



ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Géométrie différentielle

Théorèmes de type Obata pour certains feuilletages riemanniens

Obata-type theorems for some Riemannian foliations

M.A. Chaouch

Institut préparatoire aux études d'ingénieur de Nabeul, El Mrazka 8000, Hammamet, Tunisie

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 23 octobre 2012

Accepté après révision le 8 février 2013

Disponible sur Internet le 26 février 2013

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Un théorème d'Obata stipule qu'une variété riemannienne complète de dimension $n \geq 2$ admettant une fonction f non triviale vérifiant l'équation différentielle $A_{\text{grad } f} = fI_n$ est une sphère (Obata, 1962). Dans cette note, nous nous proposons d'étudier la situation analogue pour certains feuilletages riemanniens de dimension 1 ou de codimension 1 sur les variétés riemanniennes de dimension ≥ 3 .

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

A theorem of Obata states that a complete Riemannian manifold of dimension $n \geq 2$ admitting a nontrivial function f satisfying the differential equation $A_{\text{grad } f} = fI_n$ is a sphere (Obata, 1962). In this paper, we propose to study the analogous situation for some Riemannian foliations of dimension 1 or codimension 1 on Riemannian manifolds of dimension $n \geq 3$.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Préliminaire

Soit (M, g) une variété riemannienne orientable de dimension n et \mathcal{F} un feuilletage de codimension q transversalement orientable sur M . Soit $\Gamma(TM)$ (resp. $\Gamma(T\mathcal{F})$) l'ensemble des sections du fibré tangent à M (resp. du fibré tangent à \mathcal{F}). On dit que le feuilletage \mathcal{F} est g -riemannien ou que la métrique g est quasi fibrée pour le feuilletage \mathcal{F} au sens de Reinhart [11] si $L_X g(Y, Z) = 0$ pour $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$ où $T\mathcal{F}^\perp$ est le fibré orthogonal à \mathcal{F} . Soit ∇ la connexion riemannienne sur M induite par g . Pour $X \in \Gamma(TM)$, A_X désigne l'endomorphisme de TM défini par $A_X(Y) = -\nabla_Y X$. Enfin on désigne par I_n l'endomorphisme identité de TM et par ∇f le champ gradient d'une fonction f définie sur M .

2. Résultats principaux

Théorème 2.1. Soient (M, g) une variété riemannienne complète orientable de dimension $n \geq 3$ et \mathcal{F} un feuilletage g -riemannien de codimension 1 complet transversalement orientable sur M . Soit N le champ unitaire orthogonal à \mathcal{F} et soit $\omega = i_N g$. Si M admet une fonction non triviale f constante sur les orbites de N et vérifiant l'équation

$$A_{\nabla f} - fI_n = -f\omega \otimes N \quad (1)$$

alors :

Adresse e-mail : MohamedAli.Chaouch@fsb.rnu.tn.

- i) la variété M est difféomorphe au produit $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ si elle est non compacte,
 ii) la variété M est un fibré en sphères \mathbf{S}^{n-1} au-dessus de \mathbf{S}^1 si elle est compacte ; en particulier, M est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$.

Démonstration. Comme \mathcal{F} est g -riemannien, pour tout $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ on a

$$0 = L_X g(N, N) = 2g(\nabla_N X, N) = -2g(\nabla_N N, X) = -2\nabla_N \omega(X).$$

D'où $d\omega = \omega \wedge \nabla_N \omega = 0$; mais cette condition exclut déjà les variétés compactes à groupe fondamental fini et, en particulier la sphère \mathbf{S}^n , ce qui nous explique la présence de la quantité $-f\omega \otimes N$ dans l'équation (1) si l'on compare celle-ci avec l'équation d'Obata. On dit alors que (1) est l'équation d'Obata feuilletée.

Maintenant, comme (M, g) est complète, le flot ϕ_t de N est global et, par conséquent, toutes les feuilles de \mathcal{F} sont isotopes. D'après [10], deux cas se présentent :

- i) ou bien toutes les feuilles de \mathcal{F} sont denses,
 ii) ou bien toutes les feuilles sont fermées. Dans ce cas, ou bien M est isomorphe à $F_0 \times \mathbb{R}$ (F_0 est une feuille particulière), ou bien le feuilletage \mathcal{F} définit une fibration de M sur la variété des feuilles M/\mathcal{F} isomorphe à \mathbf{S}^1 .

