C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 441–445

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

La torsion analytique holomorphe généralisée des fibrés en droites intégrables

The generalized holomorphic analytic torsion for the integrable line bundles

Mounir Hajli

National Center for Theoretical Sciences, Taipei Office, National Taiwan University, Taipei 106, Taiwan

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 30 janvier 2014
Accepté après révision le 12 mars 2014
Disponible sur Internet le 1er avril 2014

Présenté par Jean-Michel Bismut

RÉSUMÉ

Soit X une variété kählérienne compacte. On montre que la notion de métrique de Quillen s'étend aux métriques intégrables sur X. En particulier, on établit que la notion de torsion analytique holomorphe s'étend à l'ensemble des fibrés en droites intégrables $\overline{L}$ sur X, qui vérifient $H^q(X,L)=0$ pour tout $q\geqslant 1$.

ABSTRACT

Let X be a compact Kähler manifold. We extend the notion of Quillen metric to the integrable line bundles $\overline{L}$ on X. In particular, we show that the notion of holomorphic analytic torsion extends to integrable line bundles $\overline{L}$ satisfying $H^q(X,L)=0$ for $q\geqslant 1$.

1. Introduction

Dans [12], Ray et Singer associent à toute variété kählérienne compacte (X,ω) et $\overline{E}$ un fibré hermitien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, un réel noté $T((X,\omega);\overline{E})$ appelé la torsion analytique holomorphe, défini en posant :

$$T\big((X,\omega);\overline{E}\big)=\sum_{q\geqslant 0} q(-1)^{q+1}\zeta'_{\Delta^q_{\overline{E}}}(0),$$

où $\zeta'_{\Delta^q_{\overline{E}}}(0)$ est la dérivée en zéro du prolongement analytique de la fonction zêta $\zeta_{\Delta^q_{\overline{E}}}$ associée au spectre de l'opérateur laplacien $\Delta^q_{\overline{E}}$ agissant sur $A^{(0,q)}(X,E)$, l'espace des $(0,q)$-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à coefficients dans E, pour tout $q\geqslant 0$.

Dans [11], Maillot généralise la géométrie d'Arakelov de Gillet et Soulé ([6]) à la classe des fibrés en droites intégrables avec applications aux variétés toriques lisses. Dans cet article, on continue cette étude en proposant une généralisation des notions de torsion analytique holomorphe et de métrique de Quillen à cette classe de fibrés hermitiens. Rappelons que la torsion analytique holomorphe est un ingrédient fondamental dans la formulation du théorème de Riemann–Roch arithmétique ([4,8]). Une métrique hermitienne continue sur un fibré en droites holomorphe L est dite admissible si elle est la limite uniforme d'une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'un fibré intégrable est par définition, en notation

Adresse e-mail : hajlimounir@gmail.com.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.03.010

additive, la différence entre deux fibrés admissibles. Malheureusement, la construction de [12] n'est plus valable dans ce cas. On procède différemment en utilisant un procédé d'approximation moyennant les formules des anomalies de Bismut, Gillet et Soulé ([2]).

2. La torsion analytique holomorphe généralisée

Soit $\overline{L}=(L,\|\cdot\|)$ un fibré en droites intégrable sur X et $(E_1,\|\cdot\|_1)\otimes(E_2,\|\cdot\|_2)^{-1}$ une décomposition de $\overline{L}$ en fibrés admissibles. Par définition, il existe $(\|\cdot\|_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ sur E_i qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_i$ sur X, pour $i=1,2$.

Proposition 2.1. *La suite suivante*

$$\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_1\otimes E_2^{-1}, h_{1,n}\otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'}\otimes h_{2,m'}^{-1}\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX}) \tag{1}$$

converge vers zéro lorsque n, n', m et m' tendent vers ∞.[1] *(où $\widetilde{\mathrm{ch}}(L,\|\cdot\|,\|\cdot\|')$ est la classe de Bott–Chern associée à ch, ([7]).) Si $\|\cdot\|'$ est une métrique $\mathcal{C}^\infty$ sur L, alors pour tout choix de la décomposition et tout choix de $(\|\cdot\|_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i=1,2$, la suite*

$$\left(\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_1\otimes E_2^{-1}, h_{1,n}\otimes h_{2,m}^{-1}, \|\cdot\|'\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX})\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$$

converge vers une limite unique égale à $\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}(L,\|\cdot\|,\|\cdot\|')T\,\mathrm{d}(\overline{TX})$. (où $\widetilde{\mathrm{ch}}(L,\|\cdot\|,\|\cdot\|')$ est une forme différentielle généralisée au sens de [11, § 4.3].)

