C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 97–100

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Sur les déformations des feuilletages de Lie nilpotents

On the deformations of nilpotent Lie foliations

Hamidou Dathe

Département de mathématiques et informatique, faculté des sciences et techniques, université Cheikh-Anta-Diop, Dakar, Sénégal

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 27 février 2013
Accepté après révision le 19 octobre 2015
Disponible sur Internet le 8 décembre 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

On construit des feuilletages de Lie nilpotents sur une variété compacte qui n'admettent pas de déformation résoluble non nilpotente.

ABSTRACT

We construct on a compact manifold a nilpotent (non-Abelian) Lie foliation of any codimension that cannot be deformed into a non-nilpotent solvable one.

Abridged English version

Let $\mathcal{F}$ be a G-Lie foliation of codimension q on a compact manifold V. Denote $\omega = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^q)$ the vector valued 1-form in the Lie algebra $\mathcal{G}$ of G that defines $\mathcal{F}$. One has the following equation:

$$\mathrm{d}\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

where C^i_{jk} are structure constants of $\mathcal{G}$. We can deform $\mathcal{F}$ in two ways. The first is a deformation with fixed transverse group G; such deformations have been studied by Tischler (see [8]) who proved that if $\mathrm{G} = \mathbb{R}^q$ the foliation $\mathcal{F}$ can be deformed into a fibration over $\mathbb{T}^q$. In [6], D. Lehmann gives an example of a Lie foliation whose transverse group is the three-dimensional Heisenberg group N that cannot be deformed into a fibration. With J.-F. Quint, we generalize in [3] the Lehmann construction for all nilpotent and non-Abelian Lie groups and we construct a versal family of deformations for such foliations.

In the second kind of deformation of $\mathcal{F}$, both the foliation and the model Lie group G are allowed to change. These deformations were introduced by É. Ghys in [4] and studied more extensively in [5]. More precisely, a deformation of $\mathcal{F}$ is given by a collection of 1-forms $(\omega^1_t, \dots, \omega^q_t)$ linearly independent and varying smoothly with $t \in \mathbb{R}$ and a set of smooth functions $C^k_{ij}(t)$ such that:

$$\mathrm{d}\omega^i_t = -\frac{1}{2} C^i_{jk}(t) \omega^j_t \wedge \omega^k_t.$$

Adresse e-mail : hdathe@ucad.sn.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.10.009
1631-073X/

The functions $C_{ij}^k(t)$ define a family of Lie algebras $\mathcal{G}_t$ of same dimension and $\omega_0 = \omega$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$.

For any simply connected and nilpotent group G contained in a lattice Γ, we can obtain a foliation as follows (see [3] for details): let $\mathbf{G}$ be the $\mathbb{Q}$ algebraic unipotent group whose real extension is G. Take $\lambda > 0$ an integer without square factor and σ the unique non-trivial inner automorphism of $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$. Denote by Δ the set of $(g, \sigma(g))$ contained in $\mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]) \times \mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Let ρ be a $\mathbb{Q}$-faithful representation of $\mathbf{G}$ in a $\mathbb{Q}$-vector space E. Choose a base b of E and let Γ be the set of $(g, \sigma(g))$ contained in Δ such that the coefficients of $\sigma(g)$ in b are in $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. By a theorem of Borel–Harish-Chandra (see [1]), Γ is a co-compact lattice of $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$. If $\mathbf{H}$ is the $\mathbb{Q}$-unipotent group whose group of real points is H, associated with the choice of the lattice Γ in H. We have $\mathbf{H}(\mathbb{Q}) = \Delta$. Then no nontrivial subgroup of $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \times \{e\}$ and $\mathrm{G}_2 = \{e\} \times \mathrm{G}$ is defined over $\mathbb{Q}$ for the $\mathbb{Q}$-structure $\mathbf{H}$. The foliation $\mathcal{F}$ by G_2-orbits of H/Γ is a G-Lie foliation whose holonomy group is the natural injection of Γ into G. When G is of dimension three, that is $\mathrm{G} = \mathrm{N}$, $\mathcal{F}$ is the Lehmann foliation $\mathcal{L}$ constructed in [6]. In [3] we prove that $\mathcal{L}$ can be obtained as a deformation of an $\mathbb{R}^3$-Lie foliation and in [2] we prove that the foliation $\mathcal{L}$ cannot be deformed into a solvable and non-nilpotent one. In this note, we prove that under some hypothesis on the one-parameter group μ, we have the following more general result.

