C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 634–638

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Normalité asymptotique locale de processus autorégressifs hilbertiens

Local asymptotic normality of Hilbertian autoregressive processes

Nesrine Kara-Terki, Tahar Mourid

Laboratoire de statistiques et modélisations aléatoires, université Abou-Bekr-Belkaid, Tlemcen, Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 10 juin 2014
Accepté après révision le 11 mars 2016
Disponible sur Internet le 19 avril 2016

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Nous montrons la normalité asymptotique locale (condition LAN) et la normalité asymptotique locale uniforme (condition ULAN) pour une classe de processus autorégressifs hilbertiens où l'opérateur d'autocorrélation dépend d'un paramètre réel inconnu. Nous obtenons une borne minimax de Hajek pour tout estimateur du paramètre, la convergence, la normalité asymptotique et l'efficacité des estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnel et de Bayes.

ABSTRACT

We give a Local Asymptotic Normality (LAN condition) and a Uniform Local Asymptotic Normality (ULAN condition) for a class of Hilbert space valued autoregressive processes when the correlation operator depends upon an unknown one-dimensional parameter. We then derive a Hajek minimax bound, the consistency, the asymptotic normality, and the efficiency of the conditional maximum likelihood and Bayes estimators yielding their optimality.

Abridged English version

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a complete probability space and $(H, \mathcal{H})$ a real separable Hilbert space equipped with the inner product $<.,.>$, the associated norm $\|.\|$, and endowed with its Borel σ-field $\mathcal{H}$. We denote by $\mathcal{L}(H)$ the space of bounded linear operators defined on H into H, and by $\|.\|_{\mathcal{L}}$ the usual norm of bounded linear operators. For the following materials, see Bosq [1] (Chap. 3). A strong H-valued Gaussian white noise $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ on H, defined on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, with zero mean and covariance operator C_ε, is a Gaussian sequence of H-valued i.i.d. rv's. We consider a Hilbert space valued autoregressive process $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ defined on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ with values in $(H, \mathcal{H})$ defined by the following relation

$$X_n = \rho_\theta(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad (1)$$

Adresse e-mail : t_mourid@mail.univ-tlemcen.dz (T. Mourid).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.03.006
1631-073X/

where the correlation operator ρ_θ is a bounded linear operator from H to H, which depends upon an unknown parameter θ and where $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ is a strong H-valued Gaussian white noise. We suppose that $\theta \in \Theta$, where $\Theta =]a, b[$ is an open interval of $\mathbb{R}$. As an example, we may cite the Ornstein–Uhlenbeck process, which admits the representation (1) with operator $\rho_\theta(f)(t) = \mathrm{e}^{-\theta t} f(1)$, $f \in L^2_{[0,1]}$, $\theta > 0$, $t \in [0,1]$ and with an appropriate strong $L^2_{[0,1]}$-Gaussian white noise ε_n (Bosq [1], Ex. 3.4 p. 76).

In this Note, we deal with the Local Asymptotic Normality and Uniform Local Asymptotic Normality conditions for functional autoregressive processes defined by (1) when the correlation operator depends upon an unknown one-dimensional parameter developing this concept in a functional setting. We consider the family of probabilities $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ of the conditional probability law of $(X_1, \ldots, X_n)$ given the initial value X_0: $P_{n,\theta} = P^{X_0}_{X_1,\ldots,X_n}$. Let $Z_{n,\theta}(h) := \mathrm{d}P_{n,\theta_n}/\mathrm{d}P_{n,\theta}$ be the derivative of the absolute continuous part of P_{n,θ_n} with respect to $P_{n,\theta}$, where $\theta_n = \theta + \varphi_n(\theta)h$, $\varphi_n(\theta)$ is a sequence of real numbers, and $h \in \mathbb{R}$. The basic tool in this study is the Local Asymptotic Normality condition of Le Cam (LAN condition) of the family of the conditional likelihood ratio $Z_{n,\theta}(h)$ associated with (1), in the vicinity of θ, which is given by the following definition.

