



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Géométrie algébrique

Parties polaires et compactification ELSV

*Polar parts and the ELSV compactification*

Bashar Dudin

Laboratoire Manceau de mathématiques, avenue Olivier-Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 5 mars 2013

Accepté après révision le 11 septembre 2013

Disponible sur Internet le 15 octobre 2013

Présenté par Claire Voisin

R É S U M É

On propose une construction alternative à une compactification – due à [6] – du champ des courbes lisses munies de fonctions méromorphes d'ordres fixés. Cette dernière est obtenue comme l'adhérence du champ de départ dans un champ propre ; on donne une description modulaire des points du bord.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We give an alternative construction to a compactification—due to [6]—of the stack of smooth curves endowed with a meromorphic function having poles with fixed order. The original compactification is described as a closure of the initial stack in a proper stack; we give a modular description of the boundary points.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ un n -uplet d'entiers strictement positifs. On étudie une compactification $\overline{\mathcal{H}}_{g,\mathbf{k}}$ du champ $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$ qui paramètre les courbes lisses marquées (X, p_1, \dots, p_n) de genre g munies de fonctions méromorphes (à multiplication par un scalaire et l'addition d'une constante près) de pôle d'ordre k_i en p_i , et régulière en dehors des p_i . On définit d'abord un champ $\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$, qui paramètre certaines courbes préstables marquées, dites à bulles, et munies de fonctions méromorphes (à l'addition d'un scalaire près) de pôles aux points marquées. Celui-ci a une structure de cône au-dessus du champ des courbes $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Son « projectifié » redonne le champ propre bien connu introduit dans [6], qui contient $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$ comme sous-champ ouvert. En général, $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$ n'est pas partout dense dans le projectifié de $\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$. C'est après avoir précisé le lien entre, d'une part, l'adhérence $\overline{\mathcal{H}}_{g,\mathbf{k}}$ de $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$ et, d'autre part, la compactification à la Harris–Mumford des champs de Hurwitz qu'on est en mesure de décrire les points du bord de $\overline{\mathcal{H}}_{g,\mathbf{k}}$.

2. Rappels et notations

On fixe un corps algébriquement clos \mathbb{K} de caractéristique $\mathbf{p} \geq 0$ sujette à d'éventuelles restrictions. On note S un \mathbb{K} -schéma algébrique. Soit $(g, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $(g, n) \neq (0, 1)$ et $(0, 2)$. Une S -courbe préstable n -marquée de genre g sur S est un schéma relatif $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ de dimension relative 1, propre, plat, de présentation finie, dont les fibres sont des courbes connexes ayant au plus des singularités nodales, de genre g , et munies de n sections $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ d'images

Adresse e-mail : bashar.dudin@univ-lemans.fr.

respectives $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ disjointes et contenues dans le lieu lisse de π . Dans le cas $S = \mathbf{Spec}(\mathbb{K})$, on note par abus (X, \underline{p}) la donnée précédente. On note $\Gamma_{(X, \underline{p})}$ le graphe dual de (X, \underline{p}) : un sommet v correspond à une composante connexe \overline{X}_v de la normalisée de X (de façon équivalente à une composante irréductible de X) et une arête orientée e de v à v' correspond à la branche x_e sur X_v d'un point nodal de X qui relie X_v à $X_{v'}$. Une arête de $\Gamma_{(X, \underline{p})}$ est une paire $\{e, \bar{e}\}$ d'arêtes orientées opposées. On associe à un sommet v le genre de X_v et on code le marquage de X par l'ajout d'une patte (arête monovalente) à v pour chaque $p_i \in X_v$. La courbe préstable marquée (X, \underline{p}) est dite stable si tout sommet de genre 0 du graphe dual est de valence au moins 3. Par extension, une courbe préstable marquée $(\pi : \mathcal{X} \rightarrow S, \underline{\sigma})$ est dite stable si chaque fibre l'est. Les S -courbes prestables n -marquées forment un champ algébrique $\mathcal{M}_{g,n}^{ps}$ au-dessus de \mathbf{Sch}/\mathbb{K} , qui contient comme sous-champ ouvert le champ propre $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ des S -courbes stables n -marquées ([5] et [3]).