Theorem. *The foliation $\mathcal{F}$ cannot be deformed into a Lie solvable G'-foliation where $\mathrm{G}' = \mathbb{R} \times_\mu \mathbb{R}^{n-1}$.*

1. Introduction

Soit V une variété compacte connexe et G un groupe de Lie (simplement connexe). Un G-feuilletage de Lie de V est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de couples (U, f), où U est un ouvert de V et $f : U \longrightarrow \mathrm{G}$ une submersion, ayant les propriétés suivantes : (i) les ouverts U recouvrent V ; (ii) pour tous (U, f) et (W, h) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G tel que, pour tout $x \in U \cap W$, on ait $f(x) = h(x)g$. En particulier, les surfaces de niveaux des submersions f, pour (U, f) dans $\mathcal{F}$, se recollent pour former un feuilletage de V. Pour éviter les ambiguïtés, on supposera en outre que $\mathcal{F}$ est maximal au sens suivant : si U est un ouvert de V et $f : U \longrightarrow \mathrm{G}$ une submersion, si, pour tout (W, h) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G avec $f = h.g$ sur $U \cap W$, on a $(U, f) \in \mathcal{F}$.

Soit $\tilde{V}$ le revêtement universel de V, $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé d'un G-feuilletage $\mathcal{F}$ et $\tilde{\omega}$ la 1-forme associée. Fixons un point x_0 de V et un relevé $\tilde{x}_0$ de x_0, et notons Γ le groupe fondamental de V en x_0, qui agit naturellement sur $\tilde{V}$. Il existe alors une submersion $D : \tilde{V} \longrightarrow \mathrm{G}$ avec $D(x_0) = e$ et un morphisme $h : \Gamma \longrightarrow \mathrm{G}$ tels que $\tilde{\omega} = \mathrm{d}D$ et que, pour tout x dans $\tilde{V}$ et pour tout γ dans Γ, on ait $D(\gamma x) = D(x)h(\gamma)^{-1}$. Les autres couples (D', h') associés aux autres choix de points bases sont de la forme $x \longrightarrow (D(x)g, g^{-1}h(x)g)$, où g est un élément de G ; on dit que D est la développante de $\mathcal{F}$ et h son morphisme d'holonomie. Réciproquement, la donnée d'un couple (D, h) où D est une submersion de $\tilde{V}$ dans G et h un morphisme de Γ dans G ayant les propriétés ci-dessus définit bien un G-feuilletage de Lie de V.

Ces notions et ces résultats sont dus principalement à E. Fedida. Le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de P. Molino [7, 4.2].

Dans [6], D. Lehmann a construit un exemple de feuilletage de Lie sur une variété compacte V dont le groupe transverse est le groupe de Heisenberg N de dimension 3 et qui n'est approchable par aucun N-feuilletage de Lie sur V à holonomie discrète. Dans [2], nous avons étudié des déformations de ce feuilletage dans lesquelles le groupe transverse varie, et nous avons montré que de telles déformations restent nilpotentes.

Ces déformations sont aussi considérées par É. Ghys dans [4] et étudiées plus en détails dans [5].

Dans ce travail, on montre plus généralement qu'en codimension quelconque, $\mathcal{F}$ n'admet pas de déformation résoluble non nilpotente dont le groupe transverse est un groupe de Lie résoluble simplement connexe de dimension n isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{R} \times_\mu \mathbb{R}^{n-1}$, où μ est un sous-groupe à un paramètre satisfaisant quelques hypothèses.

2. Déformations

Définition 2.1. Soit $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie de codimension q sur une variété compacte V de dimension n. On note $\omega = (\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^q)$ la 1-forme vectorielle à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe de Lie G qui définit $\mathcal{F}$. On a :

$$\mathrm{d}\omega^i = \frac{-1}{2} C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$$

où C_{jk}^i sont les constantes de structure de $\mathcal{G}$. Soit, pour $t \geqslant 0$, $\omega_t = (\omega_t^1, \omega_t^2, \ldots, \omega_t^q)$ une collection de 1-formes réelles linéairement indépendantes vérifiant :

$$\mathrm{d}\omega_t^i = \frac{-1}{2} C_{jk}^i(t) \omega_t^j \wedge \omega_t^k$$

où les $C_{jk}^i(t)$ sont des fonctions de classe C^∞ de t qui représentent les constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ telle que $\omega_0 = \omega$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ et pour tout $t > 0$, $\dim \mathcal{G}_t = \dim \mathcal{G}$. La 1-forme vectorielle ω_t définit alors une famille $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{G}_t$-feuilletages de Lie telle que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ qu'on appelle une déformation de $\mathcal{F}$.