Definition 1. The family of parametric probability measures $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ is said to satisfy the Local Asymptotic Normality condition (LAN condition) at a point θ if there exist a positive sequence $(\varphi_n(\theta))$, $\varphi_n(\theta) \to 0$, a sequence of rv's $(S_n(\theta))$ such that, for all $h \in \mathbb{R}$, the log-likelihood ratio $\ln Z_{n,\theta}(h)$ satisfies the following representation under $P_{n,\theta}$:

$$\ln Z_{n,\theta}(h) = hS_n(\theta) - 1/2h^2 + o_{P_{n,\theta}}(1), \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{2}$$

where we have the weak convergence to a limiting $\mathcal{N}(0,1)$ law

$$S_n(\theta) \Rightarrow_{n\to\infty} \mathcal{N}(0,1).$$

The family of parametric probability measures $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ is said to satisfy the Uniform Local Asymptotic Normality condition (ULAN condition) if we have LAN condition (2) and moreover, for all $M > 0$, under $P_{n,\theta}$:

$$\sup_{|h|\le M} |\ln Z_{n,\theta}(h) - hS_n(\theta) + 1/2h^2| = o_{P_{n,\theta}}(1). \tag{3}$$

The Local Asymptotic Normality condition has been widely adopted in a variety of statistical models. It relies mainly on checking the mean square differentiability, with respect to the parameter, of probability measures $(P_\theta, \theta \in \Theta)$ of a single observation; Le Cam's second Lemma (Le Cam and Yang [5]) is then instrumental to complete the argument. For some reviews, we may cite Roussas [8] for independent non-identically distributed rv's, Philippou and Roussas [7] for metric space valued stationary ergodic Markov process, Swensen [9] and Kreiss [4] in autoregressive time series, and Hwang and Basawa [2] for a $\mathbb{R}^d$-valued stationary Markov non-linear time series.

In this Note, we establish the Local Asymptotic Normality and Uniform Local Asymptotic Normality conditions for a Hilbert space valued autoregressive process (1) following [2] and [8] with the same scale $1/\sqrt{n}$. Then, using general results by Ibragimov and Hasminski [3], we derive Hajek's convolution theorem for regular estimators and asymptotic properties of the conditional maximum likelihood and Bayes estimators and set their optimality.

Let $\{e_k, k \ge 1\}$ be a complete orthonormal system in H of eigenvectors of the covariance operator C_ε of the rv's ε_0 and $\{\sigma_k^2, k \ge 1\}$ the corresponding eigenvalues, with $\sigma_k^2 > 0$. We denote by $a_k(x) := < x, e_k >$ the Fourier coefficient of $x \in H$ with respect to e_k. Throughout, the differentiability is with respect to θ and if $g(\theta)$ is a differentiable function whose derivative we denote by $\dot{g}(\theta)$.

The following theorems give the LAN and ULAN conditions of the family measures $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ of (1).

Theorem 1. *Under some conditions stated below, the family of probability measures $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ of (1) satisfies the LAN condition (2) at each point $\theta \in \Theta$ where $\varphi_n(\theta) = 1/\sqrt{n\Gamma(\theta)}$,*

$$S_n(\theta) = \varphi_n(\theta) \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2} \ \dot{a}_k(\rho_\theta X_{i-1})[a_k(X_i) - a_k(\rho_\theta X_{i-1})]$$

and

$$\Gamma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2} \ \mathrm{E}_\theta[\dot{a}_k(\rho_\theta X_1)]^2.$$

Theorem 2. *Under some conditions stated below, the family of probability measures $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ of (1) satisfies the ULAN condition (3), where $S_n(\theta)$ and $\Gamma(\theta)$ are defined in Theorem 1. Moreover, for any bounded continuous loss function l such that the sets $\{l(x) \le a\}$, $a > 0$ are convex and symmetric and for all estimator $\tilde{\theta}_n$, we have Hajek minimax bound*

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathrm{E}_\theta[l(\sqrt{n\Gamma(\theta_0)}(\tilde{\theta}_n-\theta))] \geq \mathrm{E}l(\zeta),$$

where $\zeta \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

The conditional maximum likelihood estimator (MLE) defined by $\hat{\theta}_n := \arg\max_{\theta\in\Theta} \ln \frac{\mathrm{d}P_{n,\theta}}{\mathrm{d}P_{n,\theta_0}}$, where $\theta_0 \in \Theta$, and Bayes estimators possess the properties listed in Theorem 3 below.

1. Notations et définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et H un espace de Hilbert séparable réel muni du produit scalaire $<.,.>$ et de sa norme $\|\,.\,\|$. Nous considérons un processus autorégressif hilbertien (ARH) $(X_n, n\in\mathbb{Z})$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans H vérifiant la relation suivante :

$$X_n = \rho_\theta(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \tag{4}$$