Un revêtement admissible de profil \mathbf{k} (voir [8] et [4]) est un morphisme fini surjectif $\phi : X \rightarrow Y$ (de degré strictement inférieur à \mathbf{p} si $\mathbf{p} > 0$) d'une courbe préstable n -marquée (X, \underline{p}) de genre g vers une courbe préstable 1-marquée (Y, q_∞) de genre 0 qui préserve le marquage et tel que :

- (i) $\phi^{-1}(Y^{\text{sing}}) = X^{\text{sing}}$,
- (ii) les multiplicités de ϕ au voisinage des deux branches d'un point nodal de X sont égales,
- (iii) $\phi^{-1}(q_\infty) = \sum_{i=1}^n k_i p_i$.

On exige, de plus, que Y , marquée par les points de branchement (au sens de [4]), soit stable. Les revêtements admissibles au-dessus de S sont définis comme ci-dessus. Un automorphisme d'un revêtement admissible ϕ de profil \mathbf{k} est un couple (α, β) d'automorphismes des courbes prestables marquées, X, Y tel que $\phi \circ \alpha = \beta \circ \phi$. Ces données définissent un champ de Deligne–Mumford propre qu'on note $\overline{\mathfrak{M}}_{g,\mathbf{k}}$; il compactifie le champ $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$ introduit précédemment.

3. Courbes à bulles et parties polaires

Soit $(\pi : \mathcal{X} \rightarrow S, \underline{\sigma})$ une S -courbe préstable n -marquée. Le faisceau normal à $\sum_{i=1}^n k_i \mathcal{D}_i$, i.e. $\mathcal{P}_{\mathcal{X},\mathbf{k}} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(k_i \mathcal{D}_i) / \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ définit un faisceau localement libre sur S , de rang $\sum_{i=1}^n k_i$. La i^e composante d'une section ϱ de $\mathcal{P}_{\mathcal{X},\mathbf{k}}$ s'écrit localement $\varrho_i = a_{k_i} t^{-k_i} + \dots + a_1 t^{-1}$, où t est une coordonnée locale relative pour \mathcal{D}_i , et les a_j sont des sections de \mathcal{O}_S . Une partie polaire le long des \mathcal{D}_i est une section globale ϱ de $\mathcal{P}_{\mathcal{X},\mathbf{k}}$. Elle est dite d'ordre \mathbf{k} si pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient dominant a_{k_i} est inversible dans une quelconque représentation locale de ϱ_i .

Définition 3.1. Une S -courbe à bulles de genre g est une S -courbe préstable n -marquée de genre g où les graphes duaux des fibres sont tels que les sommets de genre 0 sont, soit de valence au moins 3, soit de valence 2, avec une unique patte. Ce dernier cas correspond à une composante appelée bulle.

Définition 3.2. Une S -courbe polaire de profil \mathbf{k} est la donnée d'une S -courbe à bulles munie d'une partie polaire $\varrho_{\mathbf{k}}$ d'ordre \mathbf{k} .

On note $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$ le préfaisceau en groupoïdes dont les S -sections sont les S -courbes polaires de profil \mathbf{k} . Les 2-isomorphismes sont ceux des courbes prestables sous-jacentes qui préservent la partie polaire.

Proposition 3.3. $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$ est un champ algébrique tame au sens de [1] qui est de Deligne–Mumford si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{p} \nmid k_i$.

On a un morphisme d'oubli $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, qui ne conserve que la courbe à bulles sous-jacente à une S -section de $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$, puis la stabilise. On a une action naturelle – explicitée plus loin – de \mathbb{G}_m le long des fibres.

Théorème 3.4. $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$ a une structure de cône (au sens de [2]) au-dessus de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui, localement au-dessus de la base, est isomorphe au cône $\prod_{i=1}^n [\mathbb{A}^{k_i} / \mu_{k_i}] \times S$, où le schéma en groupe des racines de l'unité μ_{k_i} et \mathbb{G}_m agit sur l'espace affine \mathbb{A}^{k_i} avec les poids $\nu_i = (1, 1, 2, \dots, k_i - 1)$.