Soit F une feuille de \mathcal{F} ; on désigne par F' la feuille F lorsque cette dernière est munie de la topologie des feuilles. L'inclusion canonique $j : F' \rightarrow M$ envoyant F' sur F est un plongement ; il est régulier si et seulement si F est une feuille fermée. Cette inclusion induit une métrique riemannienne g' sur F' définie par

$$g'_x(X, Y) = g_{j(x)}(j_*X, j_*Y), \quad x \in F'$$

de manière que (F', g') soit une variété riemannienne complète et que j soit un plongement riemannien.

Soit $X \in \Gamma(TF')$; le champ j_*X est une section de $T\mathcal{F}$ qui admet une extension \tilde{X} sur M définie par :

$$\tilde{X}_{\phi_t(j(x))} = (\phi_t)_* \circ j_*(X_x), \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in F'.$$

Soient $X, Y \in \Gamma(TF')$ et \tilde{X}, \tilde{Y} les extensions de j_*X et j_*Y ; la restriction de $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ à F ne dépend pas de cette extension et, si ∇' est la connexion riemannienne induite par g' , on a la décomposition :

$$\nabla_{j_*X} j_*Y = j_*\nabla'_X Y + h(X, Y) \tag{2}$$

où $h(X, Y)$ est une section de $T\mathcal{F}$ orthogonale à F (voir [13], p. 73).

Soient f une fonction non triviale sur M et $\nabla' f_F$ le gradient de la fonction $f_F = f \circ j$ via la connexion ∇' . Si f est constante sur les orbites de N , le champ gradient ∇f sera une extension de $j_*\nabla' f_F$. En effet, si $X \in \Gamma(TF')$, on a

$$g(\nabla f, j_*X) = df(j_*X) = d(f \circ j)(X) = g'(\nabla' f_F, X) = g(j_*\nabla' f_F, j_*X).$$

Si, de plus, f vérifie l'équation (1), pour $x \in M$ et $X, Y \in \Gamma(TF')$, on a, d'après l'équation (2) :

$$\begin{aligned} (L_{\nabla' f_F} g')_x(X, Y) &= g'_x(\nabla'_X \nabla' f_F, Y) + g'_x(X, \nabla'_X \nabla' f_F) \\ &= g_{j(x)}(j_*\nabla'_X \nabla' f_F, j_*Y) + g_{j(x)}(j_*X, j_*\nabla'_X \nabla' f_F) \\ &= g_{j(x)}(\nabla_{j_*X} j_*\nabla' f_F, j_*Y) + g_{j(x)}(j_*X, \nabla_{j_*Y} j_*\nabla' f_F) \\ &= g_{j(x)}(\nabla_{\tilde{X}} \nabla f, \tilde{Y}) + g_{j(x)}(\tilde{X}, \nabla_{\tilde{Y}} \nabla f) \\ &= -2fg(\tilde{X}, \tilde{Y}) \quad \text{en } j(x) \\ &= -2f_F g'(X, Y) \quad \text{en } x. \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla' f_F$ est un champ conforme non de Killing sur la feuille F' ; d'après [8], F' est difféomorphe à \mathbf{S}^{n-1} . \square

Remarque 2.2. On sait que, pour $n = 2, 3, 4, 6$, un difféomorphisme de \mathbf{S}^{n-1} est isotope à l'identité (pour $n = 5$, on ne connaît pas grand chose), [6], p. 187 ; donc, pour ces entiers un fibré en sphère \mathbf{S}^{n-1} au-dessus de \mathbf{S}^1 est trivial.

Remarque 2.3. Dans le cas où la variété est non orientable, on montre, par passage à un revêtement à deux feuillets, que la variété M , ou bien est un fibré en espaces projectifs $\mathbb{R}P(n-1)$ au-dessus de \mathbf{S}^1 , ou bien est difféomorphe au produit $\mathbb{R}P(n-1) \times \mathbb{R}$.

Dans la suite, nous supposons que l'on a un flot \mathcal{F} sur une variété riemannienne (M, g) complète orientable ; on désigne alors par N le champ unitaire tangent à \mathcal{F} et par ω la 1-forme $i_N g$.

Soient M et Q des variétés différentiables et \mathcal{F} un feuilletage sur M . Une application $p : M \rightarrow Q$ est dite une décomposition pour \mathcal{F} (voir [5]) si :

- (i) p est une submersion,
- (ii) $\dim Q + \dim \mathcal{F} = \dim M$,
- (iii) $T_x F_x = (p_*)^{-1}(0)$ où $p_* : TM \rightarrow TQ$ est l'application linéaire tangente et F est la feuille de \mathcal{F} contenant x .