où l'opérateur de corrélation ρ_θ est linéaire borné de H vers H, dépendant d'un paramètre inconnu $\theta\in\Theta$ et où l'espace des paramètres Θ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. La suite $(\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z})$ forme un H-bruit blanc fort gaussien centré et d'opérateur de covariance C_ε (voir Bosq [1], Chap. 3). La condition de la normalité asymptotique locale (condition LAN) est une notion très utile en statistique paramétrique depuis les travaux de Le Cam et de Hajek [3,5]. Soit $(X_1,\dots X_n)$ un vecteur d'observation de (4) et $P_{n,\theta}$ sa loi de probabilité conditionnelle à X_0. Le log-rapport de vraisemblance conditionnel à X_0 est défini par

$$\Lambda_n := \ln\frac{\mathrm{d}P_{n,\theta_n}}{\mathrm{d}P_{n,\theta}} = \ln Z_{n,\theta}(h),$$

où $\theta_n = \theta + \varphi_n(\theta)h$ et $\varphi_n = \varphi_n(\theta)$ est une suite de réels telle que $\varphi_n \to 0$ et $h\in\mathbb{R}$. La famille des lois $\{P_{n,\theta}, \theta\in\Theta\}$ vérifie la condition de la normalité asymptotique locale (respectivement la condition de la normalité asymptotique locale uniforme (condition ULAN)) au point θ si Λ_n admet la représentation (2) (respectivement la représentation (3)). La condition LAN permet d'établir des bornes optimales pour les risques en statistique paramétrique [3,5]. Nous notons que G.G. Roussas établit dans [8] la condition LAN pour les processus de Markov stationnaires et A.R. Swensen [9] et J.-P. Kreiss [4] montrent la condition LAN pour des processus autorégressifs réels. Dans [2], S.Y. Hwang et I.V. Basawa donnent la condition LAN pour les processus non linéaires markoviens. Dans cette Note, nous montrons les conditions LAN et ULAN du processus autorégressif fonctionnel défini par (4) en suivant [8] et [2], puis nous en déduisons les propriétés asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnel et de Bayes.

2. Résultats

Soit $\{e_i, i\geq 1\}$ la suite des vecteurs propres de l'opérateur de covariance C_ε de ε_0 et $\{\sigma_k^2, k\geq 1\}$ les valeurs propres associées où $\sigma_k^2>0$. On note $a_k(x) =< x, e_k >$ le coefficient de Fourier de x par rapport à e_k, et $\dot{g}(\theta)$ désigne la dérivée par rapport à θ de $g(\theta)$.

Nous considérons les hypothèses suivantes :

H0. $\exists c>0$, $\sup_{\theta\in\Theta}\|\rho_\theta\|_{\mathcal{L}} < c < 1$.
H1. $\forall\theta\in\Theta$ et $\forall x\in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2(\rho_\theta x)}{\sigma_k^2} < \infty.$$

H2. Pour tout $k\geq 1$ et $i\geq 1$, les coefficients de Fourier $a_k(\rho_\theta X_i)$ sont dérivables sur Θ et

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(a_k^2(\rho_\theta X_{i-1}) - 2a_k(X_i)a_k(\rho_\theta X_{i-1})) < \infty$$

et continue sur Θ P_θ–p.s..
H3. Pour tout $\theta\in\Theta$,

$$E_\theta(\sup_{u\in\Theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\dot{a}_k^2(\rho_u X_1)}{\sigma_k^2}) < \infty.$$

Le théorème suivant donne la condition LAN de la famille $(P_{n,\theta})$ associée au processus ARH vérifiant (4).

Théorème 1. *Sous **H0**...**H3** la famille des lois de probabilités $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ de (4) vérifie la condition LAN (2) en tout point $\theta \in \Theta$ avec $\varphi_n = 1/\sqrt{n\Gamma(\theta)}$ et*

$$S_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n\Gamma(\theta)}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} \dot{a}_k(\rho_\theta X_{i-1})[a_k(X_i) - a_k(\rho_\theta X_{i-1})].$$

$$\Gamma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} E_\theta[\dot{a}_k(\rho_\theta X_1)]^2.$$

Pour établir la condition ULAN (3), on introduit les hypothèses suivantes.

H4. Pour tout $k \geq 1$, les coefficients de Fourier $a_k(\rho_\theta X_1)$ sont trois fois dérivables sur Θ et $\forall u \in \Theta$:

- **a.** $\sup_{\theta \in \Theta} E_u \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[\dot{a}_k^2(\rho_\theta(X_1))]}{\sigma_k^2} < \infty$.
- **b.** $\sup_{\theta \in \Theta} E_u \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} [\frac{\mathrm{d}^2 a_k(\rho_\theta(X_1))}{\mathrm{d}\theta^2}]^2 < \infty$.
- **c.** $\sup_{\theta \in \Theta} E_u \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} [\frac{\mathrm{d}^3 a_k(\rho_\theta(X_1))}{\mathrm{d}\theta^3}]^2 < \infty$.

