



ELSEVIER

Contents lists available at [SciVerse ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie différentielle

Théorème de Poincaré–Alexander pour les domaines modèles

*Poincaré–Alexander Theorem for model domains*Marianne Peyron ^{a,b}^a UJF–Grenoble-1, Institut Fourier, 38402 Grenoble, France^b CNRS UMR5582, Institut Fourier, 38041 Grenoble, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 23 janvier 2013

Accepté après révision le 24 mai 2013

Disponible sur Internet le 12 juin 2013

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Le théorème de Poincaré–Alexander stipule qu'une application holomorphe définie sur un ouvert de la boule unité de \mathbb{C}^n peut, sous certaines conditions, être prolongée en un biholomorphisme de la boule unité. Dans le cadre presque complexe, la boule unité n'est plus, à biholomorphisme près, le seul domaine strictement pseudoconvexe et homogène. Un domaine strictement pseudoconvexe et homogène est biholomorphe à un « domaine modèle ». Nous donnons dans cet article une généralisation du théorème de Poincaré–Alexander pour les domaines modèles.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

The Poincaré–Alexander Theorem states that holomorphic mappings defined on an open subset of the unit ball of \mathbb{C}^n may, under certain conditions, be extended to a biholomorphism of the unit ball. In a complex manifold, every strongly pseudoconvex homogeneous domain is biholomorphic to the unit ball. In an almost complex manifold, the unit ball is not the only strongly pseudoconvex homogeneous domain. A strongly pseudoconvex homogeneous domain is biholomorphic to a model domain. The aim of this paper is to extend this theorem to model domains.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction et préliminaires

Dans une variété complexe, tout domaine strictement pseudoconvexe homogène est équivalent, à biholomorphisme près, à la boule unité. Ce n'est plus le cas dans une variété presque complexe (M, J) , même lorsque la structure J est lisse de classe C^∞ : tout domaine strictement pseudoconvexe homogène est équivalent à un domaine modèle de la forme (\mathbb{H}, J^B) (cf. [définition 1.3](#)). De plus, $\partial\mathbb{H}$ peut être muni d'une structure de groupe de Lie, qui dépend de la structure presque complexe J^B (cf. [\[6,8,9,3\]](#)). Les domaines modèles constituent donc une généralisation du groupe de Heisenberg pour une variété presque complexe et l'étude de leurs propriétés a pour objectif de développer l'analyse géométrique dans les variétés presque complexes. C'est dans ce but que nous donnons dans cet article une généralisation du théorème de Poincaré–Alexander pour les domaines modèles.

Théorème 1.1. *Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit (D, J) un domaine modèle dans \mathbb{C}^n . Soit $p \in \partial D$. Soit U une boule ouverte dans \mathbb{C}^n , centrée en p .*

Adresse e-mail : Marianne.Peyron@ujf-grenoble.fr.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ une application de classe C^4 , pseudo-holomorphe sur U , telle que $f(U \cap \partial D) \subset \partial D$. Si f est un difféomorphisme local en p , alors f s'étend en un automorphisme de (D, J) .

Dans \mathbb{C}^n ($n > 1$), le théorème de Poincaré–Alexander stipule que si U est une boule ouverte de \mathbb{C}^n vérifiant $U \cap \partial \mathbb{B}^n \neq \emptyset$ et si $f : \overline{U \cap \mathbb{B}^n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une application non constante, de classe C^1 et holomorphe sur $U \cap \mathbb{B}^n$, telle que $f(\overline{U \cap \mathbb{B}^n}) \subset \partial \mathbb{B}^n$, où \mathbb{B}^n désigne la boule unité dans \mathbb{C}^n , alors f s'étend en un biholomorphisme de \mathbb{B}^n .

Ce théorème a été démontré par H. Alexander dans [1] pour une application lisse, puis par S. Pinčuk [13,14] pour une application C^1 (cf. aussi [15, th. 15.3.8]).

La démonstration du théorème 1.1 repose en grande partie sur le théorème suivant :

Théorème 1.2. (Voir [11].) Soient J_{mod} et J'_{mod} deux structures modèles sur \mathbb{C}^n .