Démonstration. De [9, proposition 4.1], on déduit facilement que (1) est une combinaison linéaire des termes suivants $\int_X T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}T\,\mathrm{d}(\overline{TX})$ pour $(i,j,k,l)\in\mathbb{N}^4$ et $(n,n'),(m,m')\in\mathbb{N}^2$, où $T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}$ est la forme différentielle sur X, localement donnée comme suit : en un point $x\in X$, soit s (resp. t) une section locale holomorphe de E_1 (resp. E_2) non nulle en x ; alors en un voisinage de x, on pose $T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}:=T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}(s,t)$ où

$$T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}(s,t):=\big(\log\big(\|s\|_{1,n}\|t\|_{2,m'}\big)^2-\log\big(\|s\|_{1,n'}\|t\|_{2,m}\big)^2\big)c_1(\overline{E}_{1,n})^i c_1(\overline{E}_{1,n'})^j c_1(\overline{E}_{2,m})^k c_1(\overline{E}_{2,m'})^l.$$

(Bien évidemment, cette forme ne dépend pas de s et de t.) Notons que $T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}(s,t)$ s'écrit comme différence de deux termes dont chacun est le produit d'une fonction plurisousharmonique et de formes de Chern positives. L'idée de la preuve fera appel à la théorie des fonctions pluri-sous-harmoniques, afin de montrer que chaque terme forme une suite de courants positifs sur un ouvert donné, qui converge faiblement vers la même limite. Plus concrètement, par compacité de X, il existe un recouvrement ouvert fini $(U_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ de X et $(s_{\alpha,1})_{\alpha\in\Omega}$ (resp. $(s_{\alpha,2})_{\alpha\in\Omega}$) un ensemble de sections locales holomorphes non nulles de E_1 (resp. de E_2) sur U_α pour tout $\alpha\in\Omega$; on considère $(\rho_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. On a :

$$\int_X T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}T\,\mathrm{d}(\overline{TX})=\sum_{\alpha\in\Omega}\int_{U_\alpha}T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}(s_{\alpha,1},s_{\alpha,2})\rho_\alpha T\,\mathrm{d}(\overline{TX}).$$

Les suites des fonctions plurisousharmoniques $(-\log(\|s_{1,\alpha}\|_{1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(-\log(\|s_{1,\alpha}\|_{1,n'}))_{n'\in\mathbb{N}}$, $(-\log(\|s_{2,\alpha}\|_{2,m}))_{m\in\mathbb{N}}$, et $(-\log(\|s_{2,\alpha}\|_{2,m'}))_{m'\in\mathbb{N}}$ restreintes à U_α vérifient les hypothèses du [3, (1.6) corollaire] ; en notant que $\rho_\alpha T\,\mathrm{d}(\overline{TX})\in A_c(U_\alpha)$.[2] Alors

$$\forall\alpha\in\Omega,\ \forall i,j,k,l,\qquad \int_{U_\alpha}T^{i,j,k,l}_{(n,n'),(m,m')}(s_{\alpha,1},s_{\alpha,2})\rho_\alpha T\,\mathrm{d}(\overline{TX})\xrightarrow[n,n',m,m'\mapsto\infty]{}0.$$

On conclut que

$$\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_1\otimes E_2^{-1}, h_{1,n}\otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'}\otimes h_{2,m'}^{-1}\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX}),$$

converge vers 0, lorsque n, n', m et m' tendent vers ∞.

---

[1] La convergence ici est au sens suivant : $(a_{n,n',m,m'})_{(n,n',m,m')\in\mathbb{N}^4}$ est une suite réelle qui converge vers une limite finie l, si $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $|a_{n,n',m,m'}-l|\leqslant\epsilon$ lorsque $\min(n,n',m,m')\geqslant N$.

[2] $A_c(U_\alpha)$ désigne l'algèbre des $(*,*)$-formes différentielles sur U_α à support compact.

