C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 767–771

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés

Double shuffle for finite multizetas and symmetrized multizetas

David Jarossay

Institut de mathématiques de Jussieu, UP7D, Campus des Grands-Moulins, bâtiment Sophie-Germain, case 7012, 75205 Paris cedex 13, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 2 mai 2014
Accepté le 7 août 2014
Disponible sur Internet le 20 septembre 2014

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Nous interprétons une conjecture sur les multizêtas finis, due à Kaneko et Zagier, en termes du groupoïde fondamental de De Rham $\Pi^{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})$. Nous appelons les nombres qui apparaissent dans cette conjecture des *multizêtas symétrisés*. Nous montrons que les multizêtas finis et les multizêtas symétrisés vérifient une même variante des relations de double mélange. Nous montrons que les multizêtas symétrisés vérifient une variante de certaines relations d'associateur, interprétant ainsi géométriquement un résultat de Hoffman sur les multizêtas finis. Ceci est un prélude à une étude plus large des multizêtas symétrisés et des multizêtas finis.

ABSTRACT

We interpret a conjecture on finite multizetas, due to Kaneko and Zagier, in terms of the De Rham fundamental groupoid $\Pi^{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})$. We call the numbers that appear in this conjecture *symmetrized multizetas*. We show that finite multizetas and symmetrized multizetas satisfy the same variant of the double shuffle relations. We show that symmetrized multizetas satisfy a variant of certain associator relations, interpreting geometrically a result of Hoffman on finite multizetas. This is a preamble to a larger study of symmetrized multizetas and finite multizetas.

1. Multizêtas symétrisés

1.1. *Définition*

Soit $({}_y\Pi_x^{\mathrm{DR}})_{x,y}$ le groupoïde fondamental de De Rham de la droite projective moins trois points [4]. C'est l'une des réalisations du groupoïde fondamental motivique $\Pi^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})$ [5]. Le point-base tangentiel $\vec{1}$ en 0, qui pointe vers 1, et son image par $(z \mapsto 1-z)_*$, sont notés respectivement 0 et 1. Pour R une $\mathbb{Q}$-algèbre, on note $R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ l'algèbre des séries formelles à deux variables e_0, e_1 qui ne commutent pas. Soit $\epsilon : R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \to R$ l'application qui associe à une série formelle son coefficient constant. Soit $\Delta_{ш} : R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \to R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \hat{\otimes} R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ l'unique morphisme d'algèbres, continu pour la topologie $\ker(\epsilon)$-adique, vérifiant $\Delta_{ш}(e_i) = e_i \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} e_i$, pour $i = 0, 1$. L'algèbre de Hopf $R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$, ayant comme

Adresse e-mail : david.jarossay@imj-prg.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.08.005
1631-073X/

coproduit $\Delta_{ш}$, antipode $S : e_{i_r}...e_{i_1} \mapsto (-1)^r e_{i_1}...e_{i_r}$, et co-unité ϵ est duale à l'algèbre de Hopf de mélange $R\langle e_0, e_1\rangle$. Celle-ci est, pour $R = \mathbb{Q}$, l'algèbre de Hopf du $\mathbb{Q}$-schéma en groupes

$$R \mapsto \left\{ f \in R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \text{ t.q. } \Delta_{ш}(f) = f \hat{\otimes} f, \epsilon(f) = 1 \right\}$$

Ce schéma en groupes est canoniquement isomorphe à chaque ${}_y\Pi_x^{\mathrm{DR}}$, de manière compatible à la structure de groupoïde de Π^{DR}. Son algèbre de Lie est donnée par $R \mapsto \{f \in R\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle \text{ t.q. } \Delta_{ш}(f) = f \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} f\}$.

Pour $(s_d, ..., s_1) \in (\mathbb{N}^*)^d$ tel que $s_d \geq 2$, le nombre réel $\zeta(s_d, ..., s_1) = \sum_{0<n_1<...<n_d} 1/(n_1^{s_1}...n_d^{s_d})$ est appelé nombre *multizêta*, de profondeur d et de poids $n = s_d + ... + s_1$. Notant $\omega_0 = \frac{dz}{z}$, $\omega_1 = \frac{dz}{1-z}$, et $(\omega_{i_n}, ..., \omega_{i_1}) = (\underbrace{\omega_0, ..., \omega_0}_{s_d-1}, \omega_1, ..., \underbrace{\omega_0, ..., \omega_0}_{s_1-1}, \omega_1)$, il s'écrit comme l'intégrale itérée $\int_0^1 \omega_{i_n}(t_n) \int_0^{t_n} \omega_{i_{n-1}}(t_{n-1})... \int_0^{t_2} \omega_{i_1}(t_1)$. La définition s'étend, de deux manières différentes, au cas $s_d = 1$, via les deux formules ci-dessus, et la régularisation des séries et celle des intégrales itérées. On obtient ainsi deux familles de nombres $\zeta_*(s_d, ..., s_1)$ et $\zeta_{ш}(s_d, ..., s_1)$ indexées par $(\mathbb{N}^*)^d$. Voir [3] pour les détails et pour les relations dites de *double mélange régularisé* vérifiées par ces nombres.