Soit U une boule ouverte centrée en 0 dans \mathbb{C}^n . Soit $f : \partial \mathbb{H} \cap U \rightarrow \partial \mathbb{H}$ une application CR de classe C^4 . On suppose que f est un difféomorphisme local en 0 et que $f(0) = 0$. Alors f est uniquement déterminée par ses jets d'ordre 2 en un point, et f est analytique réelle.

Notons que le théorème 1.2 est distinct du résultat obtenu par D. Zaitsev [16], qui traite le cas où l'application CR est un difféomorphisme lisse C^∞ entre deux hypersurfaces dans deux variétés presque CR de même dimension, et des deux résultats obtenus par F. Bertrand et L. Blanc-Centi [2], dont l'un traite le cas de la dimension réelle 4, et l'autre celui où la structure presque complexe est une petite déformation de la structure standard.

La démonstration du théorème 1.2, donnée en détails dans [11], est totalement indépendante des travaux [2] et [16], dont les approches sont basées respectivement sur les disques de Lempert et la théorie des formes normales de Moser. Elle utilise la méthode de prolongation des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Nous exprimons toutes les dérivées d'ordre 3 de la fonction f comme des fonctions analytiques réelles des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 de cette fonction. La théorie des systèmes complets permet de conclure à l'analyticité de la fonction f [7].

La démonstration complète du théorème 1.1 se trouve dans [12]; nous en donnons ici les principales idées.

Soient (M, J) et (M', J') deux variétés presque complexes. Une application $f : M \rightarrow M'$ de classe C^1 est dite (J, J') -holomorphe, ou pseudo-holomorphe, si :

$$\forall z \in M, \quad df_z \circ J_z = J'_{f(z)} \circ df_z. \tag{1}$$

Si $f : (M, J) \mapsto (M', J')$ est une bijection pseudo-holomorphe, on dira que f est un (J, J') -biholomorphisme. On parlera de J -automorphisme si $(M', J') = (M, J)$. Soit $\text{Aut}(M, J)$ le groupe des J -automorphismes de M . On dit que (M, J) est **homogène** si l'action de $\text{Aut}(M, J)$ sur M est transitive.

Étant donné une variété presque complexe (M, J) de dimension complexe supérieure ou égale à 2, il n'existe pas, génériquement, d'application pseudo-holomorphe à valeurs dans (M', J') , y compris à valeurs dans le disque unité Δ de \mathbb{C} muni de la structure standard J_{st} . En revanche, il existe une infinité d'applications pseudo-holomorphes de (Δ, J_{st}) à valeurs dans (M, J) [10].

Soit Γ une sous-variété de (M, J) . Nous noterons $T_{\mathbb{C}}\Gamma = \mathbb{C} \otimes T\Gamma$ le complexifié de l'espace tangent de Γ . On définit l'espace tangent J -holomorphe de Γ par $H^{1,0}\Gamma = \{Z \in T_{\mathbb{C}}\Gamma, JZ = iZ\}$.

Soient (M, J) et (M', J') deux variétés presque complexes. Soient Γ et Γ' deux sous-variétés de M et M' . Une application C^1 , $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est dite CR si $f_*\{H^{1,0}\Gamma\} \subset H^{1,0}\Gamma'$.

Ainsi, si $f : (M, J) \mapsto (M', J')$ est une bijection pseudo-holomorphe et Γ est une sous-variété de M , alors l'application $\tilde{f} = f|_{\Gamma}$ définie sur Γ et à valeurs dans $f(\Gamma) = \Gamma'$ est CR.

De même, si Ω est un ouvert de M tel que $\Gamma \cap \Omega$ est non vide, et $f : (\Omega, J) \mapsto (M', J')$ est une bijection pseudo-holomorphe, alors l'application $\tilde{f} = f|_{\Gamma \cap \Omega}$ définie sur $\Gamma \cap \Omega$ et à valeurs dans $f(\Gamma \cap \Omega)$ est CR.