Théorème 2.4. Soit (M, g) une variété riemannienne complète orientable de dimension $n \geq 3$ et \mathcal{F} un flot g -riemannien, totalement géodésique régulier sur M . Si M admet une fonction non triviale constante sur les orbites de \mathcal{F} et vérifiant l'équation (1); alors :

- i) la variété M est est difféomorphe au produit $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ si elle est non compacte,
- ii) la variété M est difféomorphe au produit $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$ si elle est compacte.

Démonstration. Comme \mathcal{F} est régulier, l'espace des feuilles $Q = M/\mathcal{F}$ est une variété différentiable et la projection canonique $p : M \rightarrow Q$ est une décomposition pour \mathcal{F} (voir [12]).

Nous rappelons qu'une section $X \in \Gamma TM$ est feuilletée si le crochet $[X, N] \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Soit $V_{\text{loc}}(\mathcal{F})$ l'ensemble des sections locales feuilletées (projetables) et orthogonales à \mathcal{F} . Comme \mathcal{F} est g -riemannien, $V_{\text{loc}}(\mathcal{F})$ engendre l'ensemble des sections locales de $T\mathcal{F}^\perp$; par suite, la métrique g est projectable en une métrique riemannienne g' sur Q , définie par : $X, Y \in V_{\text{loc}}(\mathcal{F})$

$$g'_{p(x)}(p_*X, p_*Y) = g_x(X, Y), \quad x \in M.$$

La projection $p : (M, g) \rightarrow (Q, g')$ sera alors une submersion riemannienne. Enfin, comme (M, g) est complète et \mathcal{F} est totalement géodésique, (Q, g') est aussi complète et $p : M \rightarrow Q$ sera, d'après [4], une fibration principale en cercles.

Par ailleurs, pour tout $x \in M$, l'application p_* induit une isométrie linéaire de l'hyperplan $T_x \mathcal{F}^\perp$ sur $T_{p(x)} Q$; par conséquent, tout $X' \in \Gamma(TQ)$ admet un relèvement unique \tilde{X}' dans $T\mathcal{F}^\perp$, appelé relèvement horizontal; il est tel que $p_* \tilde{X}' = X'$ (voir [9], p. 212).

Soient $\pi : TM \rightarrow T\mathcal{F}^\perp$ la projection canonique parallèlement à N et ∇' la connexion riemannienne associée à la métrique g' . D'après [9], on a :

$$\pi \nabla_{\tilde{X}'} \tilde{Y}' = \widetilde{\nabla'_{X'} Y'} \quad \text{où } X', Y' \in \Gamma(TQ).$$

On en déduit alors que $p_* \nabla_{\tilde{X}'} \tilde{Y}' = \nabla'_{X'} Y'$.

Maintenant, si f est une fonction \mathcal{F} -basique non triviale sur M , elle induit une fonction f_Q non triviale sur Q telle que $f = f_Q \circ p$. Soit $\nabla' f_Q$ son gradient via ∇' ; pour $x \in M$ et $X' \in \Gamma TQ$, on a :

$$\begin{aligned} g_x(\nabla f, \tilde{X}') &= \tilde{X}' \cdot f = d(f_Q \circ p)(\tilde{X}') \quad \text{en } x \\ &= df_Q(p_* \tilde{X}') = X' \cdot f_Q \quad \text{en } p(x). \\ &= g'_{p(x)}(\nabla' f_Q, X') = g_x(\widetilde{\nabla' f_Q}, \tilde{X}'). \end{aligned}$$

On en déduit que $\widetilde{\nabla' f_Q} = \nabla f$. Si, de plus, f vérifie l'équation (1), pour $X', Y' \in \Gamma(TQ)$, on a :

$$\begin{aligned} (L_{\nabla' f_Q} g')_{p(x)}(X', Y') &= g'_{p(x)}(\nabla'_{X'} \nabla' f_Q, Y') + g'_{p(x)}(X', \nabla'_{Y'} \nabla' f_Q) \\ &= g'_{p(x)}(p_* \nabla_{\tilde{X}'} \nabla f, p_* \tilde{Y}') + g'_{p(x)}(p_* \tilde{X}', p_* \nabla_{\tilde{Y}'} \nabla f) \\ &= g_x(\nabla_{\tilde{X}'} \nabla f, \tilde{Y}') + g_x(\tilde{X}', \nabla_{\tilde{Y}'} \nabla f) \\ &= -2fg(\tilde{X}', \tilde{Y}') \quad \text{en } x \\ &= -2f_Q g'(X', Y') \quad \text{en } p(x). \end{aligned}$$

Par suite, $\nabla' f_Q$ est un champ conforme non de Killing sur Q , et donc M est fibré sur \mathbf{S}^{n-1} .