Définition 1.1. On note $\zeta^{\mathrm{sym}}(s_d, ..., s_1)$ (et de même $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}$ et ζ_*^{sym}) et on appelle *multizêta symétrisé* le nombre

$$\zeta^{\mathrm{sym}}(s_d, ..., s_1) = \zeta^{\mathrm{sym}}\left(e_0^{s_d-1}e_1...e_0^{s_1-1}e_1\right) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^{s_{k+1}+...+s_d} \zeta(s_{k+1}, ..., s_d)\zeta(s_k, ..., s_1) \tag{1}$$

Notations 1.2. Le coefficient d'un mot w dans une série f est noté $f[w]$. Soit $\Phi \in {}_1\Pi_0^{\mathrm{DR}}(\mathbb{R})$, la série génératrice des nombres multizêtas régularisés selon les intégrales itérées [5, § 5.16], qui vérifie $\Phi[e_0^{s_d-1}e_1...e_0^{s_1-1}e_1] = (-1)^d \zeta_{ш}(s_d, ..., s_1)$.

Remarque 1.3. $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(e_0^{s_d-1}e_1...e_0^{s_1-1}e_1)$ est égal à $(-1)^d(\Phi^{-1}e_1\Phi)[e_1e_0^{s_d-1}e_1...e_0^{s_1-1}e_1]$.

1.2. Double mélange

On note ш le produit de mélange des intégrales itérées et $*$ celui des séries.

Définition 1.4. On note, pour $s \in \mathbb{N}^*$, et w, w' des mots en e_0, e_1, $w ш^{(s)} w' = (e_0^{s-1}e_1 w) ш w' + (-1)^{s-1} w ш (e_0^{s-1}e_1 w')$.

Proposition 1.5. *i) (connu) Les ζ_*^{sym} vérifient la relation de mélange liée aux séries dite relation de* stuffle *: $\zeta_*^{\mathrm{sym}}(w * w') = \zeta_*^{\mathrm{sym}}(w)\zeta_*^{\mathrm{sym}}(w')$.*

ii) Les $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}$ vérifient une variante de la relation de mélange liée aux intégrales dite relation de shuffle *: $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(w ш^{(1)} w') = 0$.*

Preuve. i) Soit l'algèbre de Hopf complétée de stuffle $\mathbb{R}\langle\langle(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\rangle\rangle$. Le coproduit est $\Delta_* : y_n \mapsto \sum_{k=0}^n y_k \otimes y_{n-k}$ $(y_0 = 1)$; la relation de stuffle s'écrit $\Delta_*(f_*) = f_* \otimes f_*$, pour $f_* = \sum f_*[s_d, ..., s_1] y_{s_d}...y_{s_1}$. Soit $\mathrm{inv} : f_* \mapsto f_*^{\mathrm{inv}} = \sum (-1)^{s_1+...+s_d} f[s_1, ..., s_d] y_{s_d}...y_{s_1}$. Soit Ψ_* la série génératrice des $\zeta_*(s_d, ..., s_1)$. L'énoncé équivaut à $\Delta_*(\Psi_*^{\mathrm{inv}}\Psi_*) = \Psi_*^{\mathrm{inv}}\Psi_* \otimes \Psi_*^{\mathrm{inv}}\Psi_*$. Le résultat découle de ce que $\Delta_*(\Psi_*) = \Psi_* \otimes \Psi_*$, Δ_* est multiplicatif et Δ_* commute à inv.