H5. $\forall x \in H$ et pour tout $k \geq 1$, les coefficients de Fourier $a_k(\rho_\theta(x))$ sont dérivables sur Θ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} < \rho_\theta x, e_k > = < \dot{\rho}_\theta x, e_k > = < x, \dot{\rho}_\theta^* e_k >,$$

où $\dot{\rho}_\theta$ est défini par $\dot{\rho}_\theta x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \rho_\theta x$ et son adjoint $\dot{\rho}_\theta^*$ sont des opérateurs linéaires bornés.

H6.

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\dot{\rho}_\theta^* e_k\|^2}{\sigma_k^2} < \infty.$$

Le théorème suivant donne la condition ULAN de la famille $(P_{n,\theta})$ associée au processus ARH vérifiant (4).

Théorème 2. *Sous **H0**...**H6** la famille des lois de probabilités $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ de (4) vérifie la condition ULAN (3) où $S_n(\theta)$ et $\Gamma(\theta)$ sont définis dans le Théorème 1. De plus, pour toute fonction de perte continue bornée l telle que $\{l(x) \leq a\}$, $a > 0$ soit convexe et symétrique et pour tout estimateur $\tilde{\theta}_n$, nous avons la borne minimax de Hajek*

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{n \to \infty} \sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} E_\theta[l(\sqrt{n\Gamma(\theta_0)}(\tilde{\theta}_n - \theta))] \geq El(\zeta),$$

où $\zeta \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Un estimateur est dit efficace au sens de Hajek si la borne minimax de Hajek est atteinte.
- L'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnel $\hat{\theta}_n$ (EMV) est défini par :

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in \Theta} \ln \frac{\mathrm{d}P_{n,\theta}}{\mathrm{d}P_{n,\theta_0}},$$

où $\theta_0 \in \Theta$.

On considère les hypothèses suivantes :

H7. $\forall \theta \in \Theta$, ρ_θ est un opérateur de Hilbert–Schmidt symétrique qui commute avec C_ε.

H8. Les valeurs propres $(\lambda_{k,\theta}, k \geq 1)$ de ρ_θ sont telles que : les fonctions $\theta \to \lambda_{k,\theta}$ sont de classe C^1, $\exists k_0 \geq 1 / \dot{\lambda}_{k_0} = \inf_{\theta \in \Theta} |\dot{\lambda}_{k,\theta}| > 0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \dot{\lambda}_k^2 < \infty$.

Le théorème suivant résume les propriétés de l'EMV conditionnel $\hat{\theta}_n$.

Théorème 3. *Sous **H0**...**H8** l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnel $\hat{\theta}_n$ vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout intervalle compact $K \subset \Theta$ et $\delta > 0$ nous avons*

$$\sup_{\theta \in K} P_{n,\theta}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta) \to_{n \to \infty} 0.$$

2. *Sous* $P_{n,\theta}$

$$\sqrt{n\Gamma(\theta)}(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow_{n\to\infty} \zeta,$$

où $\zeta \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *et la convergence est uniforme sur tout intervalle compact* $K \subset \Theta$.

3. *L'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnel* $\hat{\theta}_n$ *est efficace au sens de Hajek.*
4. *Les propriétés précédentes restent vraies pour les estimateurs de Bayes associés à des fonctions de pertes quadratiques.*

Remarque. La condition **H0** assure l'existence d'une solution strictement stationnaire de (4) ([1], Th. 3.1 p. 74) et (X_n) est un processus de Markov homogène et ergodique de noyau de transition $Q_\theta(x, \mathrm{d}y) := P(X_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = x) = P_{\varepsilon_1 + \rho_\theta(x)}(\mathrm{d}y)$ [6]. La condition **H1** assure l'équivalence des lois gaussiennes par un théorème de Shizuo Kakutani. Le reste des conditions assurent la différentiabilité en moyenne quadratique, la finitude des moments et des séries et permettent d'intervertir les signes somme et intégrale. Les résultats précédents sur les conditions LAN et ULAN s'étendent à un paramètre $\theta \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, sous des hypothèses adéquates.

3. Exemples

Nous donnons deux exemples de processus (4) vérifiant les conditions du paragraphe 2.

