}) = \ell(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r})) \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Comme par ailleurs

$$\mathcal{J}_0(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{J}_0(\boldsymbol{c}^k, \boldsymbol{r}^k)$$

la propiété est établie.

(iv) *La fonctionnelle $\mathcal{J} : \mathbb{U}(\omega) \to \mathbb{R}$ est coercive si les normes $\|p^\alpha\|_{L^2(\omega)}$ sont suffisamment petites.* Étant donné un élément quelconque $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{U}$, soit $\boldsymbol{\eta} = ((\eta_\alpha), \eta_3) := \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{H}_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$. Alors il existe des constantes $C_i > 0$, $1 \leq i \leq 3$, indépendantes de $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})$, telles que

$$|\ell(\boldsymbol{\eta})| \leq \|p^3\|_{L^2(\omega)} \|\eta_3\|_{L^2(\omega)} + \|p^\alpha\|_{L^2(\omega)} \|\eta_\alpha\|_{L^2(\omega)},$$

où

$$\|\eta_3\|_{L^2(\omega)} \leq \|\eta_3\|_{H^2(\omega)} \leq C_1 \|\boldsymbol{r}\|_{\mathbb{L}^2(\omega)}$$

d'après le Lemme 3.1, et

$$\|\eta_\alpha\|_{L^2(\omega)} \leq C_2 \left(\|\boldsymbol{r}\|_{\mathbb{L}^2(\omega)} + \|\boldsymbol{r}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega)} + \|\boldsymbol{c}\|_{\mathbb{L}^2(\omega)}\right)$$

d'après l'inégalité de Korn non linéaire de l'étape (i). Par suite,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}) &\geq C_3 \left(\|\boldsymbol{r}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega)} + \|\boldsymbol{c}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega)}\right) - |\ell(\boldsymbol{\eta})| \\ &\geq (C_3 - C_2 M)\|\boldsymbol{r}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega)} + C_3\|\boldsymbol{c}\|^2_{\mathbb{L}^2(\omega)} - \left(C_1\|p^3\|_{L^2(\omega)} + C_2 M\right)\|\boldsymbol{r}\|_{\mathbb{L}^2(\omega)} - C_2 M \|\boldsymbol{c}\|_{\mathbb{L}^2(\omega)}\end{aligned}$$

où $M := \max_\alpha \|p^\alpha\|_{L^2(\omega)}$. La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est donc coercive sur l'ensemble $\mathbb{U}(\omega)$ si $M < C_3/C_2$.

(v) L'existence d'un minimiseur de $\mathcal{J}$ sur l'ensemble $\mathbb{U}(\omega)$ découle alors d'un théorème classique du calcul des variations ; cf., e.g., Dacorogna [17]. □

Remerciements

Ce travail a été financé par une bourse du Research Grants Council of the Hong Kong Special Administrative Region, China [Project No. 9041738 – CityU 100612].

Références

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II, Commun. Pure Appl. Math. 17 (1964) 35–92.
[2] O. Alexandescu-Iosifescu, Modèles non linéaires de coques : théorèmes d'existence et de régularité : analyse limite lorsque la coque devient une plaque, Doctoral Dissertation, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1995.
[3] O. Alexandescu-Iosifescu, Existence et régularité de la solution du modèle bidimensionnel non linéaire de coque faiblement courbée de W.T. Koiter, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 321 (1995) 1269–1274.
[4] C. Amrouche, P.G. Ciarlet, L. Gratie, S. Kesavan, On the characterization of matrix fields as linearized strain tensor fields, J. Math. Pures Appl. 86 (2006) 116–132.
[5] M. Bernadou, J.T. Oden, An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems, J. Math. Pures Appl. 60 (1981) 285–308.
[6] W.-Z. Chien, The intrinsic theory of thin shells and plates – part I: general theory, Q. Appl. Math. 1 (1944) 297–327.
[7] W.-Z. Chien, The intrinsic theory of thin shells and plates – part II: application to thin plates, Q. Appl. Math. 2 (1944) 43–59.
[8] W.-Z. Chien, The intrinsic theory of thin shells and plates – part III: application to thin shells, Q. Appl. Math. 2 (1944) 120–135.
[9] P.G. Ciarlet, P. Ciarlet Jr., Another approach to linearized elasticity and a new proof of Korn's inequality, Math. Models Methods Appl. Sci. 15 (2005) 259–271.
[10] P.G. Ciarlet, G. Geymonat, F. Krasucki, Nonlinear Donati compatibility conditions and the intrinsic approach for nonlinearly elastic plates, J. Math. Pures Appl. 103 (2015) 255–268.
[11] P.G. Ciarlet, L. Gratie, C. Mardare, M. Shen, Saint Venant compatibility equations on a surface – application to intrinsic shell theory, Math. Models Methods Appl. Sci. 18 (2008) 165–194.
[12] P.G. Ciarlet, O. Iosifescu, Donati compatibility conditions on a surface – application to shell theory, J. Math. Pures Appl. 102 (2014) 173–202.
[13] P.G. Ciarlet, O. Iosifescu, Nonlinear Donati compatibility conditions on a surface – application to the intrinsic approach for Koiter's model of a nonlinearly elastic shallow shell, Math. Models Methods Appl. Sci. (2017), http ://dx.doi.org/10.1142/S021820251750004X, in press.
[14] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Intrinsic formulation of the displacement–traction problem in linearized elasticity, Math. Models Methods Appl. Sci. 24 (2014) 1197–1216.
[15] P.G. Ciarlet, C. Mardare, X. Shen, Donati compatibility conditions for membrane and flexural shells, Anal. Appl. 13 (2015) 685–705.
[16] P.G. Ciarlet, S. Mardare, Nonlinear Saint-Venant compatibility conditions and the intrinsic approach for nonlinearly elastic plates, Math. Models Methods Appl. Sci. 23 (2013) 2293–2321.
[17] B. Dacorogna, Direct Methods in the Calculus of Variations, second edition, Springer, Berlin, 2010 (first edition: 1989).
[18] L.H. Donnell, Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion, NACA Report TN 479, 1933.
[19] I.N. Figueiredo, Local existence and regularity of the solutions of the nonlinear thin shell model of Donnell–Mushtari–Vlasov, Appl. Anal. 36 (1990) 221–234.
[20] G. Geymonat, F. Krasucki, Some remarks on the compatibility conditions in elasticity, Rend. Accad. Naz. Sci. Detta Accad. XL, Parte I, Mem. Mat. 29 (2005) 175–181.
[21] G. Geymonat, F. Krasucki, Beltrami's solutions of general equilibrium equations in continuum mechanics, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 359–363.
[22] G. Geymonat, P. Suquet, Functional spaces for Norton–Hoff materials, Math. Methods Appl. Sci. 8 (1986) 206–222.
[23] V. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Springer, Berlin, 1986.
[24] W.T. Koiter, On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc. Kin. Ned. Akad. Wetensch. B 69 (1966) 1–54.
[25] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
[26] C.B. Morrey, L. Nirenberg, On the analyticity of the solution of linear elliptic systems of partial differential equations, Commun. Pure Appl. Math. 10 (1957) 271–290.
[27] K.M. Mushtari, K.Z. Galimov, Non-Linear Theory of Thin Elastic Shells, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961, English translation of Nelineinaya Theoriya Uprugikh Obolochek, Tatknigoizdat, 1957.
[28] V.Z. Vlasov, The basic differential equations in the general theory of elastic shells, Prikl. Mat. Meh. 8 (1944) 109–140.