ii) La relation de shuffle des nombres multizêtas, i.e. $\Delta_{ш}(\Phi) = \Phi \hat{\otimes} \Phi$, et le fait que e_1 est primitif pour $\Delta_{ш}$ entraînent que $\Phi^{-1}e_1\Phi$ est aussi primitif pour $\Delta_{ш}$, i.e. ses coefficients vérifient la relation de shuffle modulo produits – on voit alors $\Phi^{-1}e_1\Phi$ comme un élément de $\mathrm{Lie}({}_0\Pi_0^{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}))$. La relation énoncée est $(\Phi^{-1}e_1\Phi)[e_1(w ш^{(1)} w')] = (\Phi^{-1}e_1\Phi)[(e_1 w) ш (e_1 w')] = 0$. □

Nous avons communiqué 1.5 à Kaneko, qui nous a informé de 1.6 ci-dessous :

Théorème 1.6 *(Kaneko). Notons $\tau(e_0^{s_d-1}e_1...e_0^{s_1-1}e_1) = (-1)^{s_1+...+s_d} e_0^{s_1-1}e_1...e_0^{s_d-1}e_1$. On a $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(w ш w') = \zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(\tau(w)w')$.*

Ce résultat implique clairement 1.5ii)

Théorème 1.7. *Nouvelle formulation et nouvelle preuve de 1.6. Soit W l'ensemble des mots en e_0, e_1 finissant par e_1 ou vides. On a équivalence entre :*

i) $\forall w, w' \in W$, $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(w ш w') = \zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(\tau(w)w')$.
ii) $\forall u, w, w' \in W$, $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}((uw) ш w') = \zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(w ш (\tau(u)w'))$.
iii) $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall w, w' \in W$, $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}((e_0^{s-1}e_1 w) ш w') = (-1)^s \zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(w ш (e_0^{s-1}e_1 w'))$, *c'est-à-dire :* $\zeta_{ш}^{\mathrm{sym}}(w ш^{(s)} w') = 0$.

Et ces assertions découlent encore de ce que $\Phi^{-1}e_1\Phi \in \mathrm{Lie}({}_0\Pi_0^{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}))$.

Preuve. Pour ii) $\Rightarrow$ i), on prend $w' = \emptyset$, et, pour iii) $\Rightarrow$ ii), on décompose u en sous-mots du type $e_0^{s-1}e_1$. Ensuite, on voit facilement que $e_1(w \text{ш}^{(s)} w') = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{s-1-k}(e_0^k e_1 w)\text{ш}(e_0^{s-1-k}e_1 w')$. $\square$

Fait 1.8. *On a* $\zeta_{ш}^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) = \zeta_*^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) \bmod \zeta(2)$.

Preuve. Soit $\Psi_{ш}$ la série génératrice des $\zeta_{ш}(s_d, \ldots, s_1)$ dans $\mathbb{R}\langle\langle (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\rangle\rangle$. On a $\Psi_* = \Lambda \Psi_{ш}$ où $\Lambda = \exp(\sum_{n\geq 2}(-1)^{n-1}\zeta(n)\cdot y_1^n/n)$: [3, équation (162)]. On obtient que $\Psi_*^{\text{inv}}\Psi_* = \Psi_{ш}^{\text{inv}}\Lambda^{\text{inv}}\Lambda\Psi_{ш}$, puis que $\Lambda^{\text{inv}}\Lambda = \exp(\sum_{m\in\mathbb{N}^*} -2y_1^{2m}\zeta(2m)/2m)$. Enfin, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2m) \in \mathbb{Q}\zeta(2)^m$. La formule plus précise reliant $\zeta_{ш}^{\text{sym}}$ et ζ_*^{sym} est laissée au lecteur. $\square$

Fait 1.9 *(connu). On a* $\zeta_{ш}^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) = (-1)^{\sum_{k=1}^d s_k}\zeta_{ш}^{\text{sym}}(s_1, \ldots, s_d)$ *et idem pour* ζ_*^{sym}*. En particulier, si* $(s_d, \ldots, s_1) = (s_1, \ldots, s_d)$ *et* $s_d + \ldots + s_1$ *est impair, on a* $\zeta_{ш}^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) = \zeta_*^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) = 0$.

Cela découle des définitions et s'écrit $\text{inv}(\Psi_*^{\text{inv}}\Psi_*) = \Psi_*^{\text{inv}}\Psi_*$ et $\text{inv}(\Psi_{ш}^{\text{inv}}\Psi_{ш}) = \Psi_{ш}^{\text{inv}}\Psi_{ш}$.

Pour $\zeta_{ш}^{\text{sym}}$, on remarque que cela découle aussi de ce que, puisque $\Phi^{-1}e_1\Phi \in \text{Lie}({}_0\Pi_0^{\text{DR}}(\mathbb{R}))$, on a $S(\Phi^{-1}e_1\Phi) = -\Phi^{-1}e_1\Phi$ où S est définie au § 1.1.