Soit $\|\cdot\|'$ une métrique $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{L}$. D'après ce qui précède, on conclut que $(\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, \|\cdot\|')T\,\mathrm{d}(\overline{TX}))_{n,m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_1 \otimes h_2^{-1}, \|\cdot\|')T\,\mathrm{d}(\overline{TX})$; or, on a $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_1 \otimes h_2^{-1}, \|\cdot\|') = \widetilde{\mathrm{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|')$, qui est une forme différentielle généralisée au sens de [11, § 4.3]. D'où l'unicité de la limite par rapport au choix de la décomposition de $\overline{L}$ en fibrés admissibles et le choix des suites $(\|\cdot\|_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 2.2. *En gardant les mêmes hypothèses. La suite double des métriques de Quillen suivante :*

$$(h_{Q,(X,\omega);(E_1\otimes E_2^{-1},\|\cdot\|_{1,n}\otimes\|\cdot\|_{2,m}^{-1})})_{n,m\in\mathbb{N}}, \tag{2}$$

est convergente et la limite ne dépend, ni de la décomposition, ni de la suite choisie ; on l'appelle la métrique de Quillen généralisée et on la note

$$h_{Q,(X,\omega);(L,\|\cdot\|)}.$$

Si $H^q(X, L) = 0$, pour tout $q \geqslant 1$, alors la suite suivante :

$$\big(T\big((X,\omega); \big(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,m}^{-1}\big)\big)\big)_{n,m\in\mathbb{N}}, \tag{3}$$

converge vers une limite finie. On l'appelle la torsion analytique holomorphe de Ray–Singer généralisée et on la note

$$T\big((X,\omega), (L, \|\cdot\|)\big),$$

et on a pour toute métrique $\mathcal{C}^\infty$, $\|\cdot\|'$ sur L :

$$T\big((X,\omega), \overline{L}\big) = T\big((X,\omega), \overline{L}'\big) + \int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|'\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX}) - \log\left(\frac{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}}{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)}}\right),$$

où $\widetilde{\mathrm{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|')$ ici est une forme différentielle généralisée au sens de [11, §4.3].

Démonstration. Soient $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés en droites admissibles tels que $\overline{L} = \overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2^{-1}$. On pose $\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,n}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $(\|\cdot\|_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\|\cdot\|_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ sur E_1 (resp. E_2) qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_{E_1}$ (resp. $\|\cdot\|_{E_2}$). Si l'on considère $\|\cdot\|'$ une métrique $\mathcal{C}^\infty$ quelconque sur L, alors, d'après [2, théorème 0.2], on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\log h_{Q,(X,\omega);(L,\|\cdot\|_n)} - \log h_{Q,(X,\omega);(L,\|\cdot\|')} = -\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|'\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX}).$$

Or, on a montré que le terme à droite converge vers une limite finie qui ne dépend, ni du choix de la suite, ni de la décomposition. Par conséquent, la suite suivante :

$$(-\log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|'\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX}) - \log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

converge vers une limite qu'on note $-\log\|\cdot\|_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)}$. Par le formalisme des formes différentielles généralisées ([11, §4.3]), on dispose alors d'une formule des anomalies généralisée en posant :

$$\log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)} - \log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')} = -\int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|'\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX}).$$

On suppose maintenant que $H^q(X, L) = 0$, $\forall q \geqslant 1$. Donc, $\lambda(L) = \det(H^0(X, L))$. On a

$$(h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)},$$

qui résulte de la convergence uniforme des suites du théorème et de la continuité du déterminant. Par suite, on définit *la torsion analytique holomorphe généralisée* associée à $\overline{L}$ en posant :

$$T\big((X,\omega), \overline{L}\big) := T\big((X,\omega), \overline{L}'\big) + \lim_{n\mapsto\infty} \int_X \widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|'\big)T\,\mathrm{d}(\overline{TX})$$
$$- \lim_{n\mapsto\infty} \log\left(\frac{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}}{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)}}\right). \qquad \square$$

2.1. Un contre-exemple

On va montrer que le théorème 2.2 n'est pas valable si l'on supprime la condition de la positivité. En particulier, la métrique de Quillen généralisée considérée comme fonction en la métrique n'est pas continue sur l'espace des métriques intégrables muni de la topologie de la convergence uniforme. Afin de simplifier, on suppose que $X=\mathbb{P}^1$ et que L est le fibré trivial. Soient $c>0$, $0<\varepsilon\ll 1$, $0<\delta\ll\varepsilon$ et $0<\gamma\ll\varepsilon-\delta$. On pose f la fonction définie sur $[1-\varepsilon,1-\varepsilon+\delta]\cup[1-\gamma,1+\gamma]\cup[1+\varepsilon-\delta,1+\varepsilon]$ par :

$$f(r)=\begin{cases}\frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}r-\frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}(1-\varepsilon) & \text{si } r\in[1-\varepsilon,1-\varepsilon+\delta]\\ c\sqrt{\delta} & \text{si } r\in[1-\gamma,1+\gamma]\\ -\frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}r+\frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}(1+\varepsilon) & \text{si } r\in[1+\varepsilon-\delta,1+\varepsilon].\end{cases}$$