Nous définissons maintenant les structures modèles. Nous utilisons les notations utilisées dans [6]. Une structure presque complexe J sur \mathbb{C}^n est dite **structure modèle** si le complexifié de la structure presque complexe J , noté $J_{\mathbb{C}}$, vérifie :

$$J_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{l=1}^{n-1} (\alpha_l^j z_l + \beta_l^j \bar{z}_l) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1, \quad \text{et} \quad J_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Soit J une structure modèle sur \mathbb{C}^n , et $D = \{z \in \mathbb{C}^n, \text{Re}(z_n) + P(z', \bar{z}') = 0\}$, où P est un polynôme homogène du second degré sur \mathbb{C}^{n-1} à valeurs réelles. Le couple (D, J) est dit **domaine modèle** si D est strictement J -pseudoconvexe au voisinage de l'origine.

Soit \mathbb{H} le demi-espace de Siegel, défini par $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}^n, \text{Re}(z_n) + |z'|^2 < 0\}$, où $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. On notera $\rho(z) = \text{Re}(z_n) + |z'|^2$ et $\Gamma = \partial \mathbb{H}$.

Définition 1.3. Pour une matrice complexe antisymétrique $B = (b_{j,k})_{j,k=1,\dots,n-1}$, on définit une structure presque complexe modèle, J^B , par sa complexification $J^B_{\mathbb{C}}$:

$$J^B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{j,k} z_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1, \quad \text{et} \quad J^B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Les couples (\mathbb{H}, J^B) permettent de classifier les domaines modèles. En effet, en utilisant les résultats de [9], nous obtenons :

Proposition 1.4. *Soit (D, J) un domaine modèle dans \mathbb{C}^n . Alors, il existe une matrice antisymétrique B telle que (D, J) est biholomorphe à (\mathbb{H}, J^B) . De plus, le biholomorphisme construit est un biholomorphisme global de \mathbb{C}^n .*

2. Idée de la démonstration du théorème 1.1

Si $n = 2$, nous savons, d'après [6], que toutes les structures modèles sont intégrables. Ainsi, dans les cas où $n = 2$ ou n est supérieur ou égal à 3 et la structure J est intégrable, il existe, d'après [6, Prop. 2.3], un (J, J_{st}) -biholomorphisme global de \mathbb{C}^n . En utilisant les théorèmes de Wong–Rosay [5] et de Fefferman [4], nous nous ramenons au théorème de Poincaré–Alexander classique (cf. [12]).

Dans le cas où n est supérieur ou égal à 3 et où la structure J n'est pas intégrable, grâce à la proposition 1.4, nous nous ramenons au cas particulier d'un domaine modèle de la forme (\mathbb{H}, J^B) , où la structure J^B est définie par une matrice antisymétrique. Nous démontrons donc le théorème 1.1 dans ce cas particulier. Soit U une boule ouverte centrée en 0 dans \mathbb{C}^n , soit F une application de classe C^4 et pseudo-holomorphe sur U , qui vérifie $F(0) = 0$ et $F(U \cap \Gamma) \subset \Gamma$, telle que F est un difféomorphisme local en 0. Nous allons montrer que l'application F s'étend en un automorphisme de (\mathbb{H}, J^B) .

Lemme 2.1.

1. *Le développement limité de F en 0 est de la forme :*

$$F_j(z, \bar{z}) = a_1^j z_1 + \cdots + a_{n-1}^j z_{n-1} + o(|z|^2) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1, \quad \text{et} \quad F_n(z, \bar{z}) = cz_n + o(|z|^2).$$

2. *L'application $G = (G_1, \dots, G_n)$ définie sur \mathbb{C}^n par :*

$$G_j(z, \bar{z}) = a_1^j z_1 + \cdots + a_{n-1}^j z_{n-1} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1, \quad \text{et} \quad G_n(z, \bar{z}) = cz_n \quad (2)$$

est un automorphisme de (\mathbb{H}, J^B) dont le jet d'ordre 2 en 0 coïncide avec celui de F .