Remarque 1.10. Tout ceci utilise uniquement les relations de double mélange régularisé. Ainsi,

i) cela reste vrai en remplaçant Φ par une version motivique $\Phi_{\text{m}} \in {}_1\Pi_0^{\text{mot}}(\mathbb{R})$ [7], [2, definition 2.1] ou la version p-adique $\Phi_p \in {}_1\Pi_0^{\text{DR}}(\mathbb{Q}_p)$. En effet les relations de double mélange régularisé sont vraies dans le cadre motivique [11,12] et dans le cadre p-adique [1,6] ;

ii) $f \mapsto f^{-1}e_1 f$ définit une fonction F : {solutions du double mélange régularisé} $\to$ {solutions du « double mélange régularisé symétrisé »}. Pour une définition formelle des équations de « double mélange régularisé symétrisé » et des propriétés de F, voir [9].

1.3. Relation d'associateur

La série Φ vérifie des *relations d'associateur* de Drinfeld [11, Ch. II, définition 1.7]. Elles sont liées au résultat géométrique suivant.

Théorème 1.11. *On a la relation suivante, où* $e_\infty = -e_0 - e_1$ *:*

$$e_0 + \Phi^{-1}(e_0, e_1)e_1\Phi(e_0, e_1) + \Phi^{-1}(e_0, e_\infty)e_\infty\Phi(e_0, e_\infty) \equiv 0 \bmod \zeta(2) \tag{2}$$

Preuve. Voir [9], où il est démontré un résultat plus général. $\square$

Corollaire 1.12. *Soit* $\Upsilon : \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle \to \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ *le morphisme d'algèbres défini par* $e_0 \mapsto e_0 + e_1$, $e_1 \mapsto -e_1$*. On voit* $\zeta_{ш}^{\text{sym}}$ *comme la fonction linéaire sur* $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle e_1$ *vérifiant* $\zeta_{ш}^{\text{sym}}(e_0^{s_d-1}e_1 \ldots e_0^{s_1-1}e_1) = \zeta_{ш}^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1)$*. On a alors l'égalité entre fonctions sur* $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle e_1$ *:*

$$\zeta_{ш}^{\text{sym}} \equiv \zeta_{ш}^{\text{sym}} \circ \Upsilon \bmod \zeta(2)$$

Preuve. Découle de 1.11 en considérant les coefficients de $\Phi^{-1}e_1\Phi$ de mots de la forme $e_1 w e_1$.

Le corollaire 1.12 est l'analogue du théorème de dualité de Hoffman sur les multizêtas finis [8, théorème 4.7] ; on l'a donc interprété géométriquement.

Corollaire 1.13. *i) Les multizêtas symétrisés* $\zeta_{ш}^{\text{sym}}$ *de profondeur* d *sont, modulo* $\zeta(2)$*, des multizêtas de profondeur* $\leq d-1$*. Plus précisément, en notant* $\gamma_s^l = (-1)^l\binom{l+s-1}{s-1}$ *pour* $l \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}$*, on a, modulo l'idéal engendré par* $\zeta(2)$ *et les multizêtas de profondeur* $\leq d-2$ *:*

$$\zeta_{ш}^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) \equiv -(-1)^{\sum_{i=1}^d s_i} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{d-1}\geq 0 \\ l_1+\ldots+l_{d-1}=s_d}} \left(\prod_{i=1}^{d-1}\gamma_{s_i}^{l_i}\right)\zeta(s_1+l_1, \ldots, s_{d-1}+l_{d-1})$$
$$- \sum_{\substack{l'_2,\ldots,l'_d\geq 0 \\ l'_2+\ldots+l'_d=s_1}} \left(\prod_{i=2}^{d}\gamma_{s_i}^{l'_i}\right)\zeta\left(s_d+l'_d, \ldots, s_2+l'_2\right) \tag{3}$$

ii) Les multizêtas symétrisés $\zeta_{\text{ш}}^{\text{sym}}$ de profondeur d dont le poids est de la même parité que d sont, modulo $\zeta(2)$, des multizêtas de profondeur $\leq d-2$.