1. Soit $(e_k(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi kt),\ 0 \leq t \leq 1, k \geq 1)$ un système orthonormal de $L^2_{[0,1]}$ et H un sous-espace de $L^2_{[0,1]}$ défini par : $H = \{x \in L^2_{[0,1]} / x = \sum_{k=1}^{+\infty} < x, e_k > e_k\}$. H est un espace de Hilbert séparable. On définit un opérateur ρ_θ par : $\forall x \in H$

$$\rho_\theta x(t) = \int_0^1 K_\theta(t-s)x(s)\mathrm{d}s,$$

où $K_\theta(u) = ce^{-\theta u}$, $c = (1 + \frac{\exp(2b)}{4a^2})^{-1/2}$ et $\theta \in \Theta =]a, b[$, $0 < a < b < \infty$.

On définit un deuxième opérateur ρ^0_θ par $\forall x \in H$, $\rho^0_\theta x = \sum_{k=1}^{\infty} < \rho_\theta x, e_k > e_k$ et un processus $(X_n, n \geq 0)$ vérifiant (4) avec l'opérateur ρ^0_θ et $\{\varepsilon_n\}$ un H-bruit blanc fort gaussien d'opérateur de covariance C_ε, de vecteurs propres $(e_k(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi kt), 0 \leq t \leq 1, k \geq 1)$ et de valeurs propres $(\frac{1}{k^2}, k \geq 1)$. Alors, le processus $(X_n, n \geq 0)$ vérifie les conditions **H0**...**H6** et la famille $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ associée vérifie la condition ULAN (3).

2. Soit H un espace de Hilbert séparable réel et $(X_n, n \in \mathbb{N})$ un processus ARH défini par (4) où ρ_θ est un opérateur de Hilbert–Schmidt défini sur H par sa décomposition spectrale : $\rho_\theta x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\theta,k} < x, e_k > e_k$, $\theta \in \Theta$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})$ un H-bruit blanc fort gaussien d'opérateur de covariance C_ε d'éléments propres $(\mu_k, e_k, k \geq 1)$, $\mu_k > 0$. Supposons que :

1. $\exists c > 0$ / $\sup_{\theta\in\Theta} \sup_k |\lambda_{\theta,k}| \leq c < 1$ et $\forall k$, $\theta \to \lambda_{\theta,k}$ est de classe C^3.
2. $\exists k_0$, $|\dot{\lambda}_{k_0}| = \inf_{\theta\in\Theta} |\dot{\lambda}_{\theta,k_0}| > 0$.
3. $\exists c_i > 0$, $i = 0, .., 3$ tels que

$$\sup_{k\geq 1} \sup_{\theta\in\Theta} \frac{|\lambda_{\theta,k}|^2}{\mu_k} \leq c_0 \quad ; \quad \sup_{k\geq 1} \sup_{\theta\in\Theta} \frac{|\frac{d^i}{d\theta^i}\lambda_{\theta,k}|}{\mu_k} \leq c_i, \text{ pour } i = 1, .., 3.$$

Alors le processus $(X_n, n \geq 0)$ vérifie les conditions **H0**...**H8**, la famille $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$ associée satisfait la condition ULAN (3) et les estimateurs EMV conditionnel et Bayes sont convergents, asymptotiquement gaussiens et efficaces. Les valeurs propres : $\lambda_{\theta,k} = (\sin\theta)/(1 + k^2)$, $\theta \in]0, \pi/2 - \alpha[$, $\alpha > 0$ et $\mu_k = 1/k^2$ satisfont les conditions ci dessus.

Remerciements

Nous remercions le rédacteur en chef, le rédacteur associé et les referees pour leurs remarques très constructives, qui ont permis d'améliorer la Note.

Références

[1] D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces, Springer, New York, 2000.
[2] S.Y. Hwang, I.V. Basawa, Asymptotic optimal inference for a class of nonlinear time series models, Stoch. Process. Appl. 46 (1993) 91–113.
[3] I.A. Ibragimov, R.Z. Hasminski, Statistical Estimation. Asymptotic Theory, Springer, New York, 1981.
[4] J.-P. Kreiss, Local asymptotic normality for autoregression with infinite order, J. Stat. Plan. Inference 26 (1990) 185–219.
[5] L. LeCam, G.L. Yang, Asymptotics in Statistics, 2nd edition, Springer, 2000.
[6] T. Mourid, Contribution à la statistique des processus autorégressifs à temps continu, thèse de doctorat ès sciences, université Paris-6, 1995.
[7] A.N. Philippou, G.G. Roussas, Asymptotic distribution of the likelihood function in the independent not identically distributed case, Ann. Stat. 1 (1973) 454–471.
[8] G.G. Roussas, Asymptotic distribution of the log-likelihood function for stochastic processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 47 (1979) 31–46.
[9] A.R. Swensen, The asymptotic distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend, J. Multivar. Anal. 16 (1985) 54–70.