On recolle f par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de façon à obtenir une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, positive, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et qui coïncide avec f sur $]1-\varepsilon,1-\varepsilon+\delta[\cup]1-\gamma,1+\gamma[\cup]1+\varepsilon-\delta,1+\varepsilon[$ avec support compact, nulle en 0 et de norme supérieure inférieure à $2c\sqrt{\delta}$. On la note par $f_{c,\delta}$. On étend $f_{c,\delta}$ en une fonction sur $\mathbb{P}^1$, en posant $\widetilde{f}_{c,\delta}(z):=f_{c,\delta}(|z|),\forall z\in\mathbb{C}$. Par construction, $\widetilde{f}_{c,\delta}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1$ et elle définit une métrique $\mathcal{C}^\infty$ notée $h_{c,\delta}$ sur le fibré trivial $\mathcal{O}$, en posant $h_{c,\delta}(1,1)=\mathrm{e}^{-\widetilde{f}_{\delta,c}}$. En notant que $\sup_{\mathbb{P}^1}|\widetilde{f}_{c,\delta}|\leqslant 2c\sqrt{\delta}$, alors $(h_{c,\delta})_\delta$ est une suite de métriques $\mathcal{C}^\infty$ convergeant uniformément vers h_∞ lorsque δ tend vers 0 (h_∞ est la métrique canonique de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire $h_\infty(1,1)=1$).

Soit ω une forme kählérienne $\mathcal{C}^\infty$ quelconque sur $\mathbb{P}^1$. On considère la métrique de Quillen associée à $h_{c,\delta}$ et à ω. Par la formule des anomalies, on a :

$$\begin{aligned}T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_{c,\delta})\big)-T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_\infty)\big)&=-\int_{\mathbb{P}^1}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{O},h_{c,\delta},h_\infty)T\,\mathrm{d}\big(\overline{T\mathbb{P}^1}\big)-\log\frac{h_{L^2,(\mathbb{P}^1,\omega),(\mathcal{O},h_{c,\delta})}}{h_{L^2,(\mathbb{P}^1,\omega),(\mathcal{O},h_\infty)}}\\&=-\int_{\mathbb{P}^1}\widetilde{f}_{c,\delta}dd^c\widetilde{f}_{c,\delta}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{P}^1}\widetilde{f}_{c,\delta}c_1\big(\overline{T\mathbb{P}^1}\big)-\log\frac{h_{L^2,(\mathbb{P}^1,\omega),(\mathcal{O},h_{c,\delta})}}{h_{L^2,(\mathbb{P}^1,\omega),(\mathcal{O},h_\infty)}}.\end{aligned}$$

Or, par construction de $f_{c,\delta}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1}\widetilde{f}_{c,\delta}dd^c\widetilde{f}_{c,\delta}&=\int_{\mathbb{R}^+}f_{c,\delta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bigg(r\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg)r\,\mathrm{d}r\\&=\bigg[rf_{c,\delta}\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg]_0^\infty-\int_{\mathbb{R}^+}r\bigg(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg)^2\mathrm{d}r\\&=-\int_A r\bigg(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg)^2\mathrm{d}r-\int_{\mathbb{R}^+\setminus A}r\bigg(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg)^2\mathrm{d}r\quad\text{où } A=[1-\varepsilon,1-\varepsilon+\delta]\cup[1+\varepsilon-\delta,1+\varepsilon]\\&=-\frac{2}{\delta}f_{c,\delta}(1)^2-\int_{\mathbb{R}^+\setminus A}r\bigg(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg)^2\mathrm{d}r\\&=-2c^2-\int_{\mathbb{R}^+\setminus A}r\bigg(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r}\bigg)^2\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_{c,\delta})\big)-T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_\infty)\big)\geqslant 2c^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{P}^1}\widetilde{f}_{c,\delta}c_1\big(\overline{T\mathbb{P}^1}\big)-\log\frac{h_{L^2,(\mathbb{P}^1,\omega),(\mathcal{O},h_{c,\delta})}}{h_{L^2,(\mathbb{P}^1,\omega),(\mathcal{O},h_\infty)}}.$$