Exemples : i) $\zeta_{\text{ш}}^{\text{sym}}(s_1) \equiv 0$, i.e. $\zeta_{\text{ш}}(s_1') \equiv 0$ pour s_1' pair ; $\zeta_{\text{ш}}^{\text{sym}}(s_2, s_1) \equiv (-1)^{s_2}\binom{s_1+s_2}{s_1}\zeta_{\text{ш}}(s_1+s_2)$. ii) $\zeta_{\text{ш}}^{\text{sym}}(s_2, s_1) \equiv 0$ pour s_2+s_1 pair.

Preuve. Voir [9]. La preuve de ii) combine i) avec un fait général concernant l'algèbre de Hopf de stuffle, rappelé dans la preuve de 6.2 de [8]. □

Le fait que la profondeur des ζ^{sym} vérifie ces propriétés a été démontré par Zagier par d'autres méthodes.

2. Multizêtas finis

2.1. Introduction

Définition 2.1 *(connue).* On appelle, pour $N, s_1, \ldots, s_d \in \mathbb{N}^*$, sommes harmoniques multiples les nombres rationnels

$$\sigma(s_d, \ldots, s_1)(N) = \sigma\left(e_0^{s_d-1}e_1 \ldots e_0^{s_1-1}e_1\right)(N) = \sum_{0<n_1<\ldots<n_d<N} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}$$

Définition 2.2. i) (Cas particulier de [10, §2.2]) Soit l'anneau des entiers *modulo p infiniment grand* :

$$\mathcal{A} = \Big(\prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)$$

ii) (Zagier) On appelle *multizêtas finis* les nombres

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s_d, \ldots, s_1) = \left(\sum_{0<n_1<\ldots<n_d<p} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}\right)_{p \text{ premier}} \in \mathcal{A}$$

Conjecture 2.3. *1) (Zagier) Soit $\mathcal{Z}_s$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ engendré par les multizêtas finis de poids s, et soit* $\dim_s$ *sa dimension. Alors*

i) *la somme $\bigoplus_{s\geq 0} \mathcal{Z}_s$ est directe,*
ii) *les* $\dim_s$ *sont donnés par : $\sum_{s\geq 0} \dim_s x^s = \frac{1-x^2}{1-x^2-x^3}$.*

2) (Kaneko–Zagier ; reformulation avec 1.1) La correspondance suivante définit un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de celle des multizêtas finis vers celle des multizêtas symétrisés modulo $\zeta(2)$:

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s_d, \ldots, s_1) \mapsto \zeta^{\text{sym}}(s_d, \ldots, s_1) \bmod \zeta(2)$$

2.2. Double mélange

Définition 2.4. Pour $f(z) = \sum_{n>0} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n>0} b_n z^n$ deux séries entières, soit $f \,\underline{\cdot}\, g = \sum_{n>0} c_n z^n$ définie par les formules équivalentes suivantes

$$\int_0^z \frac{(f \,\underline{\cdot}\, g)(z')\mathrm{d}z'}{1-z'} = \int_0^z \frac{f(z')\mathrm{d}z'}{1-z'} \int_0^z \frac{g(z')\mathrm{d}z'}{1-z'} \text{ i.e. } c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j\right)\frac{1}{n-k}\left(\sum_{j=1}^{n-k-1} b_j\right)$$

Pour des intégrales itérées $f = I(w)$, $g = I(w')$, la relation $I(e_1 w)I(e_1 w') = I(e_1 w ш e_1 w') = I(e_1(w ш^{(1)} w'))$ s'écrit $I(w) \,\underline{\cdot}\, I(w') = I(w ш^{(1)} w')$.

Théorème 2.5. *i) (connu, clair) Les multizêtas finis vérifient la relation de* stuffle.

ii) Les multizêtas finis vérifient la variante de 1.5 de la relation de shuffle *: $\zeta_{\mathcal{A}}(w ш^{(1)} w') = 0$. Plus précisément, si $w = e_0^{s_d-1}e_1 \ldots e_0^{s_1-1}e_1$, $w' = e_0^{t_{d'}-1}e_1 \ldots e_0^{t_1-1}e_1$, et γ_t^l est comme en 1.13, on a, dans $\mathbb{Z}_p$, que*

$$\sigma\left(w ш^{(1)} w'\right)(p) = -p \sum_{l, l_1, \ldots, l_{d'} \geq 0} p^{l+l_1+\ldots+l_{d'}} \left(\prod_{i=1}^{d'} (-1)^{l_i+t_i}\gamma_{t_i}^{l_i}\right) \sigma(t_1+l_1, \ldots, t_{d'}+l_{d'}, 2+l, s_d, \ldots, s_1)(p)$$