La preuve repose sur la description des sections de $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$ au-dessus de $S \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Elles s'identifient à la donnée d'une S -section $(\pi : \mathcal{X} \rightarrow S, \underline{\sigma})$ de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ enrichie par le choix de n -uplets :

$$(\alpha_i : \mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{D}_i}, \varrho_{k_i} \in H^0(\text{Sym}^{k_i}(\mathcal{E}_{\alpha_i}) / (\mathcal{F}_{\alpha_i})^{k_i}))_{i=1}^n$$

où α_i est un morphisme de \mathcal{O}_S -modules inversibles vers $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D}_i)|_{\mathcal{D}_i}$, $\mathcal{E}_{\alpha_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D}_i) \times_{\mathcal{N}_{\mathcal{D}_i}} \mathcal{R}_i$, $\mathcal{F}_{\alpha_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \times_{\mathcal{N}_{\mathcal{D}_i}} \{0\}$ et l'image de ϱ_{k_i} dans $(\text{Sym}^{k_i}(\mathcal{E}_{\alpha_i}) / \mathcal{F}_{\alpha_i}^{\otimes k_i}) / (\mathcal{F}_{\alpha_i}(\text{Sym}^{k_i-1}(\mathcal{E}_{\alpha_i}) / \mathcal{F}_{\alpha_i}^{\otimes k_i-1})) = \mathcal{R}_i^{\otimes k_i}$ en donne une trivialisatoin. La section ϱ_{k_i} définit une partie polaire d'ordre k_i sur $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\alpha_i})$. La section nulle de $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$ au-dessus de π correspond à $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Elle correspond à la S -courbe polaire obtenue en attachant une droite projective $\mathbb{P}_{S,i}^1$ à \mathcal{D}_i le long de la section 0, marquée par le point à l'infini et de partie polaire $t_i^{-k_i}$. L'action de \mathbb{G}_m sur les fibres de $\mathfrak{P}_{g,\mathbf{k}}$ au-dessus de π est l'action naturelle

par multiplication sur $(\alpha_i)_{i=1}^n$. Pour chaque i , cette action est de poids ν_i . La description locale découle d'une présentation de \mathcal{E}_{α_i} .

Corollaire 3.5. *Le champ quotient (au sens de [10]) $\mathbb{P}\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}} = [(\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}} - \{0\})/\mathbb{G}_m]$ est propre.*

L'action de \mathbb{G}_m (théorème 3.4) n'est pas celle induite par multiplication sur les fonctions méromorphes d'une courbe préstable. Toutefois, les quotients de $\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}} - \{0\}$ par ces deux actions sont isomorphes.

Dans [6], les auteurs construisent un cône $\tilde{\mathfrak{A}}_{g,\mathbf{k}}$ au-dessus de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui a pour S -sections les S -courbes n -marquées stables munies de « parties polaires généralisées », qui sont localement données par des points $(u_i, a_{k_i-1,i}, \dots, a_{1,i})$ de $\prod_{i=1}^n [\mathbb{A}^{k_i}/\mu_{k_i}]$. Quand $u_i \neq 0$, la i^{e} composante à la partie polaire induite est $(u_i t_i^{-1})^{k_i} + a_{k_i-1}(u_i t_i^{-1})^{k_i-1} + \dots + a_1(u_i t_i^{-1})$, où t_i est une équation locale de \mathcal{D}_i . On montre également que $\tilde{\mathfrak{A}}_{g,\mathbf{k}}$ est l'une des deux compactifications toroïdales du groupe résoluble des difféomorphismes tronqués de l'anneau des parties principales d'ordre au plus k_i le long des \mathcal{D}_i . L'autre choix conduit à une compactification des parties principales d'ordre au plus k_i sur une courbe stable [9, chap. 4 §2].

Proposition 3.6. *Les champs $\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}_{g,\mathbf{k}}$ sont des cônes isomorphes au-dessus de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.*

En effet, la description théorème 3.4 donne des isomorphismes locaux de $\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}}$ sur $\tilde{\mathfrak{A}}_{g,\mathbf{k}}$ qui se recollent.