La variété M est un fibré en droites réelles au-dessus de \mathbf{S}^{n-1} si elle est non compacte. Mais on sait que l'ensemble $L_{\mathbb{R}}(\mathbf{S}^{n-1})$ des classes d'isomorphismes des fibrés en droites au-dessus de \mathbf{S}^{n-1} est un groupe isomorphe à $H^1(\mathbf{S}^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$ (voir [7], p. 236, Théorème 3.4). On en déduit que la variété M est difféomorphe à $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

La variété M est un fibré en cercles au-dessus de \mathbf{S}^{n-1} si elle est compacte.

- (i) Si $n > 3$, on a $H^2(\mathbf{S}^{n-1}, \mathbb{Z}) = 0$, la classe d'Euler de \mathcal{F} est nulle et donc la variété M est difféomorphe à $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$.
- (ii) Si $n = 3$, la variété M est aussi difféomorphe à $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$; ceci découle de la classification des flots riemanniens sur les variétés fermées de dimension 3 présentée dans (voir [3], p. 46). \square

Proposition 2.5. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientable de dimension $n \geq 3$ et \mathcal{F} un flot g -riemannien totalement géodésique à orbites fermées sur M . Soient N le champ unitaire tangent à \mathcal{F} et $\omega = i_N g$. Si M admet une fonction non triviale constante sur les orbites de \mathcal{F} et vérifiant l'équation (1), alors M est difféomorphe au produit $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$.

Démonstration. Soit (N, E_2, \dots, E_n) un repère orthonormé local direct de TM . Le fibré $T\mathcal{F}^\perp$ est totalement géodésique car \mathcal{F} est g -riemannien. Par conséquent, le champ $H = \sum_{i=2}^n \nabla_{E_i}^M E_i$ est dans $\Gamma T\mathcal{F}^\perp$, ce qui entraîne $\operatorname{div} N = -g(N, H) = 0$. Soit Ω une orientation de TM telle que $\Omega(N, E_2, \dots, E_n) = 1$ et $\alpha = i_N \Omega$. On a bien $\Omega = \omega \wedge \alpha$ et le flot \mathcal{F} est d'équation $\alpha = 0$. D'autre part on a $d\alpha = L_N \Omega = \operatorname{div} N \cdot \Omega = 0$, donc \mathcal{F} est sans holonomie. D'après [5], Q est une variété différentiable et $p : M \rightarrow Q$ est un fibré localement trivial, mais comme \mathcal{F} est g -riemannien totalement géodésique, p sera une fibration principale en cercles. \square

Soit G/K un espace homogène riemannien à courbure sectionnelle positive d'un groupe de lie G compact connexe de dimension $2n$. Soient M une variété orientable de dimension $2n + 1$, $n \geq 1$ et \mathcal{F} un flot sur M transversalement homogène modelé sur G/K . D'après [1], il existe sur M une métrique riemannienne g telle que \mathcal{F} soit g -riemannien.

Proposition 2.6. *Si M admet une fonction non triviale constante sur les orbites de \mathcal{F} et vérifiant l'équation (1), alors G/K est difféomorphe à \mathbf{S}^{n-1} et M est difféomorphe au produit $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$.*

Démonstration. Comme \mathcal{F} est g -riemannien, \mathcal{F} est sans holonomie. D'après [2] $M \rightarrow G/K$ est une fibration dont les fibres sont les orbites de \mathcal{F} . \square

Références

- [1] R.A. Blumenthal, Transversely homogeneous foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979) 143–158.
- [2] R.A. Blumenthal, Riemannian homogeneous foliations without holonomy, Nagoya Math. J. 83 (1981) 197–201.
- [3] Y. Carrière, Flots riemanniens, in : Structure transverse des feuilletages, Toulouse, 1982, Astérisque 116 (1984) 31–52.
- [4] R. Hermann, A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle, Proc. Am. Math. Soc. 11 (1960) 236–242.
- [5] R. Hermann, On the differential geometry of foliations, Ann. Math. (3) 72 (1960) 445–457.
- [6] M. Hirsch, Differential Topology, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer, 1976.
- [7] D. Husomoller, Fiber Bundles, McGraw–Hill, New York, 1966, MR 37 \neq 4824.
- [8] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Jpn. 14 (1962) 333–340.
- [9] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, London, 1983.
- [10] G. Reeb, Sur certaines propriétés des variétés feuilletées, Hermann, Paris, 1952.
- [11] B. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. Math. 69 (1959) 119–131.
- [12] E. Vidal, On regular foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 17 (1) (1967) 129–133.
- [13] T.J. Willmore, Total Curvature in Riemannian Geometry, Ellis Horwood, New York, 1982.