Preuve. ii) Soient Li_w les polylogarithmes multiples en une variable. La relation $\mathrm{Li}_{e_1 w}\,\mathrm{Li}_{e_1 w'} = \mathrm{Li}_{e_1(w ш^{(1)} w')}$ se traduit sur les coefficients de Taylor en $z=0$ de ces fonctions en :

$$\frac{1}{n}\sigma\left(w ш^{(1)} w'\right)(n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\sum_{0<n_1<\ldots<n_d<k}\frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}\right)\left(\frac{1}{n-k}\sum_{0<m_1<\ldots<m_{d'}<n-k}\frac{1}{m_1^{t_1}\ldots m_{d'}^{t_{d'}}}\right)$$

On effectue le changement de variable $(m_1,\ldots,m_{d'}) \mapsto (n-m_1,\ldots,n-m_{d'})$; on multiplie l'égalité par n, et on la spécialise en $n=p$. On a dans $\mathbb{Z}_p$: $(\frac{1}{p-m})^t = (\frac{-1}{m})^t(\frac{1}{1-\frac{p}{m}})^t = (\frac{-1}{m})^t \sum_{l\geq 0}\gamma_t^l(-\frac{p}{m})^l$. $\square$

Nous avons communiqué 2.5 à Kaneko, qui nous a informé de 2.6 ci-dessous ; la preuve consiste à traduire $\mathrm{Li}_w(z)\,\mathrm{Li}_{w'}(z) = \mathrm{Li}_{w ш w'}(z) = \sum_{n>0} a_n z^n$ sur $\sum_{n=1}^{p-1} a_n$ mod p au lieu de a_p mod p.

Théorème 2.6 *(Kaneko). On a* $\zeta_{\mathcal{A}}(w ш w') = \zeta_{\mathcal{A}}(\tau(w)w')$.

Fait 2.7. *(Voir [8, theorem 4.5] ; [13, lemma 3.3].) On a la relation* $\zeta_A(s_1,\ldots,s_d) = (-1)^{s_1+\ldots+s_d}\zeta_A(s_d,\ldots,s_1)$*, qui est claire : changement de variable* $(n_1,\ldots,n_r) \mapsto (p-n_1,\ldots,p-n_r)$ *dans 2.2.*

Fait 2.8. *(Voir [8, preuve de 6.2].) Pour les raisons invoquées en 1.13ii), lorsque* d *et* $s_d+\ldots+s_1$ *sont de même parité,* $\zeta_{\mathcal{A}}(s_d,\ldots,s_1)$ *est de profondeur* $\leq d-1$.

Remerciements

Je remercie mon directeur Francis Brown de m'avoir incité à écrire cette note, ainsi que Pierre Cartier et Francis Brown, pour leur relecture détaillée et leurs remarques, qui ont permis d'améliorer la rédaction de cette note, et de corriger des erreurs. Ce travail est financé par la bourse ERC n°257638, « Periods in Algebraic Geometry and Physics ».

Références

[1] A. Besser, H. Furusho, The double shuffle relations for p-adic multiple zeta values, Contemp. Math. AMS 416 (2006) 9–29.
[2] F. Brown, Mixed Tate motives over *Spec*($\mathbb{Z}$), Ann. Math. (2) 175 (2012) 949–976.
[3] P. Cartier, Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents, Séminaire Bourbaki 885 (2000–2001) 137–173.
[4] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in : Galois Groups over $\mathbb{Q}$, Berkeley, CA, 1987, in : Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer-Verlag, New York, 1989.
[5] P. Deligne, A.B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixtes, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 38 (1) (2005) 1–56.
[6] H. Furusho, A. Jafari, Regularization and generalized double shuffle relations for p-adic multiple zeta values, Compos. Math. 143 (2007) 1089–1107.
[7] A.B. Goncharov, Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry, Duke Math. J. 128 (2005) 209–284.
[8] M. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, preprint, arXiv:math/0401319, 2004.
[9] D. Jarossay, Multizêtas symétrisés et multizêtas finis, en préparation.
[10] M. Kontsevich, Holonomic D-modules and positive characteristic, Jpn. J. Math. 4 (2009) 1–25.
[11] G. Racinet, Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 95 (2002) 185–231.
[12] I. Soudères, Motivic double shuffle, Int. J. Number Theory 6 (2010) 339–370.
[13] J. Zhao, Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums, Int. J. Number Theory 4 (2008) 73–106.