4. Hurwitz et compactification ELSV

À toute S -courbe polaire $(\pi : \mathcal{X} \rightarrow S, \varrho_{\mathbf{k}})$ de profil \mathbf{k} , on associe la suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \left(\sum_{i=1}^n k_i \mathcal{D}_i \right) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(k_i \mathcal{D}_i) / \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\nabla} R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}. \tag{1}$$

La compatibilité du morphisme de dualité $R^1 \pi_* \mathcal{O}_S \simeq \pi_* \text{Hom}(\omega_{\mathcal{X}/S}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ aux changements de base fait de la donnée ∇ une section $\nabla_{\mathbf{k}}$ du dual du fibré de Hodge sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Sur les points de $\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}}$, cette section associe à une forme régulière Ω sur X le scalaire $\sum_{i=1}^n \text{Res}_{p_i}(\varrho_i \Omega)$, où Res_{p_i} est la forme linéaire résidu en p_i .

Définition 1. On note $\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ le sous-champ fermé de $\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}}$ lieu des zéros de $\nabla_{\mathbf{k}}$.

On note $\mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ le champ quotient $[(\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}} - \{0\})/\mathbb{G}_m]$. C'est un sous-champ fermé (donc propre) de $\mathbb{P}\mathfrak{A}_{g,\mathbf{k}}$. Une S -section de $\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ est une S -courbe polaire $(\pi : \mathcal{X} \rightarrow S, \varrho_{\mathbf{k}})$ où $\varrho_{\mathbf{k}}$ provient localement sur S d'une section dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\sum_{i=1}^n k_i \mathcal{D}_i))$; autrement dit, d'un S -morphisme de $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1_S$ qui a un pôle d'ordre exactement k_i le long de \mathcal{D}_i . Le sous-champ ouvert $\mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}^\circ$ de $\mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$, lieu des courbes sous-jacentes lisses, s'identifie à $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$. Ce dernier est réduit; on note $\overline{\mathcal{H}}_{g,\mathbf{k}}$ son adhérence comme sous-champ réduit de $\mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$.

On se place dans le cas \mathbf{p} nul ou strictement supérieur au degré des revêtements considérés. On construit un morphisme $\overline{\mathfrak{Z}}_{g,\mathbf{k}} \rightarrow \mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ qui prolonge $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}} \subset \mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ comme suit : soit $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une S -section de $\overline{\mathfrak{Z}}_{g,\mathbf{k}}$, ρ la projection $\mathcal{Y} \rightarrow S$. Le faisceau $\rho_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\tau_\infty)$ est localement libre, de rang 2. Le choix d'une base locale conduit à une contraction $c : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1_S$ qui envoie τ_∞ sur ∞ . Par stabilisation de l'application ϕ le long de \mathcal{D}_i , on obtient une courbe polaire $(\overline{\mathcal{X}}, \varrho_{\mathbf{k}}(\phi))$. Celle-ci ne dépend pas des choix locaux de bases de $\rho_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\tau_\infty)$ et définit une S -section de $\mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$. On note $\mathfrak{h} : \overline{\mathfrak{Z}}_{g,\mathbf{k}} \rightarrow \mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ le morphisme décrit ainsi.

Proposition 2. *Le morphisme \mathfrak{h} factorise par $\overline{\mathcal{H}}_{g,\mathbf{k}} \subset \mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ et induit un morphisme propre et surjectif de $\overline{\mathfrak{Z}}_{g,\mathbf{k}}$ sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,\mathbf{k}}$.*

La description précédente de $\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ fournit une solution simple et naturelle au problème de l'extension du morphisme $\mathcal{L}\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}_{g,\mathbf{k}}$ à $\mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,\mathbf{k}}$ [6,7].