Comme $\sup_{\mathbb{P}^1}|\widetilde{f}_{c,\delta}|\leqslant 2c\sqrt{\delta}$ et que $\mathbb{P}^1$ est projectif, alors il existe une constante $M>0$ telle que $|\int_{\mathbb{P}^1}f_{c,\delta}\,c_1(\overline{T\mathbb{P}^1})|\leqslant M\sqrt{\delta}\,c$, $\forall c>0$ et $\forall 0<\delta\ll 1$. Comme $\widetilde{f}_{c,\delta}(z)=f_{c,\delta}(|z|)\geqslant 0$, alors $h_{c,\delta}\leqslant h_\infty$. Par suite, on obtient :

$$T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_{c,\delta})\big)-T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_\infty)\big)\geqslant 2c^2-M\sqrt{\delta}c\quad\forall c>0,\ \forall 0<\delta\ll 1.\tag{4}$$

Théorème 2.3. *Pour toute forme kählérienne ω sur $\mathbb{P}^1$ et pour tout $c>0$, il existe une suite de métriques $(h_{c,\delta})_{\delta>0}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant uniformément vers la métrique canonique de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{P}^1$ telle que :*

$$\limsup_{\delta\mapsto 0}T\big((\mathbb{P}^1,\omega);(\mathcal{O},h_{c,\delta})\big)\geqslant 2c^2+T\big((\mathbb{P}^1,\omega_{\mathbb{P}^1}),(\mathcal{O},h_\infty)\big).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du (4). □

Remarque 2.4.

1. $h_{c,\delta}$ est une métrique invariante par l'action du tore compact de $\mathbb{P}^1$. En effet, on a $\widetilde{f}_{c,\delta}(z) = f_{c,\delta}(|z|)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Bien que la suite $(T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})))_{\delta>0}$ ne converge pas vers $T(\mathcal{O}, h_\infty)$, on remarque qu'il existe une constante M' telle que $T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) \geqslant M'$, $\forall 0 < \delta \ll 1$ et $\forall c > 0$. En effet, de (4) on déduit que :

$$T\big(\big(\mathbb{P}^1, \omega\big); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})\big) \geqslant -\frac{M^2}{8} + T\big(\big(\mathbb{P}^1, \omega\big); (\mathcal{O}, h_\infty)\big) =: M' \quad \forall 0 < \delta \ll 1,\ \forall c > 0.$$

Ce résultat est en fait prévisible d'après la conjecture de Gillet–Soulé ([5]), établie en dimension 1 par Berman, [1]. On établit ce fait en toute généralité ([10, théorème 1.3]). Plus précisément, on montre que la torsion analytique holomorphe vue comme fonction en la métrique est minorée sur l'espace des métriques admissibles et invariantes par l'action du tore compact sur un fibré en droites équivariant sur une variété torique projective non singulière.

Remerciements

Cet article est issu d'un chapitre de ma thèse, rédigée sous la direction de V. Maillot. Je le remercie pour ses indications et ses encouragements. Je tiens aussi à remercier J.I. Burgos, D. Eriksson, G. Freixas et X. Ma.

Références

[1] Robert Berman, Sharp inequalities for determinants of Toeplitz operators and dbar-Laplacians on line bundles, arXiv:0905.4263v1 [math.CV], May 2009.
[2] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott–Chern forms and analytic torsion, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 49–78.
[3] Jean-Pierre Demailly, Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in: Complex Analysis and Geometry, in: Univ. Ser. Math., Plenum Press, New York, 1993, pp. 115–193.
[4] H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, Topology 30 (1) (1991) 21–54. With an appendix by D. Zagier.
[5] H. Gillet, C. Soulé, Upper bounds for regularized determinants, Comm. Math. Phys. 199 (1) (1998) 99–115.
[6] Henri Gillet, Christophe Soulé, Arithmetic intersection theory, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 72 (1990) 93–174.
[7] Henri Gillet, Christophe Soulé, Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. I, Ann. of Math. (2) 131 (1) (1990) 163–203.
[8] Henri Gillet, Christophe Soulé, An arithmetic Riemann–Roch theorem, Invent. Math. 110 (3) (1992) 473–543.
[9] Mounir Hajli, Sur la fonction zêta associée au laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur la droite projective complexe, J. Number Theory 133 (12) (2013).
[10] Mounir Hajli, Sur une inégalité fonctionnelle sur les variétés toriques avec application à la torsion analytique holomorphe, arXiv:1301.1798 [math.AG], janvier 2013.
[11] Vincent Maillot, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. Fr. (N. S.) 80 (2000) vi+129.
[12] D.B. Ray, I.M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. (2) 98 (1973) 154–177.