Dans toute la suite, N désigne le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices carrées unipotentes triangulaires supérieures. Dans [5], A.E. Kacimi, O. Guasp et M. Nicolau ont donné un exemple de flot abélien qui se déforme en un N-flot. Dans [3], nous avons construit un exemple de feuilletage de Lie abélien de dimension 3, qui se déforme en un N-feuilletage de Lie, et la déformation obtenue est précisément le feuilletage de D. Lehmann construit dans [6].

Dans toute la suite, G est un groupe de Lie nilpotent non abélien connexe et simplement connexe possédant des réseaux. On note par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{N}$ les algèbres de lie de G et N.

Soit **G** le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique unipotent dont l'extension réelle est G. Fixons un entier $\lambda > 0$ sans facteur carré, et soit σ l'unique automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$ défini par : $\sigma(a + b\sqrt{\lambda}) = (a - b\sqrt{\lambda})$ et Δ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ dans $G(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]) \times G)\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Soit enfin ρ une $\mathbb{Q}$-représentation fidèle de **G** dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, fixons une base b de V et notons Γ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ dans Δ où les coefficients de $\rho(g)$ dans la base b sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. D'après un théorème de Borel–Harish-Chandra (voir [1]), Γ est un réseau co-compact de $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$. Notons **Z** le $\mathbb{Q}$-groupe unipotent dont l'extension réelle associée à Γ est H. On a $\mathbf{H}(\mathbb{Q}) = \boldsymbol{\Delta}$. En particulier, aucun sous-espace non trivial de $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \times \{e\}$ et de $\mathrm{G}_2 = \{e\} \times \mathrm{G}$ n'est défini sur $\mathbb{Q}$ pour la $\mathbb{Q}$-structure **H**. Le feuilletage $\mathcal{F}$ en G_2-orbites de H/Γ possède une structure naturelle de G-feuilletage de Lie dont le groupe d'holonomie est l'injection de Γ dans G, qui est d'image dense. Si G est de dimension 3, on a montré dans [3] que $\mathcal{F}$ est la déformation d'un feuilletage abélien. Toujours dans le cas où G est de dimension 3, on a prouvé dans [2] que $\mathcal{F}$ n'admet pas de déformation résoluble non nilpotente. Dans cette note on généralise ce résultat au cas où G est de dimension n quelconque. Puisqu'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de dimension 3 peut être vu comme produit semi-direct $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^2$, où $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de leur loi de groupe abélien et A est une matrice de taille 2, on généralise le résultat de [2], sans utiliser de classification, à tous les groupes de Lie résolubles, simplement connexes de la forme $\mathrm{G}' = \mathbb{R} \times_\mu \mathbb{R}^{n-1}$, où μ est l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On suppose en plus que μ est un sous-groupe à un paramètre défini par $\mu(t) = \exp(tA)$ où le générateur A est une matrice carrée de taille $(n-1)$ inversible et ne possédant pas de valeur propre imaginaire pure. Ainsi, on démontre le théorème 2.2.

Théorème 2.2. *Le feuilletage $\mathcal{F}$ n'admet pas de déformation en un* G'*-feuilletage de Lie.*

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Dans le groupe* G' *le centralisateur d'un élément non trivial est de dimension* 1 *ou* $(n-1)$.

Démonstration. Le groupe est $\mathrm{G}' = \mathbb{R} \times_\mu \mathbb{R}^{n-1}$, où μ est l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On suppose en plus que μ est un sous-groupe à un paramètre défini par $\mu(t) = \exp(tA)$, où le générateur A est une matrice carrée de taille $(n-1)$ inversible et ne possèdant pas de valeur propre imaginaire pure. Si λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sont les valeurs propres de A, celles de $\exp(tA) - Id$ sont $\exp t\lambda_i - 1$ qui sont non nuls pour t non nul et λ_i non imaginaire pure. Donc $\exp(tA) - Id$ est inversible pour t non nul. La structure de groupe de G' est donnée par

$$(t, v).(t', v') = (t + t', (\exp(tA))v' + v). \tag{1}$$

L'équation (1) montre que le centralisateur d'un élément (t, v) est l'ensemble Z des éléments (t', v') tels que

$$(\exp(tA) - Id)v' = (\exp(t'A) - Id)v. \tag{2}$$

D'après (2), en tenant compte du fait que $\exp(tA) - Id$ est inversible pour t non nul, si l'élément (t, v) est non trivial, Z est de dimension 1 ou $(n-1)$. $\square$