On désigne par $\Gamma_{\mathbf{k}}$ le sous-graphe de $\Gamma = \Gamma_{(X,\underline{p})}$ engendré par les sommets marqués. Une métrique μ sur Γ , c'est-à-dire la donnée d'un entier strictement positif sur chaque arête, induit une distance sur Γ . On note $\Gamma_{\geq \ell}^\mu$ le sous-graphe des sommets à la distance au moins ℓ de $\Gamma_{\mathbf{k}}$. On note I l'union disjointe des ensembles $I_{\ell+1}$ de composantes connexes de $\Gamma_{\geq \ell+1}^\mu - \Gamma_{\geq \ell}^\mu$ et d'un singleton I_0 . On définit le raffinement $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $\{\Gamma_{\geq \ell}^\mu\}$ donné par : $\gamma_{I_0} = \Gamma$ et pour tout $\ell \geq 1$ et $\alpha \in I_\ell$, γ_α^μ est le sous-graphe de $\Gamma_{\geq \ell}^\mu$ qui correspond à la composante connexe $\alpha \in I_\ell$. Deux métriques sur Γ sont dites équivalentes si les partitions associées sont identiques. On appelle mère de $\alpha \in I_{n+1}$ la plus petite composante $\alpha_{\mathbf{m}}$ telle que $\alpha_{\mathbf{m}} \supseteq \alpha$. On appelle fille de $\alpha \in I$ toute plus grande composante $\alpha_{\mathbf{f}}$ telle que $\alpha_{\mathbf{f}} \subsetneq \alpha$. Si v est un sommet de γ_α , on note $[\alpha_{\mathbf{m}}, v]$ l'ensemble des arêtes de $\gamma_{\alpha_{\mathbf{m}}} - \gamma_\alpha$ incidentes à v . Si u est un sommet de $\alpha_{\mathbf{m}}$, on désigne par $[u, v]$ le sous-ensemble de $[\alpha_{\mathbf{m}}, v]$ d'arêtes incidentes à u .

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme surjectif entre courbes lisses, on note $r_f(x)$ la multiplicité de f en x .

Théorème 4.1. *Un point de $\overline{\mathcal{H}}_{g,k}$ est donné par une courbe polaire $(X, Q_k) \in \mathbb{P}\mathfrak{Z}_{g,k}$, une classe d'équivalence de métriques sur Γ , pour chaque sommet v , un morphisme $f_v : X_v \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui, pour $v \in \Gamma_k$, relève Q_k , et pour tout $\alpha \in I_\ell$, $\ell \geq 1$, un point $y_\alpha \in \mathbb{P}^1$, de sorte que :*

- (i) *pour toute fille α_f de α et pour tout $v \in \gamma_\alpha$, on a $\{x_e \mid e \in [v, \gamma_{\alpha_f}]\} \subset f_v^{-1}(y_{\alpha_f})$,*
- (ii) *pour tout sommet $v \in \gamma_\alpha$, on a $f_v^{-1}(y_\alpha) = \sum_{u \in \gamma_{\alpha_m}} \sum_{e \in [u, v]} r_{f_u}(x_e) x_{\bar{e}}$.*

Références

- [1] D. Abramovich, M. Olsson, A. Vistoli, Tame stacks in positive characteristic, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 58 (4) (2008) 1057–1091.
- [2] K. Behrend, B. Fantechi, The intrinsic normal cone, *Invent. Math.* 128 (1) (1997) 45–88.
- [3] K. Behrend, Y. Manin, Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants, *Duke Math. J.* 85 (1) (1996) 1–60.
- [4] J. Bertin, M. Romagny, *Champs de Hurwitz*, Mémoires de la SMF, vol. 125/126, Société Mathématique de France, 2011.
- [5] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 36 (1969) 75–109.
- [6] T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves, *Invent. Math.* 146 (2) (2001) 297–327.
- [7] B. Fantechi, R. Pandharipande, Stable maps and branch divisors, *Compos. Math.* 130 (3) (2002) 345–364.
- [8] J. Harris, D. Mumford, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.* 67 (1) (1982) 23–88.
- [9] G. Kempf, F.F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 339, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [10] M. Romagny, Group actions on stacks and applications, *Michigan Math. J.* 53 (1) (2005) 209–236.