La structure J n'étant pas intégrable, d'après le résultat de [9], qui est valable localement, il existe une constante réelle c , telle que :

$$\forall z = (z', z_n) \in U, \quad F(z, \bar{z}) = (F'(z'), cz_n + \phi(\bar{z}')), \quad (3)$$

où ϕ est une application antiholomorphe (au sens standard) de U dans \mathbb{C} et F' est une application holomorphe (au sens standard) de U dans \mathbb{C}^{n-1} . Enfin, par hypothèse, $F(U \cap \Gamma) \subset \Gamma$: l'application \tilde{F} , restriction de l'application F à $\Gamma \cap U$ est CR. La démonstration du point 1 est basée sur des calculs de développements limités. Elle utilise le fait que F est un difféomorphisme local en 0 vérifiant $F(0) = 0$, que F vérifie les équations de pseudo-holomorphie (1) et que J^B est une structure modèle. Pour la démonstration du point 2, les travaux de K.H. Lee [9, proposition 6.1] donnent une caractérisation des automorphismes de (\mathbb{H}, J^B) , qui est vérifiée par l'application G . L'application \tilde{F} est CR et vérifie les hypothèses du théorème 1.2 : l'application \tilde{F} est donc uniquement déterminée par son jet d'ordre 2 en 0. Les applications \tilde{F} et G sont donc égales sur $U \cap \Gamma$. Ainsi, l'application \tilde{F} se prolonge en un automorphisme de (\mathbb{H}, J^B) .

D'après l'écriture (3), l'application F est analytique réelle sur U . Ses dérivées en 0 coïncident avec celles de l'application G . Ce fait provient, d'une part de l'écriture (3) et de la définition de l'application G donnée dans (2), d'autre part de l'égalité des applications F et G sur $U \cap \Gamma$. Les applications F et G , analytiques réelles sur U , ont des dérivées partielles en 0 qui coïncident. Elles sont donc égales sur U , et l'application F se prolonge en un automorphisme de (\mathbb{H}, J^B) . Ceci termine la démonstration.

Références

- [1] H. Alexander, Holomorphic mappings from the ball and polydisc, *Math. Ann.* 209 (1974) 249–256.
- [2] F. Bertrand, L. Blanc-Centi, Stationary holomorphic discs and finite jet determination problems, preprint, 2012.
- [3] J. Byun, H. Gaussier, K.H. Lee, On the automorphism group of strongly pseudoconvex domains in almost complex manifolds, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 59 (1) (2009) 291–310.
- [4] C. Fefferman, Monge–Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, *Ann. Math.* (2) 103 (2) (1976) 395–416.
- [5] H. Gaussier, K.T. Kim, S.G. Krantz, A note on the Wong–Rosay theorem in complex manifolds, *Complex Var. Theory Appl.* 47 (9) (2002) 761–768.
- [6] H. Gaussier, A. Sukhov, On the geometry of model almost complex manifolds with boundary, *Math. Z.* 254 (3) (2006) 567–589.
- [7] C.K. Han, Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems, *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, IMA Vol. Math. Appl. 144 (2008) 421–429.
- [8] K.H. Lee, Domains in almost complex manifolds with an automorphism orbit accumulating at a strongly pseudoconvex boundary point, *Mich. Math. J.* 54 (1) (2006) 179–205.
- [9] K.H. Lee, Strongly pseudoconvex homogeneous domains in almost complex manifolds, *J. Reine Angew. Math.* 623 (2008) 123–160.
- [10] A. Nijenhuis, W. Woolf, Some integration problems in almost-complex and complex manifolds, *Ann. Math.* 77 (1) (1963) 424–489.

- [11] M. Peyron, Analyticité des applications CR dans des variétés presque-complexes, <http://arxiv.org/abs/1205.3262>, 2012.
- [12] M. Peyron, Théorème de Poincaré–Alexander pour les domaines modèles, <http://arxiv.org/abs/1211.2966>, 2012.
- [13] S.I. Pinčuk, The analytic continuation of holomorphic mappings, *Math. USSR Sb. (N. S.)* 98(140) (3(11)) (1975) 416–435, 495–496.
- [14] S.I. Pinčuk, Analytic continuation of mappings along strictly pseudo-convex hypersurfaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 236 (3) (1977) 544–547.
- [15] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* , *Class. Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2008, reprint of the 1980 edition.
- [16] D. Zaitsev, Normal forms for nonintegrable almost CR structures, *Am. J. Math.* 134 (4) (2012) 915–947.