Démonstration du théorème 2.2. Soit $\mathcal{G}'$ l'algèbre de Lie de G' et $\mathcal{F}_t$ une $\mathcal{G}_t$-déformation de $\mathcal{F}$. On a que pour $t > 0$ les algèbres de Lie $\mathcal{G}_t$ sont résolubles non nilpotentes isomorphes au produit semi-direct $\mathbb{R} \times_\mu \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ étant munis de leur structure d'algèbre de Lie abélienne et $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. Pour tout t, le groupe de Lie simplement connexe G_t d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ est le groupe transverse du feuilletage de Lie $\mathcal{F}_t$ et $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}$ et pour $t > 0$, G_t est isomorphe à G'. On note respectivement par ρ et ρ_t les morphismes d'holonomie des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t$. On a $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{G}$ et pour tout $t > 0$ et suffisamment petit, $\rho_t : \Gamma \longrightarrow \mathrm{G}_t$.

Par construction $\rho(\Gamma)$ n'est pas abélien et la restriction de ρ au centre Z de Γ est non trivial, nous allons montrer qu'il en est de même pour ρ_t avec $t > 0$ et suffisamment petit. Cela est clair si les morphismes ρ_t sont à valeurs dans un groupe fixé, mais dans le cas général nous devons construire un espace topologique $\tilde{\mathrm{G}}$ contenant tous les groupes G_t et tel que l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \tilde{\mathrm{G}}$ qui à t associe $\rho_t(\Gamma)$ soit continue. On a que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ pour $t > 0$ est le produit semi-direct d'une algèbre de Lie isomorphe à $\mathbb{R}$ et d'une algèbre de Lie isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ sur laquelle $\mathbb{R}$ agit par une matrice A inversible de taille $(n-1)$ et ne possédant aucune valeur propre imaginaire pure. Le groupe G_t est lui-même le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^{n-1}$ sur lequel $\mathbb{R}$ agit par un groupe à un paramètre $u \longrightarrow \exp(uA)$. En particulier, l'algèbre dérivée $\mathcal{M}_t = [\mathcal{G}_t, \mathcal{G}_t]$ de $\mathcal{G}_t$ pour $t > 0$ est isomorphe à la sous-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit t_n une suite qui converge vers 0 telle que $\mathcal{M}_{t_n} = [\mathcal{G}_{t_n}, \mathcal{G}_{t_n}]$ possède une limite $\mathcal{M}_0$ dans l'espace des $(n-1)$-plans de $\mathcal{G}_0$ et telle que, pour tout n, on ait $\rho_{t_n}(\gamma) = e$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Z}$. Choisissons un élément x_0 de $\mathcal{G}_0$ qui n'appartient pas à $\mathcal{M}_0$ et considérons, pour tout t, $x_t = x_0$ comme un élément de $\mathcal{G}_t$. Pour tout n suffisamment grand, x_{t_n} n'appartient pas à $\mathcal{M}_{t_n}$, de telle sorte que $\mathcal{G}_{t_n}$ est le produit semi-direct de $\mathbb{R}x_{t_n}$ par $\mathcal{M}_{t_n}$. Enfin pour n suffisamment grand, pour tout $s \in \mathbb{R}$ notons $\mu_n(s)$ l'automorphisme $\exp(ad_{sx})$ de

$\mathcal{M}_{t_n}$. Soit G_n le groupe de Lie résoluble produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{M}_{t_n}$ vu comme groupe abélien où $\mathbb{R}$ agit sur $\mathcal{M}_{t_n}$ par le groupe à un paramètre $s \longrightarrow \mu_n(s)$. Supposons que, pour tout n, ρ_n est le morphisme d'holonomie d'un G_n-feuilletage de Lie défini par ω_{t_n} associé à la développante $D_{t_n} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}_n$, tel que $D_{t_n}(p) = e$ où p est un point fixé de H. Par équivariance de D_{t_n}, on a pour tout $\gamma \in \mathrm{Z}$,

$$D_{t_n}(\gamma \cdot p) = \rho_{t_n}(\gamma) \cdot D_{t_n}(p)$$

Pour n assez grand on a alors $\rho_{t_n}(\gamma) \neq e$ car si

$$\rho_{t_n}(\gamma) = e,$$

on aura

$$\rho_0(\gamma) = D_0(\gamma) = e,$$

ce qui est impossible. Donc, pour t suffisamment petit, $\rho_t(\Gamma)$ est contenu dans le centralisateur d'un élément non trivial $\rho_t(\gamma)$ avec $\gamma \in \mathrm{Z}$. Or, d'après le lemme 2.3, le centralisateur d'un tel élément est, soit conjugué à $\mathbb{R}$, soit égal au groupe de Lie $\mathbb{R}^{n-1}$ et ne peut donc être uniforme, donc $\rho_t(\Gamma)$ n'est pas uniforme, ce qui est impossible. Ce qui termine la preuve du théorème.

Il existe bien des feuilletages de Lie résolubles classifiants portés par des nilvariétés, i.e. des quotients compacts de groupe de Lie nilpotents et simplement connexes par des réseaux. En voici un exemple. □

Exemple. On désigne par N le groupe de Heisenberg de dimension trois, c'est-à-dire le groupe des matrices 3×3 unipotentes triangulaires supérieures. Soit Γ le réseau cocompact de $H = \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ formé des matrices à coefficients entiers. On note $\mathrm{G}_{8,0}$ le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{G}_{8,0} = (\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3) : [e_1, e_2] = -e_3 \,;\, [e_2, e_3] = 0 \,;\, [e_1, e_3] = e_2$. Il est clair que $\mathrm{G}_{8,0}$ est résoluble et non complètement résoluble puisque ad_{e_1} possède i et $-i$ parmi ses valeurs propres. La variété H/Γ peut être munie d'un $\mathrm{G}_{8,0}$-feuilletage construit de la manière suivante. Le groupe $\mathrm{G}_{8,0}$ est le produit semi direct d'un groupe A isomorphe à $\mathbb{R}$, avec un groupe V isomorphe à $\mathbb{R}^2$, le groupe A agissant sur V par un groupe à un paramètre non trivial de rotations. On note $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ le noyau de ce groupe à un paramètre. Plus précisément, le groupe $\mathrm{G}_{8,0}$ s'identifie à $\mathrm{A} \times \mathrm{V}$ via un difféomorphisme φ. Donc un élément de $\mathrm{G}_{8,0}$ est $\varphi(a, v)$ où $(a, v) \in \mathrm{A} \times \mathrm{V}$ avec la loi $\varphi(t, v).\varphi(t', v') = \varphi(t + t', v + r(t)v')$ où $r(t)$ est la rotation d'angle $2\pi t$. Comme $\Gamma \cap [\mathrm{H}, \mathrm{H}]$ est un réseau de $[\mathrm{H}, \mathrm{H}]$ et $\mathrm{H}/[\mathrm{H}, \mathrm{H}]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^4$ et la projection $p : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}/[\mathrm{H}, \mathrm{H}]$ envoie Γ sur un réseau de $\mathbb{R}^4$, il existe un morphisme surjectif $\psi : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{V}$ tel qu'on ait $\psi(\Gamma) \subset \mathrm{B} \times \mathrm{V}$, $\mathrm{A} \times \mathrm{V}$ étant muni de la structure de groupe produit direct. Remarquons que, si $t \in \mathrm{B}$, $\mathrm{G}_{8,0}$ est isomorphe au groupe produit direct $\mathrm{A} \times \mathrm{V}$. L'application $\varphi \circ \psi$ est la développante d'un $\mathrm{G}_{8,0}$-feuilletage de Lie classifiant sur la variété H/Γ de dimension six, dont le morphisme d'holonomie est la restriction de $\varphi \circ \psi$ à Γ.

Références

[1] A. Borel, Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. Math. (2) (1962) 75.
[2] H. Dathe, Sur le feuilletage de Lehmann, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (5–6) (2011) 337–340.
[3] H. Dathe, J.-F. Quint, Quelques exemples de feuilletage de Lie, Ann. Fac. Sci. Toulouse 14 (2) (2006) 203–215.
[4] É. Ghys, Riemannian Foliation: Example and Problems, Appendice e de Riemannian foliations, par P. Molino, Progress in Mathematics, vol. 73, Birkhäuser, Boston, 1998.
[5] A.E. Kacimi, G. Guasp, M. Nicolau, On deformations of transversaly homogenous foliations, Topology 40 (2001) 1363–1393.
[6] D. Lehmann, Sur l'approximation de certains feuilletages nilpotents par des fibrations, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 286 (1978) 4–35.
[7] P. Molino, Riemannian Foliation, Progress in Mathematics, vol. 73, Birkhäuser, Boston, 1988.
[8] D. Tischler, On fibering certain manifold over the circle, Topology 9 (1970) 153–154.